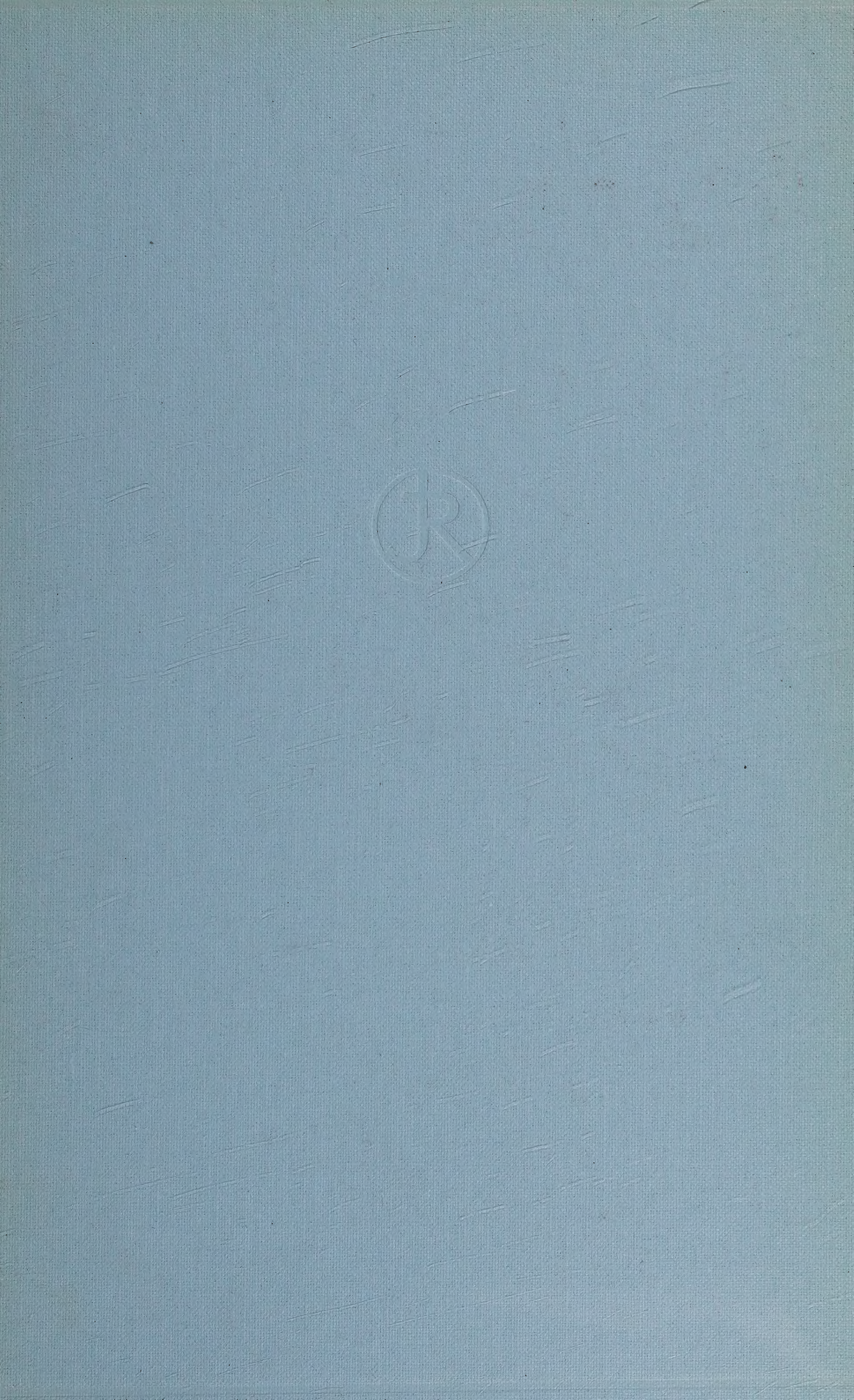




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 16

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1952

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 16

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 3—16

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Автор прилагает результаты и методы теории регулярно монотонных функций к исследованию экстремальных свойств регулярно конвексных функций.

1. В моем докладе ([1]) на международном конгрессе математиков в 1928 г. в Болонье, как и в статье ([2]), я рассматривал регулярно монотонные функции, которые определяются тем свойством, что на данном отрезке *все их производные знакопостоянны*. Еще ранее в добавлении к моей французской монографии ([3]), где впервые введены эти функции и установлен их аналитический характер, я коротко остановился (стр. 196) также и на более общем случае, когда существует только некоторая бесконечная последовательность знакопостоянных производных $f^{(n_k)}(x)$ (или конечных разностей порядков n_k), и наметил доказательство того факта, что аналитический характер $f(x)$ при этом сохраняется, если $\overline{\lim\limits_{k=\infty}}\frac{n_{k+1}}{n_k}<\infty$ (между тем как при $\overline{\lim\limits_{k=\infty}}\frac{n_{k+1}}{n_k}=\infty$ функция $f(x)$ принадлежит квазианалитическому классу P).

Упомяну также, что в начале доклада ([1]) и в мемуаре ([4]) (§ 15) я ввел, в частности, класс *абсолютно конвексных* функций $f(x)\in AK(a, b)$ на $[a, b]$, который определяется условием

$$f^{(2k)}(x)\geqslant 0 \quad (k\geqslant 0,\ a\leqslant x\leqslant b). \tag{1}$$

Применяя тот же прием, посредством которого в монографии ([3]) (стр. 193) доказано, что абсолютно монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ есть аналитическая функция, имеющая в точке a радиус сходимости $\geqslant R=b-a$, можно доказать следующее аналогичное предложение:

Если функция $f(x)\in AK(-R, R)$, *то* $f(x)$ *есть аналитическая функция, имеющая в точке* O *радиус сходимости* $\geqslant R$ (причем знак равенства фактически осуществим).

Действительно, пусть $m=2s>0$ — любое *четное* число и пусть $M=\max\limits_{-R\leqslant x\leqslant R} f(x)$ (который равен $f(R)$ или $f(-R)$); в таком случае при всех $x\ (-R\leqslant x\leqslant R)$ имеем

$$f(x)=P_{m-1}(x)+\rho_m(x),$$

где

$$\left.\begin{aligned} P_{m-1}(x) &= f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(0), \\ \rho_m(x) &= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^x f^{(m)}(z)(x-z)^{m-1}dz = \frac{x^m}{(m-1)!}\int_0^1 f^{(m)}(ux)(1-u)^{m-1}du. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Замечая, что $\rho_m(x) \geqslant 0$ при $-R \leqslant x \leqslant R$ и $f^{(2k)}(0) \geqslant 0$, заключаем из (2), что

$$\begin{aligned} &P_{m-1}(x) \leqslant f(x) \leqslant M, \\ &P_{m-1}(x) + P_{m-1}(-x) \geqslant 0, \end{aligned} \qquad (-R \leqslant x \leqslant R) \qquad (3)$$

так что имеем также

$$P_{m-1}(x) \geqslant -P_{m-1}(-x) \geqslant -M,$$

т. е.

$$|P_{m-1}(x)| \leqslant M \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Следовательно,

$$0 < \rho_m(R) \leqslant 2M \qquad (4)$$

и при $0 \leqslant x \leqslant R$ имеем (благодаря (2) и (4))

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \rho_m(x) &= \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{x}{R}\right)^{m-1}\int_0^x f^{(m)}(z)\left(R - \frac{Rz}{x}\right)^{m-1}dz < \\ &< \left(\frac{x}{R}\right)^{m-1}\rho_m(R) \leqslant 2M\left(\frac{x}{R}\right)^{m-1}, \end{aligned} \qquad (5)$$

откуда заключаем, что степенной ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится внутри круга $|x| \leqslant R$.

Очевидно, что существуют абсолютно конвексные на $[-R, R]$ функции, радиус сходимости которых $= R$, так как четные *абсолютно монотонные* на OR функции являются $AK(-R, R)$, а радиус сходимости абсолютно монотонной функции в начале отрезка всегда равен длине наибольшего отрезка, где она абсолютно монотонна. Случай, когда вместо четных порядков тем же условиям (1) подчинены производные нечетных порядков, приводится к предыдущему, так как тогда $f'(x) \in AK$. Если одновременно $f(x) \in AK(a, b)$ и $f'(x) \in AK(a, b)$, то $f(x)$ абсолютно монотонна на том же отрезке, и *минимальная область регулярности* $f(x)$ *расширяется, обращаясь в круг*, имеющий отрезок $[a, b]$ *радиусом, а не диаметром.*

2. Вообще, если мы будем рассматривать только те функции $f(x) \in AK$, у которых производные нечетных порядков также *знакопостоянны*, но могут иметь произвольно данный знак (т. е. если $f'(x)$ *регулярно конвексна*), то мы получим *регулярно монотонные* функции весьма разнообразных типов. В частности, на основании одного из предложений, доказанных в статье ([2]), мы выделим из класса функций $f(x) \in AK(a, b)$ *различные подклассы регулярно монотонных функций, которые обяза-*

тельно будут целыми функциями конечной степени, если потребуем, чтобы разность между соседними значениями s, для которых выполняется неравенство

$$f^{(2s-1)}(x)\, f^{(2s+1)}(x) \leqslant 0, \tag{6}$$

была ограничена. Вместе с тем, из соображений, высказанных в конце статьи ([7]), следует, что подкласс регулярно монотонных функций *наинизшей* степени получится, если неравенство (6) соблюдается для всех целых s, т. е. если $f'(x)$ *циклически конвексна* ($f'(x) \in ЦК(a, b)$): в этом случае, когда $f(x) \in AK(a, b)$ и $f'(x) \in ЦК(a, b)$, *все типовые числа равны** двум, и мы будем коротко писать $f(x) \in Ц_2(a, b)$.

При помощи приема, указанного в ([7]), получим регулярно монотонные многочлены любой данной степени n вида

$$\pm P_n(x) = \frac{x^n}{n!} + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n,$$

наименее уклоняющиеся от нуля, класса $Ц_2(a, b)$, если производные $P_n^{(m)}(x)$ всех порядков $0 \leqslant m < n$ подчиним условиям

$$P_n^{(4k)}(a) = P_n^{(4k+1)}(a) = P_n^{(4k+2)}(b) = P_n^{(4k+3)}(b) = 0,$$

т. е. если $P^{(m)}(a) = 0$ при $m = 4k$ или $m = 4k + 1$, а при $m = 4k + 2$ или $m = 4k + 3$ имеем $P_n^{(m)}(b) = 0$.

Не останавливаясь на вычислении этих многочленов, заметим только, что на основании тех же соображений *наивысшая возможная степень $c(R)$ функций $f(x) \in Ц_2(0, R)$ на отрезке длины R достигается функцией $S(x)$, удовлетворяющей уравнению*

$$S^{(IV)}(x) = c^4 S(x) \tag{7}$$

и предельным условиям: $S(0) = S'(0) = S''(R) = S'''(R) = 0$. Очевидно, $c(R) = \frac{\mu}{R}$, где постоянная $\mu = c(1)$ определится как *наибольшая* длина $R = R(1) = \mu$ отрезка, на котором функция $S(x)$ *первой* степени, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (7) при $c = 1$ и условиям $S(0) = S'(0) = 0$, может оставаться положительной вместе со своей первой и второй производными $(S(x) \geqslant 0,\ S'(x) \geqslant 0,\ S''(x) \geqslant 0)$, между тем как $S'''(x) \leqslant 0$.

Для определенности положим $S''(0) = 1$; в таком случае решение уравнения (7) (где $c = 1$), соответствующее начальным условиям $S(0) = S'(0) = 0$, $S''(0) = 1$, будет равно

$$S(x, \alpha) = \frac{1}{4}\left[e^x + e^{-x} - 2\cos x - \alpha\,(e^x - e^{-x} - 2\sin x)\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}, \tag{8}$$

* Чередование знаков последовательных производных будет $+ + + - + + + - \cdots$ (полагая, для определенности, $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$).

где параметр $\alpha = -S'''(0, \alpha) > 0$, и

$$S''(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4k!} - \alpha x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k+1)!},$$

$$S'''(x, \alpha) = -\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4k!} + x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k+3)!},$$

откуда видно, что во всяком случае $S''(x, \alpha) > 0$ при $0 < x \leqslant \frac{1}{\alpha}$ и $S'''(x, \alpha) < 0$ при $0 < x < \sqrt[3]{6\alpha}$. Таким образом, при любом $\alpha > 0$ $S(x, \alpha) \in Ц_2$ в некотором промежутке Ox_α, где x_α есть наименьший из корней уравнения $S''(x, \alpha) = 0$ или $S'''(x, \alpha) = 0$.

Если x_α есть корень $S'''(x, \alpha) = 0$, что представится при достаточно малых α, то при $x > x_\alpha$ производные $S(x, \alpha)$ всех порядков станут положительными, и функция $S(x, \alpha)$ при $x_\alpha \leqslant x < \infty$ будет *абсолютно монотонной* *. При непрерывном увеличении α корень x_α уравнения $S'''(x, \alpha) = 0$ будет возрастать и, вследствие одновременного убывания $S''(x, \alpha)$, настанет момент $(\alpha = \alpha_0)$, когда $x_{\alpha_0} = R$ окажется совместным корнем $S'''(R, \alpha_0) = S''(R, \alpha_0) = 0$, причем это значение R будет наибольшей длиной отрезка $[0, R]$, где $S(x, \alpha)$ может быть класса $Ц_2$, так как при дальнейшем возрастании α

$$S''(R, \alpha) < S''(R, \alpha_0) = 0.$$

Таким образом, наивысшая степень μ целых функций $f(x) \in Ц_2(0, 1)$ равна наименьшему общему корню уравнений

$$S''(x, \alpha) = S'''(x, \alpha) = \frac{1}{4}\left[e^x + e^{-x} + 2\cos x - \alpha\left(e^x - e^{-x} + 2\sin x\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[e^x - e^{-x} - 2\sin x - \alpha\left(e^x - e^{-x} + 2\cos x\right)\right] = 0, \qquad (9)$$

т. е. μ есть *наименьший корень уравнения*

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos x + 1 = 0. \qquad (9\,\text{bis})$$

Это уравнение встречается у Рэлея ([5]) (т. 1, стр. 292), откуда я заимствую приближенное значение наименьшего корня уравнения (9):

$$\mu \doteq 1{,}875104 \qquad (10)$$

$\left(\text{как и следовало ожидать, } \mu > \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Общее исследование регулярно *конвексных* функций может быть проведено методом, изложенным в ([2]), но для функций $f(x) \in ЦК(a, b)$, которые с точностью до множителя ± 1 определяются неравенством

$$(-1)^k f^{(2k)}(x) \geqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b), \qquad (11)$$

---

* Например, при $\alpha \leqslant \frac{1}{12}$ $S'''(1, \alpha) > 0$, в то время как $S''(1, \alpha) > 0$, и, следовательно, в этом случае ни одна из производных не обратится в нуль при $x > 1$.

более совершенные результаты получаются непосредственным применением элементарно алгебраических соображений теории циклически монотонных функций ($f(x) \in Ц(a, b)$), которые определяются дополнительным условием ($f'(x) \in Ц(a, b)$), или, с точностью до знака и до замены x на $-x$, могут быть охарактеризованы неравенствами (11), дополненными неравенствами

$$(-1)^k f^{(2k-1)}(x) \geqslant 0. \tag{12}$$

Очевидно, кроме того, что синусоидный тип циклически монотонных функций, определенный совокупностью неравенств (11) и (12), может быть (подобно всем регулярно монотонным типам) *охарактеризован явной формулировкой любого бесконечного множества неравенств* (11) *или* (12) *с тем, чтобы каждое из них для прочих* $f^{(n)}(x)$ *было заменено требуемым неравенством лишь для* $f^{(n)}(a)$, *когда знаки* $f^{(n)}(x)$ *и* $f^{(n+1)}(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ *должны быть одинаковы* (пермананс), *и для* $f^{(n)}(b)$, *когда требуется, чтобы* $f^{(n)}(x) f^{(n+1)}(x) \leqslant 0$ (альтернанс).

Следует заметить, что неравенства (11), характеризующие $ЦK(a, b)$, также могут быть заменены (за исключением некоторого бесконечного множества значений n, для которых (11) сохраняется) соответствующей *парой неравенств* *

$$(-1)^k f^{(2k)}(a) \geqslant 0, \quad (-1)^k f^{(2k)}(b) \geqslant 0, \tag{11 bis}$$

так как после того как известно, что

$$(-1)^{k+1} f^{(2k+2)}(x) \geqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

т. е. кривая $(-1)^k f^{(2k)}(x)$ вогнута по отношению к (a, b), из неравенств (11 bis) следует, что $(-1)^k f^{(2k)}(x) \geqslant 0$ при всех $x\,(a \leqslant x \leqslant b)$.

Все функции $f(x) \in ЦK(0, 1)$, как показали D. Widder и R. P. Boas ([6]), являются функциями конечной степени $p \leqslant \pi$. Нетрудно показать, что этот результат и притом в уточненной форме является простым следствием моей старой теоремы относительно функций $Ц$, формулированной и вкратце доказанной в докладе ([1]) (подробное доказательство в статье ([7])):

Если $f(x)$ — *циклически монотонная функция* $f(x) \in Ц(0, 1)$, *не превышающая* 1 *на отрезке* (0,1), *то ее производные порядка* $m = 2k - 1$ *удовлетворяют неравенствам*

$$N_{2k-1} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(m)}(x)| \leqslant \frac{1}{L_{m+1}} = \frac{2k!}{|E_{2k}|} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{\pi^2}{8} \tag{13}$$

и производные порядка $m = 2k$ *удовлетворяют неравенствам* **

$$N_{2k} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(m)}(x)| \leqslant \frac{1}{L_{m+1}} = \frac{(2k+1)!}{|E_{2k+1}|} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{\pi^2}{8}. \tag{13 bis}$$

---

* В случае других регулярно конвексных функций соответствующие неравенства $\varepsilon_k f^{(2k)}(a) \geqslant 0$, $\varepsilon_k f^{(2k)}(b) \geqslant 0$ с данными $\varepsilon_k = \pm 1$ должны быть дополнены неравенством $\varepsilon_k f^{(2k)}(x_{k+1}) \geqslant 0$, когда $\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} > 0$, и существует точка $x = x_{k+1}$, где $f^{(2k+1)}(x) = 0$.

** Замечу, что в статье ([6]) R. Boas установил для тех же функций $f(x) \in Ц(0, 1)$ значительно менее точные неравенства, чем (13) и (13 bis), из которых он, впрочем, также получил, что $\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|f^{(m)}(x)|} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

При этом верхние грани $\frac{1}{L_{m+1}}$ *фактически достигаются, когда*

$$f(x) = \pm \frac{C_{m+1}(x)}{L_{m+1}} \quad \textit{или} \quad \pm \frac{C_{m+1}(1-x)}{L_{m+1}},$$

где $m > 0$,

$$C_{2k}(x) = \frac{(x-E)_{2k}}{2k!}, \quad C_{2k+1}(x) = \frac{(x-E^*)_{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$C_m(1) = 0, \quad E_{2k+1} = E^*_{2k} = 0.$$

Для этого достаточно заметить, что *четная* функция $f(x) \in ЦК(-1, 1)$ является функцией $Ц(0, 1)$ (так как нечетные производные, обращаясь в нуль при $x = 0$, монотонны и, следовательно, также удовлетворяют неравенствам $f^{(s)}(x) f^{(s+2)}(x) \leqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$).

Таким образом, для *четных* $f(x) \in ЦК(-1, 1)$ *справедливы неравенства* (13) и (13 bis), откуда следует, что *степень их* $p \leqslant \frac{\pi}{2}$, *а степень* $f(2x) \in Ц\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *равна* $2p \leqslant \pi$.

Но если $f(x)$ — *любая циклическая конвексная* функция на отрезке длины 2, который можем привести к $(-1, +1)$, то, полагая, что

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \leqslant 1, \tag{14}$$

имеем также

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\varphi(x)| \leqslant 1, \tag{14 bis}$$

где $\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \in Ц(0, 1)$ есть четная функция, и, применяя к $\varphi(x)$ неравенство (13 bis), находим

$$N_{2k} = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|f^{(2k)}(x)\right| \leqslant 2 \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|\varphi^{(2k)}(x)\right| \leqslant \frac{2}{L_{2k+1}} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \frac{\pi^2}{4} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \tag{15}$$

(так как $f^{(2k)}(x) f^{(2k)}(-x) \geqslant 0$).

С другой стороны, вследствие (11), имеем при всех x $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

$$N_{2k-2} \geqslant (x+1) N_{2k-1} - \frac{(x+1)^2}{2} N_{2k},$$

где $N_m = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left|f^{(m)}(x)\right|$ (так как $f^{(2k-2)}(x)$ знакопостоянна), откуда

$$N_{2k-1} \leqslant \frac{N_{2k-2}}{x+1} + \frac{(x+1)}{2} N_{2k} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Поэтому, учитывая, что $L_{2k+1} < 2L_{2k-1}$, вследствие (15), получаем

$$N_{2k-1} \leqslant \sqrt{2N_{2k}N_{2k-2}} \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{L_{2k+1}L_{2k-1}}} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{15 bis}$$

Таким образом, из моих старых неравенств (13), (13 bis) вытекает не только результат R. Boas'а для функций *ЦК*, т. е. удовлетворяющих условию (11), но получается точный порядок верхней грани модулей производных любых функций $f(x) \in ЦК(a, b)$, а именно:

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f^{(m)}(x) \right| = O\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^m, \tag{16}$$

причем пример функции $\sin \frac{\pi x}{b-a} \in ЦК(0, b-a)$ показывает, что порядок (16) не может быть снижен.

4. Для более полного исследования экстремальных свойств функций *ЦК* нужно доказать следующую общую лемму [аналогичную лемме 2 (статьи [7], стр. 390) для функций *Ц*].

ЛЕММА. *Если данная функция $F(x)$ подчинена условию $(-1)^{k_0} F(x) \geqslant 0$, то среди всех функций $f(x)$, удовлетворяющих равенству*

$$f^{(2k_0)}(x) = F(x) \tag{17}$$

и подчиненных для всех $k \leqslant k_0$ неравенствам (11), функция $S(x)$, определенная требованием*

$$S^{(2k)}(a) = S^{(2k)}(b) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1), \tag{18}$$

получит наименьшее значение во всякой точке ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$.

Действительно, совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих равенству (17), определена с точностью до многочлена степени $2k_0 - 1$, содержащего $2k_0$ произвольных коэффициентов, следовательно, функция $S(x)$ существует и определена однозначно. Кроме того, на основании сделанного выше замечания, $S(x)$ удовлетворяет неравенству (11) при всех $k \leqslant k_0$. Предположим сначала, что $k_0 = 1$, тогда $F(x) \leqslant 0$, и если $f(x) \geqslant 0$ удовлетворяет (17), причем хотя бы одно из значений $f(a)$ или $f(b)$ отлично от нуля, то

$$f(x) > S(x) = f(x) - \frac{(b-x) f(a) + (x-a) f(b)}{b-a} \geqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Отсюда следует также, что если $f^{(2k)}(x) - f_1^{(2k)}(x) = \varphi(x)$, где $(-1)^k \varphi(x) \geqslant 0$ для некоторого $k \leqslant k_0$, то наименьшее возможное значение $(-1)^{k-1} f^{(2k-2)}(x)$ в любой точке $(a \leqslant x \leqslant b)$ не может быть меньше наименьшего возможного значения $(-1)^{k-1} f_1^{(2k-2)}(x)$. Таким образом, применяя математическую индукцию, убеждаемся в правильности утверждения леммы при всяком данном $k_0 > 0$.

Следствие 1. *Если*

$$\left| f^{(2k_0)}(x) \right| \geqslant 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \tag{19}$$

то среди функций $f(x) \in ЦК(-1, 1)$ многочлен Эйлера

$$\pm C_{2k_0}(x) = \frac{\pm 1}{(2k_0)!} (x + E)^{2k_0}$$

будет функцией, наименее уклоняющейся от нуля на $[-1, 1]$.

* Если $F(x) \in ЦК(a, b)$, то и $f(x) \in ЦК(a, b)$, и наоборот.

Следовательно, *уклонение от нуля функций* $f(x)$, *удовлетворяющих* (19), *не может быть меньше, чем*

$$L_{2k_0}=\frac{|E_{2k_0}|}{(2k_0)!}=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k_0+1}\sum\frac{(-1)^h}{(2h+1)^{2k_0+1}}\sim\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k_0}.$$

Напротив, *если* $S(x)$ *удовлетворяет равенствам* (18) *и равенству* (17), *где*

$$|F(x)|\leqslant 1\ \ (F(x)\ \text{знакопостоянна}), \tag{20}$$

то функции $S(x)\in ЦK_{2k_0+2}(a, b)$ *удовлетворяют неравенству*

$$|S(x)|\leqslant L_{2k}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2k_0}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^{2k_0}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{(2h+1)^{2k_0+1}}. \tag{21}$$

Мы ввели здесь обобщающий $ЦK$ класс циклически конвексных функций $f(x)\in ЦK_{2t}(a, b)$ *порядка* $2t$, определяемый условиями

$$(-1)^k\left[f^{(2k)}(x+h)-2f^{(2k)}(x)+f^{(2k)}(x-h)\right]\leqslant 0\quad (a\leqslant x-h\leqslant x\leqslant x+h\leqslant b) \tag{11 ter}$$

при всех* $k\leqslant t\leqslant\infty$ ($t=\infty$ соответствует $ЦK$).

Таким образом, *если* $F(x)=f^{(2t-2)}(x)$, *то* $f(x)\in ЦK_{2t}(a, b)$ *тогда и только тогда, когда* $f(x)$ *удовлетворяет* (11) *при* $k<t$ *и* ($(-1)^t F(x)\leqslant 0$)

$$(-1)^t\left[F(x+h)-2F(x)+F(x-h)\right]\geqslant 0. \tag{22}$$

Следствие 2. *Если* $f(x)\in ЦK_{2t}(a, b)$, $t>k_0$, *удовлетворяет* (17), *причем максимум* $|F(x)|$ *достигается в точке* α ($a\leqslant\alpha\leqslant b$) *и*

$$|F(\alpha)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|F(x)|\geqslant 1, \tag{23}$$

то из всех функций $f(x)$ *наименьший абсолютный экстремум будет иметь наименее уклоняющаяся функция* $S(x,\alpha)$ $\left(S^{(2k)}(a,\alpha)=S^{(2k)}(b,a)=0, k\leqslant k_0\right)$, *для которой* $F(x)=S^{(2k_0)}(x,\alpha)$ *представляет собой угол с вершиной* (α, $(-1)^{k_0}$), *опирающийся на ось абсцисс в обоих концах* a *и* b *отрезка* $[a, b]$. (За исключением случая, когда $\alpha=a$ или b, $S(x,\alpha)\in ЦK_{2t}(a, b)$ не принадлежит классу $ЦK$.)

Действительно, все функции $F(x)$, удовлетворяющие (22) и (23) (вместе с условием $(-1)^{k_0}F(x)\geqslant 0$), будучи линиями, вогнутыми по направлению к $[a, b]$, будут отделены от отрезка $[a, b]$ сторонами вышеуказанного угла с вершиной в точке $\left(\alpha, (-1)^{k_0}\right)$.

Весьма вероятно, что, *каков бы ни был порядок* $2k_0$ *заданной производной*, $\max|S(x,\alpha)|$ *будет наименьшим при* $\alpha=a$ (и при $\alpha=b$). Во избежание дополнительных вычислений я ограничусь доказательством этого утверждения в предположении, что k_0 *весьма велико*. Для этого нам понадобится еще одно соотношение:

* Как известно ([8]), в этом случае $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков $n<2t-1$, и существуют конечные производные числа $\overset{+}{f}{}^{(2t-1)}(x)$, $\overset{-}{f}{}^{(2t-1)}(x)$ во всех внутренних точках (и по крайней мере одно из них в каждом из концов a и b).

Пусть $A_{2k_0}(F(x))$ означает *наименьшее уклонение функций* $f(x) \in ЦК_{2k_0+2}(-1, 1)$, *удовлетворяющих* (17) (причем $F(x) \in ЦК_2(-1,1)$ и для определенности $(-1)^{k_0} F(x) \geqslant 0$). В таком случае

$$A_{2k_0}(F(x)) = \left[1 + \frac{\theta}{2^{2k_0}}\right] A_{2k_0}(\Phi_0(x)) \quad \left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right), \tag{24}$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)]$ — четная функция, для краткости полагая, что нечетная функция $\Phi_1(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)]$ знакопостоянна при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

В самом деле, функция $S(x)$, дающая наименьшее уклонение среди всех $f(x)$, удовлетворяющих * (17), обращаясь в нуль при $x = \pm 1$ со всеми производными четных порядков, может быть представлена суммой

$$S(x) = S_0(x) + S_1(x),$$

где

$$S_0^{(2k_0)}(x) = \Phi_0(x), \quad S_1^{(2k_0)}(x) = \Phi_1(x) \text{ и } S_0^{(2m)}(\pm 1) = S_1^{(2m)}(\pm 1) = 0 \ (m < k_0).$$

Тогда $S_0(x)$ есть функция, наименее уклоняющаяся от нуля на $[-1, +1]$ среди функций $f(x) \in ЦК_{2k_0+2}(-1, 1)$, у которых $f^{(2k_0)}(x) = \Phi_0(x)$, между тем как нечетная функция $S_1(x)$, у которой, кроме того, $S_1^{(2m)}(0) = 0$, будет циклически конвексной порядка $2k_0 + 2$ на одном из отрезков $[0,1]$ или $[-1, 0]$ и притом наименее уклоняющейся среди $f(x) \in ЦК_{2k_0+2}$ на этом отрезке. Учитывая, что $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\Phi_1(x)| \leqslant \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\Phi_0(x)| = M$, заключаем из (13 bis), что (так как $\Phi_0(x)$ — четная функция)

$$A_{2k_0}(\Phi_0(x)) \geqslant ML_{2k_0+1}.$$

С другой стороны, применяя к функции $S_1(x)$ неравенство (21), видим, что

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_1(x)| \leqslant \frac{M}{2^{2k_0}} L_{2k_0},$$

откуда следует $\left(\text{так как } S_0(0) = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |S_0(x)|, \ S_1(0) = 0\right)$, что

$$A_{2k_0}(\Phi_0(x)) \leqslant A_{2k_0}(F(x)) \leqslant A_{2k_0}(\Phi_0(x)) \left[1 + \frac{1}{2^{2k_0}} \frac{L_{2k_0}}{L_{2k_0+1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 + \frac{\theta}{2^{2k_0}}\right] A_{2k_0}(\Phi_0(x)), \tag{24 bis}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, благодаря** (24) (полагая для краткости $M = 1$), при доказательстве высказанного выше утверждения вместо функций $S(x, \alpha)$ достаточно рассмотреть их четные части

---

* Нетрудно проверить, что линейный оператор, переводящий $F(x)$ в $S(x)$, представляет k_0-кратную итерацию оператора

$$\frac{1}{2}\left[(x - 1) \int_{-1}^{x} (z + 1) F(z)\, dz + (x + 1) \int_{x}^{1} (z - 1) F(z)\, dz\right].$$

** В последующих формулах буква k_0 везде заменена буквой s.

$$\sigma_{2s} = \sigma_{2k_0}(x, \alpha) = \frac{1}{2}\left[S(x, \alpha) + S(x, -\alpha)\right],$$

соответствующие

$$\Phi_0(x, \alpha) = \frac{\frac{1}{2}(|x-\alpha| + |x+\alpha|) - 1}{\alpha^2 - 1},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, \alpha) &= \frac{1}{\alpha+1} \quad \text{при } |x| < \alpha, \\ \Phi_0(x, \alpha) &= \frac{1-|x|}{1-\alpha^2} \quad \text{при } \alpha \leqslant |x| \leqslant 1 \end{aligned} \tag{25}$$

$\left(\text{в частности, } \Phi_0(x, 1) = \frac{1}{2} \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 1\right)$.

Разлагая $\Phi_0(x, \alpha) = \Phi_0(-x, \alpha)$ в ряд Фурье на $[-1, +1]$, причем для этого мы вправе принять, что вне этого отрезка

$$\Phi_0(2-x, \alpha) = -\Phi_0(x, \alpha)$$

(откуда следует, что $\Phi_0(x, \alpha)$ имеет периодом 4), получим

$$\Phi_0(x, \alpha) = \frac{8}{\pi^2(1-\alpha^2)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2h+1}{2}\pi\alpha \cos\frac{2h+1}{2}\pi x}{(2h+1)^2}. \tag{26}$$

Поэтому $(0 \leqslant \alpha < 1)$

$$\begin{aligned} \sigma_{2s}(x, \alpha) &= \frac{(-1)^s 2}{1-\alpha^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2h+1}{2}\pi\alpha \cos\frac{2h+1}{2}\pi x}{(2h+1)^{2s+2}}, \\ \sigma_{2s}(x, 1) &= (-1)^s \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cos\frac{2h+1}{2}\pi x}{(2h+1)^{2s+1}}. \end{aligned} \tag{27}$$

При этом $(0 \leqslant \alpha < 1)$

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\sigma_{2s}(x, \alpha)| = \\ = \frac{2}{1-\alpha^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cos\frac{2h+1}{2}\pi\alpha}{(2h+1)^{2s+2}} \sim \frac{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+2},$$

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\sigma_{2s}(x, 1)| = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^{2s+1}} = \\ = \frac{1}{2}\left|\frac{E_{2s}}{(2s)!}\right| \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1} < \frac{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+2}. \tag{28}$$

Итак, из (28) следует

ТЕОРЕМА А. *Если* $\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(2s)}(x)| = M$ *и* $f(x) \in ЦК_{2m}(-1, 1)$ $(m > k$, *в частности*, $m = \infty)$, *то из всех этих функций при достаточно*

больших k наименее уклоняются от нуля на $[-1,1]$ многочлены $\pm MP_{2k+1}(\pm x)$ степени $2k+1$, где

$$2P_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{x^{2k}}{2k!} + \cdots \tag{29}$$

определяется условием, что $2P_{2k+1}^{(2k)}(x) = x - 1$ и $P_{2k+1}^{(2n)}(\pm 1) = 0$ для всех n $(0 \leqslant n < k)$. Наименьшее уклонение, равное максимуму этих многочленов, асимптотически равно

$$\frac{M}{2}\left|\frac{E_{2k}}{2k!}\right| \sim M\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}.$$

Следствие 3. *Если $f(x) \in ЦK(-1, 1)$ и $|f(x)| \leqslant 1$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то при весьма больших k имеем асимптотическое неравенство*

$$|f^{(2k)}(x)| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}, \tag{30}$$

которое не может быть улучшено.

Это значение несколько больше, чем значение $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}\frac{\pi}{4}$, которое, согласно формуле (13 bis), соответствует дополнительному требованию, чтобы $f(x) \in ЦK(-1, 1)$ была *четной*. Напротив, мы видим, что *верхняя граница $|f^{(2k)}(x)|$, которую мы получили выше* [см. (15)] *без всяких новых вычислений для всех $k > 0$, отличается лишь множителем $\frac{\pi}{2}$ от асимптотически точного значения верхней грани* (30).

5. В заключение обратим внимание на экстремальные свойства *элементарных тригонометрических функций* как среди функций $Ц$, так и среди функций $ЦK$, которые вытекают, соответственно, из леммы 2 статьи ([7]) и из доказанной выше основной леммы для функций $ЦK$.

Для этого напомню сначала два предложения, доказанные в моей заметке ([8]), которые позднее были получены и некоторыми другими авторами:

I. *Если на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ все четные производные функции $\varphi(x)$ обращаются в нуль только при $x = 0$, а нечетные производные имеют единственным корнем $x = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi(x) = A\sin x$ (на этом отрезке).*

II. *Если четные производные удовлетворяют условиям*

$$\varphi(0) = \varphi^{(2n)}(0) = \varphi(\pi) = \varphi^{(2n)}(\pi) = 0 \tag{31}$$

для всех $n > 0$ и не имеют иных корней на отрезке $[0, \pi]$, то $\varphi(x) = A\sin x$ на $[0, \pi]$.

Из формул (15) и (15 bis) следует, что производные $F^{(k)}(x)$ функции $F(x) \in ЦK(0, \pi)$, удовлетворяющей условию

$$|F(x)| \leqslant 1, \tag{34}$$

должны удовлетворять неравенствам

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |F^{(k)}(x)| \leqslant B$$

где $B > 1$ — не зависящая от k постоянная, которые аналогичны соответствующим неравенствам для производных $f^{(k)}(x)$ функций $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ циклически монотонных на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Поэтому, если $F(x) \in ЦК(0, \pi)$ $\left(\text{или } f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ удовлетворяют, соответственно, условиям

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |F^{(k_n)}(x)| \geqslant M \quad \left(\text{или} \max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}} |f^{(k_n)}(x)| \geqslant M\right), \tag{32}$$

где $\{k_n\}$ — некоторая данная последовательность бесконечно растущих чисел, то можно указать такое $\delta\left(\frac{1}{B} \leqslant \delta \leqslant 1\right)$, что

$$L(M) = \max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |F(x)| \geqslant M\delta \tag{33}$$

(или, соответственно, аналогичное неравенство для $f(x)$), причем существует функция $F(x) \in ЦК(0, \pi)$, для которой $L(M) = M\delta$, т. е. $\underline{\lim}\, L(M) = M\delta$ достигается. Действительно, существует бесконечное множество функций $F(x) \in ЦК(0, \pi)$, удовлетворяющих (32) (такими будут, например, $F(x) = A \sin x + P(x)$, где $P(x) \in ЦК(0, \pi)$ — многочлен степени ниже k_1), для которых $L(M) > M\delta$ сколь угодно близко к $M\delta$. Принимая во внимание равномерную ограниченность всех производных этих функций $F(x)$, можем составить из них последовательность функций, имеющих предельную функцию $F_0(x) \in ЦК(0, \pi)$, удовлетворяющую условиям (32), для которой $L(M) = M\delta$. Но вследствие того, что это значение $M\delta$ не может быть снижено, производные всех четных порядков функции $F_0(x) \in ЦК(0, \pi)$ обращаются в нуль при $x = 0$, $x = \pi$, так как $F_0(x)$ является наименее уклоняющейся при любой заданной своей производной. Следовательно (благодаря (31)), $F_0(x) = \pm M \sin x$, $\delta = 1$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА В. *Из функций* $F(x) \in ЦК(0, \pi)$, *удовлетворяющих* (32), *наименее уклоняется от нуля* $F(x) = \pm M \sin x$. (*Из функций* $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *наименее уклоняется от нуля* $f(x) = \pm M \sin x$ *или* $\pm M \cos x$.)

Эта теорема равнозначна следующей:

Если $F(x) \in ЦК(0, \pi)$ *удовлетворяет* (34), *то*

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |F^{(k)}(x)| \leqslant 1, \tag{35}$$

причем знак равенства имеет место лишь в случае $F(x) = \pm \sin x$.

Действительно, неравенство (35) необходимо и достаточно для того, чтобы $\delta = 1$ в неравенстве (33), причем оба эти неравенства обращаются в равенство в силу вышеупомянутого предложения ([8]) только в случае $F(x) = \pm A \sin x$.

Для циклически *монотонных* функций теорема В доказана в моей статье ([7]) в последней форме (стр. 397).

Возвращаясь к функциям $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, я хочу привести еще третье доказательство (являющееся конструктивным развитием изложенного выше) теоремы B, основанное на решении следующей задачи:

Требуется определить наименьшее уклонение M от нуля на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функций $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющих n условиям:

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}} |f^{(k_i)}(x)| = M_{k_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{32 bis}$$

где $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$, $k_1 \geqslant 1$, и соответствующую *наименее уклоняющуюся функцию* $f_0(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Для того чтобы однозначно определить $f_0(x)$, нужно указать, к которому из 4 типов ($\pm \sin x$, $\pm \cos x$) она должна принадлежать (значение M от этого не зависит); положим для определенности, что $f(x)$ — типа $\sin x$. Тогда $f^{(k_i)}(x)$ достигает экстремума $\pm M_{k_i}$ в нуле при $k_i = 2s + 1$ нечетном, а в случае $k_i = 2s$ в конце $x = \frac{\pi}{2}$ со знаком $(-1)^s$.

Значения M_{k_i} должны быть связаны неравенствами

$$M_{k_i} \geqslant q_{k_j - k_i} M_{k_j} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n), \tag{36}$$

где*

$$q_s = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s L_{s+1} = \frac{8}{\pi^2} H_{s+1} \left(H_{2m} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)^{2m+1}},\ H_{2m+1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^{2m+2}} \right).$$

Положим, например, $n = 3$; тогда функция $f_0(x)$, осуществляющая наименьшее уклонение, будет вида

$$f_0(x) = a_1 R_{k_3}(x) + a_2 R_{k_2}(x) + a_3 R_{k_1}(x), \tag{37}$$

где $R_m(x)$ — многочлен требуемого типа степени $m + 1$, который является функцией $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, наименее уклоняющейся от нуля на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ при условии, что (стр. 8)

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}} |f^{(m)}(x)| = 1,$$

причем коэффициенты a_i, которые определяются равенствами (32 bis), должны быть неотрицательными. Таким образом,

$$a_1 = M_{k_3}, \quad a_1 q_{k_3 - k_2} + a_2 = M_{k_2}, \quad a_1 q_{k_3 - k_1} + a_2 q_{k_2 - k_1} + a_3 = M_{k_1},$$

откуда $a_2 = M_{k_2} - M_{k_3} q_{k_3 - k_2} \geqslant 0$ (первое из неравенств (36)), и для того чтобы иметь также

$$a_3 = M_{k_1} - (M_{k_2} - M_{k_3} q_{k_3 - k_2}) q_{k_2 - k_1} - M_{k_3} q_{k_3 - k_1} \geqslant 0, \tag{38}$$

---

* $\frac{2}{\pi} < q_1 < q_3 < \ldots < \frac{8}{\pi^2} < \ldots < q_2 < \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{83}{81}$ [см. (7), стр. 390].

необходимо, чтобы M_{k_1} удовлетворяло также неравенству* (38): в таком случае формула (37) дает искомую функцию**, и наименьшее уклонение равно

$$M = \max |f_0(x)| = a_1 q_{k_1} + a_2 q_{k_2} + a_3 q_{k_3}. \tag{39}$$

Тот же процесс при любом n приведет последовательно к установлению всех $n-1$ необходимых (и достаточных) условий для совместности значений M_{k_i} в (32 bis), и в случае их совместности дает решение задачи.

В частности, значения $M_{k_i} = 1$ *совместны при любых данных* k_i, как видно из существования функции $\sin x$. Найдем в этом случае асимптотическое наименьшее значение $M^{(n)} \sim M$ при данном *конечном* числе n условий (32 bis), когда k_1 и $k_{i+1} - k_i$ *неограниченно возрастают*, так что при любых $i < j \leqslant n$ имеем $\lim q_{k_j - k_i} = \frac{8}{\pi^2} = c$. Таким образом, при $n = 3$, согласно (39), получим тогда

$$M^{(3)} = c(a_1 + a_2 + a_3) = c[1 + (1-c) + (1-c)^2] = 1 - (1-c)^3 \tag{39 bis}$$

и, вообще, $M^{(n)} = 1 - (1-c)^n$, следовательно, $\lim\limits_{n=\infty} M^{(n)} = 1$. Отсюда, как и раньше, получаем теорему В. Укажем еще вытекающее из теоремы В

Следствие. *Если* $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *то на отрезке* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *всегда существует*

$$\lim_{n=\infty} \max |f^{(n)}(x)| = M < \infty$$

и

$$f(x) = \pm M \sin x + \varphi(x) \quad \text{или} \quad f(x) = \pm M \cos x + \varphi(x),$$

где $\lim\limits_{n=\infty} \varphi^{(n)}(x) = 0$ *(аналогичное утверждение для* $F(x) \in ЦК(0, \pi)$*) на соответствующем отрезке.*

Поступило
31.X.1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Sur les fonctions régulièrement monotones, Atti del Congresso Internaz. dei Matem., Bologna, t.II (1928), 267—275.

[2] Бернштейн С. Н., О некоторых свойствах регулярно монотонных функций, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, сер. 4, т. 2 (1928), 1—11.

[3] Бернштейн С. Н., Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926.

[4] Бернштейн С. Н., Sur les fonctions absolument monotones, Acta math., t. 52 (1928), 1—66.

[5] Стрэтт (лорд Рэлей), Теория звука, т. 1, М.—Л., 1946.

[6] Boas R., A note of functions of exponential type, Bull. of the Amer. Mathem. Soc., t. 47 (1941), 750—754.

[7] Бернштейн С. Н., О некоторых свойствах циклически монотонных функций, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 381—404.

[8] Бернштейн С. Н., Sur un théorème de M. Gontcharoff, Сообщения Харьковского мат. об-ва, сер. 4, т. 2 (1928), 73—74.

---

* Из первого неравенства (36) вместе с (38) вытекают оба остающиеся (при $n = 3$) неравенства (36).

** Следует заметить, что наименьшим будет не только $\max |f_0(x)|$, но и значение $|f_0(x)|$ в любой данной точке $x\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 17–22

Д. К. ФАДДЕЕВ

К ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ В ГРУППАХ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

Целью работы является доказательство теоремы, устанавливающей связь между группами гомологий в группе и в ее подгруппе.

1°. Определения, обозначения, цель. $\mathfrak{A}$ — аддитивно записанная абелева группа. $\mathfrak{G}$ — произвольная группа, записанная мультипликативно. Элементы группы $\mathfrak{G}$ обозначаются через $x, x_1, \ldots$, а также через $z, z_1, \ldots$ Элементам $\mathfrak{G}$ сопоставляются операторы в $\mathfrak{A}$, т. е. для любых $x \in \mathfrak{G}$, $a \in \mathfrak{A}$ определено $a^x \in \mathfrak{A}$ так, что

$$(a_1 + a_2)^x = a_1^x + a_2^x, \quad a^1 = a, \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}.$$

n-мерной цепью F группы $\mathfrak{G}$ в группу $\mathfrak{A}$ называется функция от n переменных, аргументами которой являются элементы группы $\mathfrak{G}$, а значениями $F_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ — элементы $\mathfrak{A}$.

Нульмерными цепями являются сами элементы $\mathfrak{A}$. n-мерные цепи образуют группу $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ относительно сложения, определенного естественным образом.

Через δ обозначается оператор, гомоморфно отображающий группу $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ в $C^{n+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ посредством равенства

$$(\delta F)_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}} = F_{x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i F_{x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}} + (-1)^{n+1} F^{x_{n+1}}_{x_1, x_2, \ldots, x_n}.$$

Можно убедиться, что $\delta\delta F = 0$.

Цепи F, для которых $\delta F = 0$, называются *циклами*. n-мерные циклы $(n \geqslant 0)$ образуют группу $Z^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$. Цепи F, допускающие представление $F = \delta F'$, называются границами. n-мерные границы $(n \geqslant 1)$ образуют группу $B^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$.

Понятие нульмерной границы не определяется В силу того что $\delta\delta F = 0$, всякая граница есть цикл, т. е.

$$B^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \subset Z^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}).$$

Группа $H^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = Z^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) / B^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ называется n-мерной группой гомологий $(n \geqslant 1)$ $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{A}$ [см. ([1]) и ([2])].

Далее, $\mathfrak{H}$ — подгруппа $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \sum \rho = \sum \mathfrak{H}\bar{\rho}$, — левое разложение $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$, ρ — классы смежности, $\bar{\rho}$ — фиксированный набор представителей из клас-

сов смежности. Класс смежности, совпадающий с $\mathfrak{H}$, обозначаем через ρ_0, $\bar\rho_0 = 1$. Элементы $\bar\rho^{-1}$ образуют, очевидно, полный набор представителей в правом разложении $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G} = \sum \bar\rho^{-1}\mathfrak{H}$. [Элементы $\mathfrak{H}$ обозначаются через y, y_1, ... Через $\mathfrak{i}$ обозначается группа функций f, определенных на классах смежности ρ со значениями в $\mathfrak{A}$. Сложение в $\mathfrak{i}$ определяется естественным образом. В группе $\mathfrak{i}$ вводятся операторы из $\mathfrak{G}$, согласно формуле

$$f^x(\rho) = [f(\rho x^{-1})]^x.$$

Необходимость рассмотрения такой группы возникает во многих задачах алгебры.

Целью заметки является установление следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 1.

$$H^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{i}) \approx H^n_\delta(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}).$$

Изоморфизм осуществляется оператором ограничения η, отображающим $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{i})$ в $C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{A})$, по формуле

$$(\eta F)_{y_1, y_2, \ldots, y_n} = F_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(\rho_0). \tag{1}$$

Эта теорема существенно обобщает теорему 2 работы ([2]). Доказательство ее не очень просто и требует вспомогательных рассуждений, представляющих содержание дальнейших пунктов работы.

2°. $\mathfrak{H}$-однородные цепи. Цепь Φ группы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{H}$-однородной, если

$$\Phi_{z_1 y, z_2 y, \ldots, z_n y} = \Phi^y_{z_1, z_2, \ldots, z_n}$$

при любом $y \in \mathfrak{H}$. n-мерные $\mathfrak{H}$-однородные цепи $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{A}$ образуют группу $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$.

Каждой цепи $F \in C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{i})$ сопоставим $(n+1)$-мерную цепь $\Phi = \Lambda F$ по формуле

$$\Phi_{z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}} = [F_{z_1 z_2^{-1}, z_2 z_3^{-1}, \ldots, z_n z_{n+1}^{-1}}(\rho_0 z_{n+1}^{-1})]^{z_{n+1}}. \tag{2}$$

Φ есть $\mathfrak{H}$-однородная цепь, что легко проверяется.

Для любой $\mathfrak{H}$-однородной цепи Φ найдется одна и только одна цепь F группы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{i}$ такая, что $\Phi = \Lambda F$. Именно,

$$F_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(\rho) = \Phi^{\bar\rho}_{x_1, x_2, \ldots, x_n \bar\rho^{-1}, \ldots, x_n \bar\rho^{-1}, \bar\rho^{-1}}. \tag{3}$$

Равенство (3) следует из равенства (2) посредством подстановки

$$z_1 z_2^{-1} = x_2, \ldots, z_n z_{n+1}^{-1} = x_n; \quad \rho = \rho_0 z_{n+1}^{-1}.$$

Однородность Φ обеспечивает однозначную определенность F, независимо от выбора системы представителей $\bar\rho$. Очевидно, что

$$\Lambda(F_1 + F_2) = \Lambda F_1 + \Lambda F_2.$$

Следовательно, Λ определяет изоморфное отображение группы $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{i})$ на группу $C^{n+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$. При этом отображении оператору δ соответ-

ствует оператор $\nabla = \Lambda\delta\Lambda^{-1}$. Оператор ∇ действует на $\mathfrak{H}$-однородную цепь Φ по формуле:

$$(\nabla\Phi)_{z_1, \ldots, z_{n+1}} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \Phi_{z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_{n+1}}.$$

Действительно,

$$(\nabla\Phi)_{z_1, \ldots, z_{n+1}} = [(\delta F)_{z_1 z_2^{-1}, \ldots, z_n z_{n+1}^{-1}} (\rho_0 z_{n+1}^{-1})]^{z_{n+1}} =$$

$$= [F_{z_2 z_3^{-1}, \ldots, z_n z_{n+1}^{-1}} (\rho_0 z_{n+1}^{-1})]^{z_{n+1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [F_{z_1 z_2^{-1}, \ldots, z_i z_{i+2}^{-1}, \ldots, z_n z_{n+1}^{-1}} (\rho_0 z_{n+1}^{-1})]^{z_{n+1}} +$$

$$+ (-1)^n [F_{z_1 z_2^{-1}, \ldots, z_{n-1} z_n^{-1}} (\rho_0 z_{n+1}^{-1} z_{n+1} z_n^{-1})]^{z_n z_{n+1}^{-1} z_{n+1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \Phi_{z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_{n+1}}.$$

При отображении Λ группы $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{i})$ на $C^{n+1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ группа циклов $Z^u_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{i})$ $(n \geqslant 0)$ отображается на группу $Z^{n+1}_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ $\mathfrak{H}$-однородных ∇-циклов, т. е. цепей Φ, для которых $\nabla\Phi = 0$. Группа границ $B^n_\delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{i})$ $(n \geqslant 1)$ отображается на группу $B^{n+1}_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ $\mathfrak{H}$-однородных ∇-границ, т. е. цепей Φ, допускающих представление $\Phi = \nabla\Phi'$, где Φ' есть $\mathfrak{H}$-однородная цепь. Таким образом, изучение групп гомологий $H^n_\delta(\mathfrak{G}, \mathfrak{i})$ сводится к изучению изоморфных групп гомологий

$$H^{n+1}_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}) = Z^{n+1}_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}) / B^{n+1}_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}).$$

Оператору ограничения λ соответствует в $\mathfrak{H}$-однородных цепях оператор ограничения $I = \Lambda\lambda\Lambda^{-1}$ В силу (1) и (2) очевидно, что I отображает $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ в $C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ по формуле

$$(I\Phi)_{y_1, \ldots, y_n} = \Phi_{y_1, \ldots, y_n}.$$

3^0. Гомологии в группу функций на $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{b}$ есть группа функций, определенных на $\mathfrak{H}$ со значениями в $\mathfrak{A}$. Вводим в $\mathfrak{b}$ операторы из $\mathfrak{H}$ по правилу

$$f^{y_1}(y) = [f(yy_1^{-1})]^{y_1}.$$

ТЕОРЕМА. *Для* $n \geqslant 2$

$$H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$. Положим

$$\Psi_{z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}}(y) = \Phi_{y, z_1, \ldots, z_{n-1}}(y).$$

Тогда

$$\Psi_{z_1 y_1, z_2 y_2, \ldots, z_{n-1} y_1}(y) = \Phi_{y, z_1 y_1, \ldots, z_{n-1} y_1}(y) =$$

$$= \Phi^{y_1}_{yy_1^{-1}, z_1, \ldots, z_{n-1}}(y) = [\Phi_{yy_1^{-1}, z_1, \ldots, z_{n-1}}(yy_1^{-1})]^{y_1} =$$

$$= [\Psi_{z_1, \ldots, z_{n-1}}(yy_1^{-1})]^{y_1} = \Psi^{y_1}_{z_1, \ldots, z_{n-1}}(y),$$

т. е. $\Psi \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$.

Далее, так как $\nabla\Phi = 0$, то

$$\Phi_{z_1, z_2, \ldots, z_n}(y) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \Phi_{y, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n}(y) = 0,$$

т. е.

$$\Phi_{z_1, z_2, \ldots, z_n}(y) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \Psi_{z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n}(y),$$

откуда

$$\Phi = \nabla\Psi, \quad \Phi \in B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}),$$

что и требовалось доказать.

4°. Операторы ограничения и продолжения. Введенный выше оператор ограничения I для $\mathfrak{H}$-однородных цепей, очевидно, перестановочен с ∇, так что I отображает циклы в циклы, границы в границы. Покажем, что любая цепь $\Psi \in C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ может быть получена из некоторой цепи $\Phi \in C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ применением I. С этой целью построим $\Phi = E\Psi$ по формуле

$$\Phi_{z_1, z_2, \ldots, z_n} = \Psi_{\overline{\rho_0 z_1^{-1}} z_1, \ldots, \overline{\rho_0 z_n^{-1}} z_n}. \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) имеет смысл, ибо

$$\overline{\rho_0 z_i^{-1}}\, z_i \in \mathfrak{H} z_i^{-1} z_i = \mathfrak{H}.$$

Цепь Φ $\mathfrak{H}$-однородна, ибо

$$\Phi_{z_1 y, z_2 y, \ldots, z_n y} = \Psi_{\overline{\rho_0 y^{-1} z_1^{-1}}\, z_1 y, \ldots, \overline{\rho_0 y^{-1} z_n^{-1}}\, z_n y} =$$

$$= \Psi_{\overline{\rho_0 z_1^{-1}}\, z_1, \ldots, \overline{\rho_0 z_n^{-1}}\, z_n} = \Phi^y_{z_1, \ldots, z_n}.$$

Наконец,

$$(I\Phi)_{y_1, \ldots, y_n} = \Phi_{y_1, \ldots, y_n} = \Psi_{\overline{\rho_0 y_1}, \ldots, \overline{\rho_0 y_n}} = \Psi_{y_1, \ldots, y_n},$$

т. е. $I\Phi = \Psi$. Следовательно, I отображает $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ на $C^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ и, в силу перестановочности с ∇, $B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ на $B^n_\nabla(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$.

Далее, легко видеть, что $E\nabla = \nabla E$, откуда следует, что и $Z^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ отображается посредством I на $Z^n_\nabla(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$.

5°. Проектирование цепей. Пусть $\mathfrak{b}$ есть $\mathfrak{H}$-операторная абелева группа, $\mathfrak{A}$ — ее допустимая подгруппа, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}/\mathfrak{A}$. Естественный гомоморфизм P группы $\mathfrak{b}$ на $\mathfrak{b}_1$ распространяется на цепи из $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ по формуле:

$$(P\Phi)_{z_1, \ldots, z_n} = P\Phi_{z_1 \ldots, z_n}.$$

Оператор «проектирования» P гомоморфно отображает $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ в $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$. Очевидно, что $P\nabla = \nabla P$, так что P отображает $Z^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ в $Z^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$ и $B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ в $B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$.

Покажем, что любая цепь $\Psi \in C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$ получается из некоторой цепи $\Phi \in C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ посредством проектирования. С этой целью положим

$\Phi_{z_1, \ldots, z_{n-1}, \bar{\rho}^{-1}}$ равным какому-либо элементу из класса смежности $\Psi_{z_1, \ldots, z_{n-1}, \bar{\rho}^{-1}}$ группы $\mathfrak{b}$ по $\mathfrak{A}$, а на остальные значения $z_1, \ldots, z_n$ распространим Φ, исходя из требования однородности. Очевидно, что $\Psi = P\Phi$.

Следовательно, P отображает $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ на $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$ и, в силу $P\nabla = \nabla P$, $B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ на $B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$. При проектировании группы Z^n_∇ «отображение на», вообще говоря, не имеет места.

6°. Доказательство теоремы 1. В силу соответствия между $C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{i})$ и $C^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$, установленного в $n°2$, теорема 1 равносильна следующей теореме:

ТЕОРЕМА 3. *Оператор ограничения I определяет изоморфное отображение $H^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ на $H^n_\nabla(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$.*

Доказательство. В $n°4$ установлено, что I гомоморфно отображает $Z^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ на $Z^n_\nabla(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$, $B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ на $B^n_\nabla(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$. Остается установить, что ядро этого гомоморфизма входит в $B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$, т. е., что если $\Phi \in Z^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ и $I\Phi = 0$, то $\Phi \in B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A})$. Доказательство будем строить по индукции. Для $n = 2$, если $\Phi \in Z^2_\nabla$, то

$$\Phi_{z_1, z_2} = \Phi_{1, z_2} - \Phi_{1, z_1} = \Psi_{z_2} - \Psi_{z_1}.$$

Покажем, что $\Phi_{1, z} = \Psi_z$ $\mathfrak{H}$-однородна, если $I\Phi = 0$. Действительно,

$$\Psi_{zy} = \Phi_{1, zy} = \Phi^y_{y^{-1}, z} z) = \Phi^y_{1, z} - \Phi^y_{1, y^{-1}} = \Phi^y_{1, z} = \Psi^y_z.$$

Итак, $\Phi = \nabla\Psi$, где Ψ — $\mathfrak{H}$-однородная цепь. Допустим теперь, что $n \geqslant 3$ и для $n - 1$-мерных циклов теорема доказана при любой группе $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{b}$ есть группа функций на $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}_1$ — подгруппа константных функций f_a со значениями $f_a(y) = a$.

Очевидно, что $\mathfrak{A}_1$ операторно изоморфна $\mathfrak{A}$, и потому достаточно провести доказательство для группы $\mathfrak{A}_1$.

Пусть $\Phi \in Z^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}_1)$ и $I\Phi = 0$. Так как $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{b}$, а

$$Z^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}) = B^n_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}),$$

то $\Phi = \nabla\Psi$ при $\Psi \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$. Применяя I, получим $\nabla(I\Psi) = 0$, т. е.

$$I\Psi \in Z^{n-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}).$$

Но

$$Z^{n-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}) = B^{n-1}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}).$$

Следовательно, $I\Psi = \nabla\Omega$, где $\Omega \in C^{n-2}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$. Положим $\Omega = I\Omega'$, где

$$\Omega' = E\Omega \in C^{n-2}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}),$$

и рассмотрим $\Psi' = \Psi - \Delta\Omega'$ Тогда $\Delta\Psi' = \nabla\Psi = \Phi$ и $I\Psi' = I\Psi - \nabla\Omega = 0$.

Теперь спроектируем все это в группу $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}/\mathfrak{A}_1$. $\nabla P\Psi' = P\Phi = 0$; следовательно, $P\Psi' \in Z^{n-1}_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$.

Далее, $IP\Psi' = PI\Psi' = 0$. В силу индукционного предположения, $P\Psi' \in B^{n-1}_\nabla(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$ и $P\Psi' = \nabla\Pi$ при $\Pi \in C^{n-2}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b}_1)$. Для цепи Π найдется цепь $\Pi' \in C^{n-2}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{b})$ такая, что $\Pi = P\Pi'$.

Положим $\Psi'' = \Psi' - \nabla\Pi'$. Тогда

$$\nabla\Psi'' = \nabla\Psi' = \Phi \quad \text{и} \quad P\Psi'' = P\Psi' - \nabla\Pi = 0.$$

Следовательно, $\Psi'' \in C^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}_1)$ и $\Phi \in B^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}_1)$, что и требовалось доказать.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило
14.IX.1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Eilenberg S. and MacLane S., Cohomology theory in abstract groups, Ann. of Math., vol. 48 (1947), 51—78.
[2] Фаддеев Д. К., О фактор-системах в абелевых группах с операторами, Доклады Ак. Наук СССР, 58 (1947), 361—363.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 23—58

И. Н. САНОВ

УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ С ПЕРИОДОМ ПРОСТЫМ ЧИСЛОМ И КОЛЬЦАМИ ЛИ *

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе изучается кольцо Ли, сопоставимое периодической группе с периодом простым числом.

Получена серия соотношений вышеуказанного кольца.

Результаты применяются к изучению периодических групп с периодами 3 и 5 (в последнем случае при двух образующих).

В работах Магнуса (1) и (3) устанавливается связь теории групп, в частности свободных групп, с теорией колец Ли. Каждой группе $\mathfrak{G}$ можно сопоставить кольцо Ли $\mathfrak{L}$ таким образом, чтобы абелева группа $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i+1}$ была изоморфна аддитивной группе $\mathfrak{L}^i/\mathfrak{L}^{i+1}$. Здесь $\mathfrak{G}_i$ — i-й член убывающего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{L}^i$ — идеал $\mathfrak{L}$, состоящий из всех линейных комбинаций с целыми коэффициентами всевозможных произведений в кольце Ли

$$(\ldots((a_1 \circ a_2)\circ a_3)\circ\ldots)\circ a_i,$$

где $a_k \in \mathfrak{L}$ $(k = 1,2,\ldots, i)$ и $\circ$ обозначает операцию умножения в кольце Ли $\mathfrak{L}$.

Цель настоящей статьи — исследование характера этой связи для периодических групп с периодом p — простым числом.

Метод настоящей работы позволяет получить естественным путем соотношение, найденное Цассенхаузом (4), и еще ряд результатов, показывая в частности ошибочность того утверждения Грюна (5), что в

* Эта статья является подробным изложением содержания доклада, прочитанного на семинаре Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР в 1948 г. Реферат его опубликован в Успехах математических наук, т. 4, № 3 (31) за 1949 г., стр. 180. В Annals of Math., т. 52, № 1 за 1950 г., стр. 111—126 было опубликовано исследование W. Magnus, A connection between the Baker - Hausdorff formula and a problêm of Burnside, имеющее некоторые общие результаты с результатами, приводимыми в докладе.

Однако, несмотря на то, что исследование Магнуса было опубликовано позже, оно не перекрывает основного результата, содержащегося в докладе, именно, теорему 6 § 2 настоящей работы.

Последний результат позволяет несколько продвинуть изучение периодических групп с периодом p, в частности, опровергнуть для периодических групп с периодом 5 и двумя образующими некоторые результаты Грюна (5) и Холла. Кроме того, доказательство в предлагаемой работе проводится одним методом, без привлечения сложно выводимого тождества Холла (19). Поэтому и печатается настоящая статья.

периодической группе $\mathfrak{G}$ с периодом 5 и двумя образующими $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i+1}$ для $i = 7, 8, \ldots$, а также вытекающего отсюда решения ослабленной гипотезы Бернсайда для этого случая.

Пусть $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_k$ — элементы группы $\mathfrak{G}$; обозначим

$$(a, b) = aba^{-1}b^{-1},$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}), a_k) \qquad (k = 3, 4, \ldots),$$
$$(a, b, k) = (a, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{k \text{ раз}}).$$

Тогда соотношение Цассенхауза состоит в следующем:

Во всякой периодической группе $\mathfrak{G}$ с периодом p — простым числом для любых двух ее элементов a и b выполнено включение:

$$(a, b, p-1) \in \mathfrak{G}_{p+1}, \tag{1}$$

хотя в непериодических группах (в частности в свободных) это соотношение может и не выполняться, а выполнено лишь включение:

$$(a, b, p-1) \in \mathfrak{G}_p. \tag{2}$$

§ 1. Введение

В этом разделе мы сведем воедино ряд понятий, на основании которых строится исследование.

Основным аппаратом в дальнейшем будет являться аппарат колец Ли.

Кольцом Ли, как известно, называется модуль, в котором введена дистрибутивная операция умножения $\circ$, сопоставляющая любым двум элементам модуля a и b снова элемент модуля $a \circ b$, причем выполнены следующие правила: для любых трех элементов модуля a, b, c всегда

$$\left.\begin{aligned} a \circ b &= -b \circ a, \\ (a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a &+ (c \circ a) \circ b = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Свободным кольцом Ли $\mathfrak{L}$ с образующими $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называется модуль, состоящий из всевозможных конечных сумм и разностей элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и произведений их в конечном числе и в любом порядке при помощи последовательно формально применяемой операции $\circ$, причем две такие суммы будут считаться равными тогда и только тогда, когда от одной из них к другой можно перейти конечной цепочкой операций, каждая из которых представляет или однократное применение дистрибутивного закона, или однократное применение одного из равенств (3), или однократное тождественное преобразование в аддитивной группе.

На основании дистрибутивного закона, определяем произведение операцией $\circ$ любых двух таких сумм.

Известно [например, ([6])], что каждое произведение k множителей $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}$ при помощи последовательного применения операции $\circ$ при любой расстановке скобок можно выразить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами произведений такого типа:

$$(\ldots((y_{j_1} \circ y_{j_2}) \circ y_{j_3}) \circ \ldots) \circ y_{j_k}. \tag{4}$$

Например,

$$(y_1 \circ y_2) \circ (y_2 \circ y_3) = ((y_1 \circ y_2) \circ y_2) \circ y_3 - ((y_1 \circ y_2) \circ y_3) \circ y_2.$$

Произведения типа (4) будем называть правонормированными произведениями Ли степени k и обозначать через

$$[y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_k}]. \tag{5}$$

Иногда мы будем применять сокращения: например, $[xy^3x^2y]$ для правонормированного произведения $[xyyyxxy]$ и аналогичные в подобных случаях.

Любой элемент P свободного кольца Ли $\mathfrak{L}$, порожденного элементами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, будем называть полиномом Ли или просто полиномом от $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Если полином P_k состоит лишь из линейной комбинации правонормированных произведений k-й степени, то будем называть полином P_k однородным степени k.

Произведение двух однородных полиномов степени k и m, $P_k \circ Q_m$, как нетрудно заметить, будет тоже однородным полиномом степени $k+m$ (или нулем).

Все однородные полиномы данной степени q образуют аддитивную абелеву группу (модуль) без кручения с конечным числом образующих (элементов базиса модуля). Для ранга $\psi_q(n)$ модуля всех полиномов Ли степени q Виттом [7] получена следующая формула:

$$\psi_q(n) = \frac{1}{q} \sum_{s/q} \mu(s) n^{\frac{q}{s}}, \tag{6}$$

где $\mu(s)$ — функция Мебиуса.

Пусть $\mathfrak{A}$ — свободное ассоциативное кольцо, порожденное свободными производящими элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и пусть a и b — любые два элемента из $\mathfrak{A}$.

Определим операцию $\circ$ для любых двух элементов a и b из $\mathfrak{A}$ следующим образом:

$$a \circ b = ab - ba, \tag{7}$$

где ab и ba — произведения в ассоциативном кольце $\mathfrak{A}$.

Нетрудно проверить, что операция $\circ$, определенная посредством (7), дистрибутивна и удовлетворяет равенствам (3). Таким образом, операция умножения Ли может быть реализована в ассоциативном кольце посредством определения (7). Подмодуль $\mathfrak{L}_1$ кольца $\mathfrak{A}$, порожденный $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и всеми их конечными произведениями при помощи операции $\circ$, определенной в (7), будет, очевидно, являться кольцом Ли. Мы получили представление свободного кольца Ли с n образующими в ассоциативном кольце $\mathfrak{A}$.

Магнусом [2] и Виттом [7] доказана важная

ТЕОРЕМА 1. *Кольцо Ли* $\mathfrak{L}_1$ *с операцией умножения* (7) *является свободным кольцом со свободными образующими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Таким образом, рассматриваемое представление точное (изоморфное).*

В нашем дальнейшем исследовании всегда будут встречаться кольца Ли, представленные в ассоциативном кольце. Полиномы Ли будут являться частным случаем некоммутативных полиномов в ассоциативном кольце.

Пусть в кольце Ли, представленном в ассоциативном кольце, будет

$$a = [u_1 u_2 \ldots u_k] = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_k} u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k},$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ пробегает все перестановки чисел 1, 2, ..., k, а $\alpha_{i_1, \ldots, i_n}$ — целые числа.

Тогда имеем два правила действия, которыми постоянно пользуемся при вычислениях:

$$[v_1 v_2 \ldots v_{j-1} a v_{j+1} \ldots v_m] = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} \alpha_{i_1, i_2, \ldots i_k} [v_1 v_2 \ldots v_{j-1} u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k} \ldots v_m] \tag{8}$$

при $j \geqslant 2$, $m \geqslant j$ [см. ([6])] и

$$k[u_1, u_2, \ldots, u_k] = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} \alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_k} [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}] \tag{9}$$

[см. ([8])]

Если для кольца Ли ввести в качестве области операторов поле рациональных чисел R так, чтобы получилась алгебра над этим полем, то эта алгебра Ли также представляется в ассоциативной алгебре при помощи операции (7).

Полиномы теперь будут рассматриваться с рациональными коэффициентами. Формула Витта (6) для ранга модуля однородных полиномов Ли степени q сохраняется.

Из результатов работ Магнуса ([2]) и Витта ([7]) вытекает важная

ЛЕММА 1. *Если ассоциативный полином P от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с целыми коэффициентами входит в алгебру Ли над полем рациональных чисел, порожденную $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в ассоциативном кольце посредством операций сложения, вычитания и умножения $\circ$, определенного в* (7), *то полином P может быть представлен в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами правонормированных произведений Ли некоторых наборов элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Для дальнейшего потребуется фактически найти базисы модулей L^i однородных полиномов Ли степени i в алгебре Ли над полем рациональных чисел $\mathfrak{L}$ с двумя образующими x и y до 7-й степени включительно:

1) Базис модуля полиномов степени 1 будет, очевидно, x, y.

2) Базис модуля полиномов степени 2 будет

$$[x, y] \quad ([yx] = -[xy]);$$

ранг модуля равен 1.

3) Базис модуля полиномов степени 3 будет

$$[xy^2], \quad [yx^2] \quad ([xyx] = -[yx^2]);$$

ранг модуля равен 2.

4) Базис модуля полиномов степени 4 будет

$$[xy^3], \quad [xy^2x], \quad [yx^3];$$

ранг модуля равен 3, так как

$$\psi_4(2) = \frac{1}{4}\sum_{s/4}\mu(s)\,2^{\frac{4}{s}} = \frac{1}{4}(16-4) = 3.$$

Действительно, имеем соотношение

$$[yx^2y] = -[xy^2x], \tag{A}$$

которое получаем, применяя к $[[yx]xy]$ тождество Якоби

$$[[yx]xy] = -[xy[yx]] - [y[yx]x].$$

Здесь в правой части первое слагаемое равно нулю, вследствие того, что в кольцах Ли $a \circ a = 0$, а второе слагаемое равно

$$[[yx]yx] = -[xy^2x].$$

5) Базисные полиномы 5-й степени получаются домножением базисных полиномов 4-й степени справа на $\circ\, x$ и $\circ\, y$. Так как

$$\psi_5(2) = \frac{1}{5}(2^5-2) = 6,$$

то среди них нет линейно зависимых. Итак, базис L_5 будет:

$$[xy^4],\quad [xy^3x],\quad [xy^2xy],\quad [yx^2yx],\quad [yx^3y],\quad [yx^4].$$

Здесь еще произведена замена $[xy^2x^2] = -[yx^2yx]$, на основании соотношения (A).

6) Умножив базисные полиномы 5-й степени снова на $\circ x$ и на $\circ y$, получим полиномы

$$[xy^5],\ [xy^4x],\ [xy^3xy],\ [xy^2xy^2],\ [xy^3x^2],\ [xy^2xyx],\ [yx^2yxy],$$
$$[yx^3y^2],\ [yx^2yx^2],\ [yx^3yx],\ [yx^4y],\ [yx^5].$$

Подсчитывая ранг $\psi_6(2) = \frac{1}{6}(2^6 - 2^3 - 2^2 + 2) = 9$, мы видим, что здесь должны быть три (тождественных в кольцах Ли) соотношения. И, действительно, имеем

$$\begin{aligned} 2[xy^3xy] &= [xy^4x] + x[y^2xy^2], \\ 2[yx^3yx] &= [yx^4y] + [yx^2yx^2], \\ [xy^3x^2] + [yx^3y^2] &= 3[xy^2xyx] + 3[yx^2yxy]. \end{aligned} \tag{B}$$

Первые два — следствия тождеств

$$[yx^2[yx^2]] = 0, \qquad [xy^2[xy^2]] = 0.$$

Третье — следствие тождества

$$[yxyxyx] = -[x[yxyxy]].$$

Эти следствия мы получим, если разложим скобки внутри внешних скобок и применим правило (8). Если модуль L_6 рассматривать как модуль над полем рациональных чисел, то за базис можно, очевидно, взять: $[xy^5]$, $[xy^2xy^2]$, $[xy^4x]$, $[xy^2xyx]$, $[yx^2yxy]$, $[xy^3x^2]$, $[yx^4y]$, $[yx^2yx^2]$, $[yx^5]$.

Остальные одночлены (правонормированные произведения Ли из x и y) 6-й степени выражаются через эти базисные одночлены при помощи соотношений в кольце Ли, в частности, тождеств (A) и (B).

7) Для полиномов 7-й степени имеем: $\psi_7(2) = \frac{1}{7}(2^7 - 2) = 18$. Число одночленов в базисе в два раза больше, чем в базисе модуля многочленов 6-й степени. Поэтому все одночлены, получающиеся из базисных многочленов 6-й степени домножением на $\circ x$ и $\circ y$, линейно независимы и базис состоит из 18 одночленов:

$$[xy^6],$$
$$[xy^5x],\ [xy^2xy^3],\ [xy^4xy],$$
$$[xy^2xy^2x],\ [xy^4x^2],\ [xy^2xyxy],\ [yx^2yx^2y],\ [yx^3y^3],$$
$$[xy^2xyx^2],\ [yx^2yx^2],\ [xy^3x^3],\ [yx^2yxyx],\ [yx^4y^2],$$
$$[yx^4yx],\ [yx^2yx^3],\ [yx^5y],$$
$$[yx^6].$$

При домножении получатся $[xy^3x^2y]$ и $[yx^3y^2x]$, но мы исключаем их при помощи соотношений, являющихся следствиями тождеств (B):

$$\begin{aligned} [xy^3x^2y] + [yx^3y^3] &= 3\,[xy^2xyxy] + 3\,[yx^2yxy^2], \\ [yx^3y^2x] + [xy^3x^3] &= 3\,[yx^2yxyx] + 3\,[xy^3xyx^2]. \end{aligned} \tag{C}$$

В исследовании групп мы будем применять представление элементов групп формальными степенными рядами от некоммутативных переменных. Именно, пусть $\mathfrak{A}$ будет свободная ассоциативная алгебра над полем рациональных чисел, порожденная свободными производящими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с внешним образом присоединенной единицей.

Любой элемент $a \in \mathfrak{A}$ имеет вид

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \tag{10}$$

где a_i — однородный полином степени i, a_0 — рациональное число.

В $\mathfrak{A}$ можно ввести норму элемента следующим образом. Если для элемента $a \neq 0$, записанного в форме (10), будет $a_0=0,\ a_1=0, \ldots, a_{i-1}=0$, а $a_i \neq 0$ (в кольце $\mathfrak{A}$), то определим норму элемента a так:

$$\|a\| = \frac{1}{2^i}, \quad \|0\| = 0. \tag{11}$$

Тогда дл. любых двух элементов a и b из $\mathfrak{A}$ будет

$$\left.\begin{aligned} \|a+b\| &\leqslant \max(\|a\|, \|b\|), \\ \|ab\| &\leqslant \|a\|\cdot\|b\|. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Таким образом, $\mathfrak{A}$ становится нормированным кольцом. Если ввести метрику $\rho(a, b) = \|a - b\|$, то в замыкании $\overline{\mathfrak{A}}$ относительно этой метрики можно естественным образом определить операции сложения, вычитания и умножения, продолжающие соответствующие операции $\mathfrak{A}$. Также на $\overline{\mathfrak{A}}$ продолжается и понятие нормы. Получившееся таким образом замкнутое нормированное кольцо $\overline{\mathfrak{A}}$ может быть представлено кольцом формальных степенных рядов с действиями формального сложения и умножения.

Если $\overline{a} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \subset \overline{\mathfrak{A}}$, то продолжение нормы для $\overline{a}$ определяем так: если $\overline{a} \neq 0$, тогда для какого-то i $a_0 = 0,\ a_1 = 0, \ldots, a_{i-1} = 0$, а $a_i \neq 0$, и определяем:

$$\|\overline{a}\| = \frac{1}{2^i}; \quad \|0\| = 0.$$

Всякий формальный степенной ряд по однородным полиномам возрастающих степеней сходится по этой норме.

В $\mathfrak{A}$ любой элемент вида $1 + a_1 + a_2 + \cdots$ имеет обратный. Если обозначить

$$z = a_1 + a_2 + \ldots,$$

то ряд

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

сходится в нашей метрике и потому является элементом $\overline{\mathfrak{A}}$.

В $\overline{\mathfrak{A}}$ можно определить следующую формальную функцию:

$$e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots. \tag{13}$$

Ряд сходится в $\overline{\mathfrak{A}}$, если $\| a \| < 1$, т. е. если

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

При любом таком a $e^a \in \overline{\mathfrak{A}}$ и e^a имеет вид $1 + a_1$, где $a_1 \in \overline{\mathfrak{A}}$ и $\| a_1 \| < 1$.

Наоборот, для любого $a_1 \in \overline{\mathfrak{A}}$ с $\| a_1 \| < 1$ найдется одно и только одно $a \in \overline{\mathfrak{A}}$ с $\| a \| < 1$ такое, что $e^a = 1 + a_1$. Для доказательства достаточно ввести функцию

$$a = \log(1 + a_1) = a_1 - \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1^3}{3} - \cdots, \tag{14}$$

сходящуюся при всех $\| a_1 \| < 1$.

В $\mathfrak{A}$ имеется подмодуль $\mathfrak{L}$ — алгебра Ли с операцией $\circ$, определенной формулой (7), и порожденная элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Замыкание $\mathfrak{L}$ в $\overline{\mathfrak{A}}$ будет частью $\mathfrak{A}$ и представляется множеством таких формальных степенных рядов $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, у которых $a_0 = 0$, а все a_i при $i > 0$ будут однородными полиномами Ли от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ степени i.

Для некоммутативных показателей имеет место важная показательная

ТЕОРЕМА 2 [см. ([10]), ([11]), ([6]), ([9])].

Если x и y принадлежат $\overline{\mathfrak{L}}$, то однозначно определяется z, принадлежащее $\overline{\mathfrak{A}}$, такое, что

$$e^z = e^x e^y \tag{15}$$

и это $z \in \overline{\mathfrak{L}}$. Выражение для z дается рядом

$$\begin{aligned} z = y + \omega_1(x, y) + \frac{1}{2!}\omega_2(x, y) + \frac{1}{3!}\omega_3(x, y) + \cdots = \\ = x + y + \frac{1}{2}[xy] + \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\omega_1(x, y) = \nu = x + \frac{1}{2}[xy] + \frac{B_1}{2!}[xy^2] - \frac{B_2}{4!}[xy^4] + \frac{B_3}{6!}[xy^6] + \cdots,$$

$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, ... — *числа Бернулли,*

$$\omega_2(x, y) = \left(\nu \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y),$$

$$\omega_3(x, y) = \left(\nu \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_2(x, y),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\omega_i(x, y) = \left(\nu \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_{i-1}(x, y),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Оператор $\nu \frac{\partial}{\partial y}$ — так называемое некоммутативное дифференцирование.

Определение оператора $\nu \frac{\partial}{\partial y}$ и доказательство теоремы 2 имеются в книге Чеботарева ([12]).

Нетрудно заметить, что $(e^x)^{-1} = e^{-x}$ и $(e^x)^m = e^{mx}$ для любого целого m.

Из показательной теоремы получается следствие, что любое слово из положительных или отрицательных степеней $e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n}$ можно представить в виде e^z, где $z \in \bar{\mathfrak{L}}$, $|z| < 1$, а потому всегда $e^z = 1 + a_1$ с $|a_1| < 1$ и e^z имеет обратный элемент $e^{-z} \in \mathfrak{A}$. Отсюда видно, что множество элементов $e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n}$ алгебры $\mathfrak{A}$ порождает мультипликативную группу, все элементы которой принадлежат $\mathfrak{A}$ и могут быть представлены в виде e^z, где $z \in \bar{\mathfrak{L}}$.

Из результатов работ Магнуса ([4]) и ([5]) непосредственно вытекает ряд теорем:

ТЕОРЕМА 3. *Группа* $\mathfrak{A} = \{e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n}\}$, *порожденная элементами* $\mathfrak{A}$ $g_1 = e^{x_1}, g_2 = e^{x_2}, \dots, g_n = e^{x_n}$ *— свободная со свободными образующими* $g_1, g_2, \dots, g_n$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть элемент* $g \neq 1$ *группы* $\mathfrak{G}$ *представлен в виде*

$$g = e^{l_m + l_{m+1} + l_{m+2} + \cdots}, \quad l_m \neq 0,$$

где l_i *— однородный полином Ли с рациональными коэффициентами степени* i $(i \geq m \geq 1)$. *Тогда* l_m *будет полиномом Ли с целыми коэффициентами и* $g \in \mathfrak{G}_m$ *—* m*-у члену убывающего центрального ряда группы* $\mathfrak{G}$ *и не принадлежит* $\mathfrak{G}_{m+1}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если для любого* $g^{(i)} \in \mathfrak{G}_i$

$$g^{(i)} = e^{l_i + l_{i+1} + \cdots},$$

то l_i *пробегает совокупность* $\{l_i\} = L_i$ *всех полиномов Ли с целыми коэффициентами степени* i *в* $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Группа* $\mathfrak{G}_i$ *отображается гомоморфно на аддитивную группу* L_i *при соответствии:*

$$g^{(i)} \to l_i. \tag{17}$$

Ядро гомоморфизма состоит из всех элементов $\mathfrak{G}_{i+1}$. *Таким образом, модуль* $L_i = \{l_i\}$ *изоморфен* $\mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1}$. *Ранг модуля* L_i, *определенный Виттом* ([7]), *будет равен* $\psi_i(n)$ *из формулы* (6).

Эти теоремы полностью описывают структуру фактор-групп $\mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1}$ для случая свободных групп. В случае несвободных групп для исследования строения фактор-групп убывающего центрального ряда Магнус ([3]) намечает следующий путь.

Именно, группа F с образующими $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n$ может быть представлена как фактор-группа свободной группы $\mathfrak{G} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ со свободными образующими $g_1, g_2, \ldots, g_n$ по нормальному делителю $\mathfrak{N}$, состоящему из всех таких слов из $g_1, g_2, \ldots, g_n$ $w(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, что $w(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n) = 1$ — единице группы F.

$$F \cong \mathfrak{G} / \mathfrak{N}.$$

ЛЕММА 2 [см (3)].

$$F_i / F_{i+1} \cong \mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1} (\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{N}) \overset{\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{i+1}}{\cong} \mathfrak{G}_{i+1} (\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{N}) / \mathfrak{G}_{i+1}. \qquad (18)$$

Будем считать, что свободная группа представлена в кольце формальных степенных рядов, как указано выше.

При гомоморфизме (17) $\mathfrak{G}_i$ отображается на модуль L_i всех полиномов Ли степени i с целыми коэффициентами. При этом же гомоморфизме $\mathfrak{G}_{i+1} (\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{N})$, очевидно, отобразится на подмодуль A_i модуля L_i. Модуль A_i состоит из всех полиномов Ли с целыми коэффициентами таких, которые являются начальными членами степени i у показателей элементов $\mathfrak{G} \in (\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{N})$ в указанном представлении.

Так как ядро гомоморфизма $\mathfrak{G}_{i+1}$ содержится как в $\mathfrak{G}_i$, так и в $\mathfrak{G}_{i+1} (\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{N})$, то получаем, что

$$\mathfrak{G}_i / \mathfrak{G}_{i+1} (\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{N}) \cong L_i - A_i$$

— аддитивному фактормодулю L_i по A_i.

Составим прямую сумму счетного множества модулей A_i:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots.$$

Очевидно, $\mathfrak{L} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots$ — кольцо Ли, состоящее из всех полиномов Ли с целыми коэффициентами.

Магнусом (3) доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 6. *A является идеалом в кольце Ли $\mathfrak{L}$.*

ТЕОРЕМА 7. *Кольцо Ли $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} / A$ однозначно определяется группой F и не зависит от способа представления F в виде фактор-группы свободной группы.*

ТЕОРЕМА 8. *F_i / F_{i+1} изоморфно аддитивной группе фактор-кольца $\mathfrak{L}_1^i / \mathfrak{L}_1^{i+1}$. При этом под $\mathfrak{L}_1^n$ понимается образ идеала $\mathfrak{L}$*

$$\mathfrak{L}^m = L_m + L_{m+1} \cdots$$

при естественном гомоморфизме

$$\mathfrak{L} \to \mathfrak{L} / A \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

ТЕОРЕМА 9. *Если ввести $F_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, то порядок (или мощность) $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} / A$ равен порядку (или мощности) F / F_∞.*

Магнус называет кольцо Ли $\mathfrak{L}_1$ *кольцом Ли, сопоставимым группе F.*

Аддитивная группа кольца $\mathfrak{L}_1$ разлагается в прямую сумму

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} / A = (L_1 - A_1) \dot{+} (L_2 - A_2) \dot{+} (L_3 - A_3) \dot{+} \cdots$$

Для конечных групп F эта сумма не может содержать бесконечное множество ненулевых слагаемых. Поэтому для некоторого m_0

$$A_{m_0} = L_{m_0},$$

а тогда и далее

$$A_{m_0+k} = L_{m_0+k} \quad (k > 0),$$

и мы получим, что

$$\mathfrak{L}_1^{m_0} = \mathfrak{L}^{m_0} + A/A \cong \mathfrak{L}^{m_0}/\mathfrak{L}^{m_0} \cap A = \mathfrak{L}^{m_0}/\mathfrak{L}^{m_0} = 0,$$

т. е. кольцо $\mathfrak{L}_1$ нильпотентно.

Эта связь представляет особый интерес для конечных нильпотентных групп, так как тогда $F_\infty = 1$ и порядок $\mathfrak{L}_1$ равен порядку группы F.

В случае, когда для F известно, что соответствующее кольцо Ли $\mathfrak{L}_1$ бесконечно, то наверное можно утверждать, что F сама бесконечна.

Особенно интересно проследить связь между группой F и соответствующим кольцом Ли $\mathfrak{L}_1$ в случае, когда F — максимальная периодическая группа с периодом p^a (p — простое число, a — целое), порожденная конечным числом образующих. Мы уже показали, что в случае конечности F $\mathfrak{L}_1$ будет конечным нильпотентным кольцом Ли.

Если же удастся показать, что $\mathfrak{L}_1$, соответствующее группе F, будет нильпотентным, то, вследствие того что $\mathfrak{L}_1$ имеет конечное число образующих и, как далее будет показано, $p^a\mathfrak{L}_1 = 0$, $\mathfrak{L}_1$ наверное будет конечным, а тогда и $F_1 = F/F_\infty$ будет конечной группой. F_1 является максимальной нильпотентной (или обобщенно нильпотентной) периодической группой с периодом p^a и данным числом производящих элементов.

Утверждение, что *всякая максимальная нильпотентная периодическая с периодом p^a группа, порожденная конечным числом образующих, будет конечной*, составляет содержание так называемой ослабленной проблемы Бернсайда.

Эквивалентная ей формулировка состоит в следующем: *существует ли максимальная конечная группа, порожденная n образующими с периодом p^a, такая, что всякая другая конечная группа, порожденная n образующими с периодом p^a, будет изоморфна ее фактор-группе?*

Из положительного решения ослабленной проблемы Бернсайда еще не следует положительного решения самой проблемы Бернсайда ([13]) для периодических групп с периодом p^a, так как в этом случае, как это показано Бэром ([14]), остаются две возможности:

a) либо $F_\infty = 1$ и F будет конечна,

b) либо F_∞ будет бесконечной периодической группой с периодом p^a и конечным числом образующих, такой, что у нее не будет подгрупп конечного индекса.

Вопрос о том, какая возможность будет на самом деле иметь место, остается открытым.

Наоборот, из отрицательного решения ослабленной проблемы Бернсайда будет следовать отрицательное решение самой проблемы Бернсайда.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы дать некоторые структурные теоремы о строении кольца Ли $\mathfrak{L}_1$, сопоставимого максимальной

периодической группе с конечным числом образующих и периодом p, где p — простое число.

Естественно, что каждый шаг в направлении выяснения структуры кольца Ли $\mathfrak{L}_1$ дает глубокие теоремы о структуре самой периодической группы F.

§ 2. Получение основных соотношений для периодических групп с периодом простым числом

В этом разделе мы сохраняем ранее введенные обозначения.

ТЕОРЕМА 1. *При любом периоде q для периодической группы F с периодом q*

$$qL_i \subset A_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — производящие F. Берем свободную группу $\mathfrak{G}$ с производящими $e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots$, где $x_1, x_2, \ldots$ — свободные производящие свободной ассоциативной алгебры над полем рациональных чисел R. Соответствие $e^{x_i} \longleftrightarrow f_i$ — взаимно однозначное соответствие. Отображение $e^{x_i} \to f_i$ может быть однозначно продолжено до гомоморфизма $\mathfrak{G} \to F$; обозначим ядро его через $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{G}(q)$ — подгруппа $\mathfrak{G}$, порожденная всеми q-ми степенями элементов группы $\mathfrak{G}$, то, очевидно, $\mathfrak{G}(g) \subseteq \mathfrak{N}$.

Из теоремы Магнуса известно, что если a_m — любой элемент модуля L_m, то найдется элемент $\mathfrak{G}_m$ вида

$$g^{(m)} = e^{a_m + a_{m+1} + \cdots}$$

Тогда

$$g^{(m)q} = e^{a_m q + a_{m+1} q + \cdots} \in \mathfrak{G}(q) \text{ и } \in \mathfrak{G}_m,$$

т. е. принадлежит $\mathfrak{G}(q) \cap \mathfrak{G}_m \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_m$, а потому, по определению, $qa_m \in A_m$.

Это показывает, что модуль qL_m является подмодулем A_m.

$$F_m / F_{m+1} \cong L_m - A_m \cong (L_m - qL_m) - (A_m - qL_m),$$

т. е. модули L_m и A_m можно рассматривать не над кольцом целых чисел, а над кольцом вычетов по $\operatorname{mod} q$.

Если $q = p$ — простому числу, то модули L_m и A_m можно рассматривать над конечным полем $GF[p]$.

В дальнейшем L_m и A_m рассматриваются над $GF[p]$.

ЛЕММА 1. *Если x и y — производящие свободного ассоциативного кольца и z — элемент $\mathfrak{L}$ такой, что*

$$e^z = e^x e^y,$$

то z можно представить в виде

$$z = H_1(x, y) + H_2(x, y) + \cdots + H_p(x, y) + H_{p+1}(x, y) + \cdots + H_{2p-2}(x, y) + \cdots,$$

где $H_i(x, y)$ — однородный полином Ли от x и y степени i с рациональ-

ными коэффициентами, причем коэффициенты $H_1, H_2, \ldots, H_{p-1}$ не содержат в знаменателях множителя p, а коэффициенты $H_p, H_{p+1}, \ldots, H_{2p-2}$ содержат множитель p в знаменателях в степени не выше первой.

Доказательство. Возьмем выражение для z из формулы (16). По теореме Штаудта-Клаузена [см. ([15]), стр. 19], бернуллиево число

$$B_m = (-1)^m \sum \frac{1}{q} + \text{целое число},$$

где $q \geqslant 2$ пробегает все такие простые числа, для которых $q-1$ делит удвоенный номер $2m$ бернуллиева числа B_m. Следовательно, p входит в знаменатель B_m только при $2m$, делящемся на $p-1$, т. е. в знаменатель $B_{\frac{p-1}{2}}$, B_{p-1}, $B_{\frac{3(p-1)}{2}}$, и т. д.

Таким образом, $\omega_1(x, y)$ имеет структуру, требуемую в теореме для z:

$$\omega_2(x, y) = \left(v \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y) = \left(x \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y) + \left(\frac{1}{2}[xy] \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y) + \\ + \left(\frac{B_1}{2!}[xy^2] \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y) + \cdots .$$

Отсюда следует, что строение каждого слагаемого $\omega_2(x, y)$ таково, что степени p, входящие в знаменатели коэффициентов $\omega(x, y)$, не могут превзойти степеней, допустимых для z в теореме, так как

$$\omega_1(x, y) = x + \frac{1}{2}[xy] + \frac{B_1}{2!}[xy^2] - \frac{B_2}{4!}[xy^4] + \ldots,$$

и если допустить, что слагаемое $\omega_2(x, y)$ степени $< p$ будет иметь p множителем в знаменателе, то мы придем к противоречию, так как это p может произойти либо из коэффициента члена $\omega_1(x, y)$, т. е. степень этого члена уже $\geqslant p$, либо от коэффициента a одночлена w в производной $\left(aw \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y)$, а этот коэффициент может иметь p в знаменателе лишь в случае, если степень w больше или равна p, а потому все рассматриваемые члены ряда $\left(aw \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y)$ степени $\geqslant p$.

Также, если член $\omega_1(x, y)$ имеет в знаменателе коэффициента какого-либо члена множитель p^2, то он мог произойти либо от некоторого коэффициента члена $\omega_1(x, y)$, а потому его степень $\geqslant 2p-1$, либо от коэффициента a в производной $\left(aw \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y)$ и тогда его степень тоже $> 2p-2$, либо же p входит в первой степени в коэффициент некоторого члена $\omega_1(x, y)$ и в первой степени в коэффициент a, тогда степень $w \geqslant p$ и степень слагаемого $\omega_1(x, y)$ тоже $\geqslant p$, а потому рассматриваемое слагаемое $\omega_2(x, y)$ будет степени $\geqslant 2p-1 > 2p-2$.

Аналогично можно провести это рассуждение для $\omega_3(x, y)$ и т. д.

Заметим, что $\omega_2(x, y)$ начинается с членов 3-го порядка. В $\omega_3(x, y)$ нет членов до 3-го порядка включительно и т. д., в $\omega_i(x, y)$ нет членов до i-го порядка включительно. Вообще, $\omega_i(x, y)$ состоит из бесконечной суммы всех слагаемых z степени i в x, умноженной на $i!$

Проводим это рассуждение до $\omega_{p-1}\cdot$ $\omega_1(x, y)$ входит в z с множителем $\frac{1}{i!}$, поэтому слагаемые z, состоящие из членов $\frac{1}{i!}\omega_1(x, y)$ $(i=1,2,\ldots,p-1)$, имеют строение, требуемое для z в теореме. Чтобы доказать, что и остальные слагаемые z до степени $2p-2$ включительно имеют требуемое строение, используем функциональное уравнение для z. Если $z=\Phi(x, y)$ — степенной ряд, то $e^z=e^xe^y$, откуда $e^{-z}=e^{-y}e^{-x}$,

$$-z=\Phi(-y, -x), \quad z=-\Phi(-y, -x).$$

Так как в $\Phi(x, y)$ члены до общей степени $2p-2$ включительно и степени в x до $p-1$ включительно имеют требуемую структуру, то из тождества $z=-\Phi(-y, -y)$ видно, что и члены до степени $p-1$ включительно в y и до общей степени $2p-2$ имеют также требуемую структуру.

Но любой член общей степени до $2p-2$ имеет степень либо в x, либо в $y \leqslant p-1$, что и доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$g_1=e^{z_1}, \quad g_2=e^{z_2},$$

где $z_1 \in \overline{\mathfrak{L}}$ *и* $z_2 \in \overline{\mathfrak{L}}$, *причем* z_j *имеют вид*

$$z_j=P_{1,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)+P_{2,j}(x_1, x_2, \ldots x_n)+\cdots$$
$$\cdots+P_{2p-2,j}(x_1, \ldots, x_n)+\cdots \quad (j=1, 2), \tag{19}$$

где $P_{k,j}$ — *однородные полиномы Ли с рациональными коэффициентами степени* k *в* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *причем коэффициенты* $P_{k,j}$, $k=1, 2, \ldots, p-1$, *не содержат* p *в знаменателе, коэффициенты* $P_{k,j}$, $k=p, p+1, \ldots$ $\ldots, 2p-2$, *содержат* p *в знаменателе в степени не выше первой. Тогда*

$$g_1g_2=e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_3},$$

где z_3 *имеет снова вид* (19) $(j=3)$, *причем* $P_{k,3}$ *имеют те же* p-*свойства, что* $P_{k,1}$ *и* $P_{k,2}$.

Доказательство. Пусть $p=5$ (в общем случае доказательство проводится совершенно аналогично).

$$z_3=\Phi(z_1, z_2)=H_1(z_1, z_2)+H_2(z_1, z_2)+H_3+H_4+H_5+H_6+H_7+H_8+\cdots$$

При подстановке в H_9, $H_{10}, \ldots$ вместо z_1, z_2 их выражений через $x_1, x_2, \ldots, x_k$ получим многочлены Ли степени $\geqslant 9$; они нас не интересуют.

Рассмотрим $H_i(z_1, z_2)$, $i \leqslant 8$. Возьмем какой-либо одночлен $H_i(z_1, z_2)$ со своим коэффициентом. При подстановке вместо z_1 и z_2 их выражений (19) мы получим целую серию слагаемых — произведений Ли (не обязательно правонормированных) с какими-то коэффициентами. Разберем несколько случаев, рассматривая получившиеся слагаемые степени до 8 включительно.

1) Степень получившегося слагаемого $\leqslant 4$. Тогда оно могло получиться либо из H_1, либо из H_2, либо из H_3, либо из H_4, причем если

при замене z_1, z_2 из (19) там появится хоть одно $P_{k,i}$ с $k \geqslant 5$, то степень слагаемого будет $\geqslant 5$. Итак, все встречающиеся $P_{k,i}$ будут степени $\leqslant 4$, а с ними в одночлен придут и их коэффициенты без множителя 5 в знаменателе. Поэтому слагаемое имеет коэффициенты без множителя 5 в знаменателе.

2) Степень слагаемого $\geqslant 5$ и $\leqslant 8$. Тогда это слагаемое может получиться из любого H_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$.

а) Пусть слагаемое получилось из H_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. В слагаемом (произведении) могут встретиться (после замены из (19)) несколько $P_{k,i}$.

Коэффициенты H_1, H_2, H_3 и H_4 не имеют 5 множителем в знаменателе. Поэтому слагаемое может иметь множитель 5^2 в знаменателе лишь тогда, когда этот множитель придет с коэффициентами соответствующих $P_{k,i}$. Если коэффициенты одного $P_{k,i}$ уже имеют 5^2 множителем в знаменателе, то степень $P_{k,i} \geqslant 9$ и слагаемое было бы степени $\geqslant 9$. Если входят два $P_{k,i}$ с коэффициентами, имеющими 5 множителем в знаменателе, то степень каждого такого $P_{k,i} \geqslant 5$ и степень слагаемого оказалась бы $\geqslant 10$.

в) Пусть слагаемое получилось из H_i $(i = 5, 6, 7, 8)$. Тогда допустим, что у этого слагаемого 5^2 входит в знаменатель коэффициента. Так как коэффициенты H_i имеют 5 множителем в знаменателе в степени не выше первой, то в получившийся одночлен должно войти по крайней мере одно $P_{k,i}$ с $k \geqslant 5$, так как только они могут иметь множитель 5 в знаменателе. Тогда степень получившегося слагаемого $\geqslant i + k - 1 \geqslant 5 + 5 - 1 = 9$. Это и доказывает лемму при $p = 5$. При любом p доказательство аналогично.

ЛЕММА 3. *Пусть x_1, x_2, ... — свободные производящие свободной ассоциативной алгебры над полем рациональных чисел R, $\mathfrak{G}$ — свободная группа с производящими e^{x_1}, e^{x_2}, ... Тогда любой элемент $g \in \mathfrak{G}$ имеет вид e^z, где z имеет такую же p-структуру коэффициентов как и z_j в формуле* (19).

Доказательство получается повторным применением леммы 2 и из того обстоятельства, что производящие e^{x_k}, e^{-x_k} устроены так, что за z_j в формуле (19) можно взять x_k или $-x_k$, так как $\pm x_k$ удовлетворяют тем же p-условиям, что и z_j в формуле (19).

Отсюда ясно, что любая p-я степень элемента $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$e^z, \text{ где } z = P_1 + P_2 + \cdots + P_p + \cdots + P_{2p-2}. \tag{20}$$

Здесь $P_1, P_2, \ldots, P_{p-1}$ — однородные многочлены Ли с рациональными коэффициентами $\equiv 0 \pmod p$, а $P_p, P_{p+1}, \ldots, P_{2p-2}$ — однородные многочлены Ли с рациональными коэффициентами, целыми по $\operatorname{mod} p$, т. е. не имеющими p множителем в знаменателе.

Докажем, что такое же свойство имеют и произведения p-х степеней элементов $\mathfrak{G}$.

ЛЕММА 4. *Любой элемент группы $\mathfrak{G}(p)$ имеет вид e^z, где z имеет такое же распределение p в знаменателях коэффициентов, как и z в формуле* (20).

Для доказательства достаточно показать, что произведение двух выражений e^{z_1} и e^{z_2}, где z_1, z_2 такого же типа как z в (20), снова имеет вид

e^{z_3}, где z_3 того же типа, что z в (20). Даже более того, если

$$z_1 = P_{11} + P_{21} + P_{31} + \cdots + P_{p1} + \cdots + P_{2p-2,1} + \cdots ,$$
$$z_2 = P_{12} + P_{22} + P_{32} + \cdots + P_{p2} + \cdots + P_{2p-2,2} + \cdots ,$$

и если $P_{ik} \equiv 0 \pmod p$ ($k=1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, p-1$) и P_{ik} имеют p-целые коэффициенты при $p \leqslant i \leqslant 2p-2$, то $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_3}$, где

$$z_3 = P_{13} + P_{23} + \cdots + P_{p3} + \cdots + P_{2p-2,3} + \cdots ,$$

причем $P_{i3} \equiv 0 \pmod p$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$), P_{i3} имеет p-целые коэффициенты при $p \leqslant i \leqslant 2p-2$ и $P_{i3} \equiv P_{i1} + P_{i2} \pmod p$, $i \leqslant 2p-2$.

Проще всего это доказывается так. Обозначим

$$\frac{1}{p} z_1 = u_1, \quad \frac{1}{p} z_2 = u_2;$$

тогда u_i имеют вид z_1 в (19),

$$z_1 = pu_1, \quad z_2 = pu_2, \quad e^{z_1}e^{z_2} = e^{pu_1}e^{pu_2} = e^{\Phi(pu_1, pu_2)} = e^{z_3},$$
$$z_3 = pH_1(u_1, u_2) + p^2H_2(u_1, u_2) + p^3H_3(u_1, u_2) + \cdots ,$$
$$H_1(u_1, u_2) = u_2 + u_2$$

(это видно из формулы (16)).

Будем собирать из всех $H_i(u_1, u_2)$ члены степени до $2p-2$ включительно в $x_1, x_2, \ldots$ Так как u_1 и u_2 имеют форму (19), то эти члены, как это видно из доказательства леммы 2, будут иметь p множителем в знаменателе в степени не выше первой. Следовательно, эти члены из p^2H_2, p^3H_3 войдут обязательно с коэффициентами $\equiv 0 \pmod p$. Члены этих степеней в $pH_1(u_1; u_2) = pu_1 + pu_2 = z_1 + z_2$ будут $P_{i1} + P_{i2}$ ($i = 1, 2, \ldots, 2p-2$). Это доказывает наше вспомогательное утверждение.

Так как любой элемент $\mathfrak{G}(p)$ является произведением конечного числа p-х степеней элементов $\mathfrak{G}$ и каждая p-я степень имеет вид (20), то, применяя последовательно уже полученное свойство, мы докажем лемму.

В процессе доказательства нами получена также

ЛЕММА 5. *Если e^z — любой элемент группы $\mathfrak{G}(p)$, то z имеет вид* (20), *и если у многочленов P_i ($p \leqslant i \leqslant 2p-2$) коэффициенты заменить на классы их по* mod p, *то упорядоченная последовательность таких многочленов ($P_p, P_{p+1}, \ldots, P_{2p-2}$) образует модуль относительно сложения:*

$$(P_p, P_{p+1}, \ldots, P_{2p-2}) + (Q_p, Q_{p+1}, \ldots, Q_{2p-2}) =$$
$$= (P_p + Q_p, P_{p+1} + Q_{p+1} + \cdots + P_{2p-2} + Q_{2p-2})$$

с областью операторов — конечным полем $GF[p]$.

Полученные результаты позволяют доказать первую структурную теорему о строении модулей A_i.

ТЕОРЕМА 2. *Для $F = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}(p)$, где $\mathfrak{G}$ — свободная группа, $A_i = pL_i$ при $i = 1, 2, \ldots, p-1$.*

Доказательство. Всегда $pL_i \subseteq A_i$. Пусть $a_i \in A_i$; тогда найдется $g \in \mathfrak{G}$ такое, что

$$g = e^{a_i + a_{i+1} + \cdots} \in \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{G}(p),$$

причем a_i — полином с целыми коэффициентами и $a_i \equiv 0 \pmod p$ (это следует из леммы 4), т. е. найдется полином Ли с p-целыми коэффициентами b_i степени i такой, что $a_i = Pb_i$, где b_i — полином Ли с рациональными коэффициентами, в знаменатели которых не входит p.

Если общее наименьшее кратное всех знаменателей коэффициентов b_i при выражении b_i через базис модуля целочисленных полиномов L_i обозначить через α, то $(\alpha, p) = 1$, следовательно, αa_i — многочлен с целыми коэффициентами, делящимися на p.

Если a_i выразить через целочисленный базис L_i, то, по умножении на α, все коэффициенты в выражении a_i через этот базис будут делиться на p. Так как $(\alpha, p) = 1$, то все коэффициенты выражения a_i через взятый базис целые и делятся на p, т. е. $a_i = pa_i'$, a_i' — целочисленный полином Ли.* Отсюда

$$a_i' \in pL_i, \quad A_i \subseteq pL_i, \quad A_i = pL_i.$$

Исследуем, что представляет собой A_i при $p \leqslant i \leqslant 2p-2$. Здесь уже появятся некоторые нетривиальные соотношения, входящие в A_i.

Чтобы вывести хоть одно такое соотношение, воспользуемся свойствами вполне характеристических подгрупп. Именно, подгруппа группы $\mathfrak{G}$ называется вполне характеристической, если она переводится в свою часть любым эндоморфизмом группы $\mathfrak{G}$, т. е. любым гомоморфизмом $\mathfrak{G}$ в свою подгруппу. Произвольный эндоморфизм $\mathfrak{G}$ можно задать таким образом: перевести каждый производящий элемент $\mathfrak{G}$ в некоторый произвольный элемент $\mathfrak{G}$, сопоставляемый производящему. Так как каждый элемент $\mathfrak{G}$ выражается однозначно в каноническом виде через производящие, то это сопоставление однозначно определяет эндоморфизм.

$\mathfrak{G}(p)$ является вполне характеристической подгруппой $\mathfrak{G}$. Поэтому, построив какой-либо элемент $\mathfrak{G}(p)$, мы можем, применяя эндоморфизмы $\mathfrak{G}$, построить целую серию элементов $\mathfrak{G}(p)$. Будем применять эндоморфизмы

$$g_i = e^{x_i} \to g_i^k = e^{kx_i},$$

где k — произвольное целое, остальные производящие переводятся сами в себя. Этот эндоморфизм равносилен замене всюду в разложении элементов $\mathfrak{G}$ в степенные ряды x_i на kx_i. Пусть e^x и e^y — какие-либо два свободных производящих. Тогда

$$e^x e^y = e^{H_1(x, y)+H_2(x, y)+\cdots+H_p(x, y)+\cdots+H_{2p-2}(x, y)+\cdots},$$

$$f(x, y) = (e^x e^y)^p = e^{pH_1(x, y)+pH_2(x, y)+\cdots+pH_p(x,y)+\cdots+pH_{2p-2}(x, y)+\cdots} \in \mathfrak{G}(p),$$

$$H_1(x,y) = x + y.$$

Построим, далее,

$$f_1(x, y) = (e^x e^y)^p e^{-px} e^{-py} \in \mathfrak{G}(p).$$

Из лемм 4 и 5 следует, что

* Рассуждение это вызвано неоднозначностью при выборе базиса

$$f_1(x, y) = e^{P_2^{(1)}(x, y)+P_3^{(1)}(x, y)+\cdots+P_p^{(1)}(x, y)+\cdots+P_{2p-2}^{(1)}(x, y)} \in \mathfrak{G}(p),$$

причем $P_i^{(1)}$ — однородный полином Ли степени i,

$$P_i^{(1)}(x, y) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, p), \quad i = 2, 3, \ldots, p-1,$$

и

$$P_i^{(1)}(x, y) \equiv pH_i(x, y) \,(\mathrm{mod}\, p), \quad i = p, p+1, \ldots, 2p-2.$$

Пусть g — первообразный корень сравнения

$$t^{p-1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p).$$

Применим эндоморфизм $\mathfrak{G}$ такой, что

$$x \to gx, \quad y \to gy.$$

Тогда

$$f_1(gx, gy) = e^{g^2 P_2^{(1)}(x, y)+g^3 P_3^{(1)}(x, y)+\cdots+g^p P_p^{(1)}(x, y)+\cdots+g^{2p-2} P_{2p-2}^{(1)}(x, y)+\cdots} \in \mathfrak{G}(p),$$

$$f_1(x, y)^{g^2} = e^{g^2 P_2^{(1)}(x, y)+g^2 P_3^{(1)}(x, y)+\cdots+g^2 P_p^{(1)}(x, y)+\cdots+g^2 P_{2p-2}^{(1)}(x, y)+\cdots} \in \mathfrak{G}(p).$$

Отсюда получаем:

$$f_2(x, y) = f_1(gx, gy)\cdot f_1(x, y)^{-g^2} = e^{P_3^{(2)}(x, y)+\cdots+P_p^{(2)}(x, y)+\cdots+P_{2p-2}^{(2)}(x, y)} \in \mathfrak{G}(p),$$

причем, на основании лемм 4 и 5,

$$P_i^{(2)}(x, y) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, p) \quad (i = 3, 4, \ldots, p-1),$$

а при $i = p$

$$P_p^{(2)}(x, y) \equiv g^p P_p^{(1)}(x, y) - g^2 P_p^{(1)}(x, y) \equiv g^2(g^{p-2}-1)\, pH_p(x, y) \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

При этом

$$a = g^2(g^{p-2}-1) \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p),$$

так как g — первообразный корень сравнения $t^{p-1} - 1 \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\, p)$. Применяя далее этот прием для исключения членов 3 й степени, получим:

$$f_3(x, y) = f_2(gx, gy)\, f_2(x, y)^{-g^3} = e^{P_4^{(3)}(x, y)+\cdots+P_p^{(3)}(x, y)+\cdots+P_{2p-2}^{(3)}(x, y)+\cdots} \in \mathfrak{G}(p),$$

$$P_p^3(x, y) \equiv g^3(g^{p-3}-1)\, P_p^{(2)}(x, y) \quad (\mathrm{mod}\, p),$$

$$g^3(g^{p-3}-1) \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, p).$$

Делая $p-2$ таких шагов, мы придем в конце концов к некоторому элементу $\mathfrak{G}(p)$ вида:

$$\varphi_1(x, y) = f_{p-1}(x, y) = f_{p-1}(gx, gy)\cdot f_{p-2}(x, y)^{-g^{p-1}} =$$

$$= e^{P_p^{(p-1)}(x, y)+\cdots+P_{2p-2}^{(p-1)}\cdots(x, y)+} \in \mathfrak{G}(p),$$

где $P_p^{(p-1)}(x, y) \equiv \alpha\, pH_p(x, y)$ $(\mathrm{mod}\ p)$, α — целое число, не делящееся на p.

На основании леммы 4, $pH_p(xy)$ — многочлен Ли с p-целыми коэффициентами. Из показательной формулы (16) видно, что это — многочлен следующего вида:

$$pH_p(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) + \cdots + \Phi_{p-1}(x, y), \qquad (21)$$

где $\Phi_k(x, y)$ — многочлен Ли с p-целыми коэффициентами степени p в x и y и степени k в x. При этом из выражения для $\omega_1(x, y)$ в (16) следует, что

$$\Phi_1(x, y) = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}} pB_{\frac{p-1}{2}}}{(p-1)!}[xy^{p-1}],$$

где $B_{\frac{p-1}{2}}$ — число Бернулли, $pB_{\frac{p-1}{2}}$ — рациональное число, у которого числитель и знаменатель взаимно просты с p.

Из теоремы Штаудта-Клаузена [см. (5), стр. 19] следует, что

$$pB_{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

А так как $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, то весь коэффициент при $[xy^{p-1}]$ сравним по $\mathrm{mod}\, p$ с

$$\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{-1} = 1,$$

$$P_p^{(p-1)} = \Phi_1^{(1)} + \Phi_2^{(1)} + \cdots + \Phi_{p-1}^{(1)},$$

где $\Phi_i^{(1)}(x, y)$ устроены так же, как $\Phi_i(x, y)$ в (21).

Как и ранее, при помощи эндоморфизмов можно избавиться от многочленов $\Phi_2^{(1)}(x, y), \ldots, \Phi_{p-1}^{(1)}(x, y)$. Действительно, если сделать отображение $e^y \to (e^y)^g$, $e^x \to e^x$, то тогда

$$\varphi_1(x, gy) = e^{g^{p-1}\Phi_1^{(1)}(x, y) + g^{p-2}\Phi_2^{(1)}(x, y) + \ldots + g\Phi_{p-1}^{(1)}(x, y) + \cdots} \in \mathfrak{G}(p).$$

Последними точками обозначены члены высшей степени. Теперь

$$\varphi_2(x, y) = \varphi_1(x, gy) \cdot \varphi_1(x, y)^{-g} = e^{\Phi_1^{(2)}(x, y) + \Phi_2^{(2)}(x, y) + \cdots + \Phi_{p-2}^{(2)}(x, y) - \cdots} \in \mathfrak{G}(p),$$

причем

$$\Phi_i^{(2)}(x, y) = (g^{p-i} - g)\Phi_i^{(1)}(x, y) \equiv$$
$$\equiv \alpha(g^{p-i} - g)\Phi_i(x, y) \pmod p \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

$$\Phi_1^{(2)}(x, y) = (g^{p-1} - g)\Phi_1^{(1)}(x, y),$$

$$g^{p-1} - g = g(g^{p-2} - 1) \not\equiv 0 \pmod p.$$

Продолжая применять эндоморфизмы, мы исключим последовательно все $\Phi_i^{( )}(x, y)$ $(i = 2, 3, \ldots, p-1)$. В конце концов найдется

$$\varphi_{p-1}(x, y) = e^{\Phi_1^{(p-1)}(x, y) + \overline{P}_{p+1}(x, y) + \cdots + \overline{P}_{2p-2}(x, y) + \cdots} \in \mathfrak{G}(p),$$

причем

$$\Phi_1^{(p-1)}(x, y) \equiv \gamma\Phi_1^{(1)}(x, y) \equiv \gamma\alpha\Phi(x, y) \equiv \gamma\alpha[xy^{p-1}] \pmod p,$$

где $\gamma\alpha$ — некоторое целое число $\not\equiv 0 \pmod p$. Можно найти такое целое γ_1, что $\gamma\alpha\gamma_1 \equiv 1 \pmod p$, а тогда

$$\varphi_{p-1}(x, y)^{\gamma_1} = e^{\gamma\Phi_1^{(p-1)}(x, y) + \dots} \in \mathfrak{G}(p),$$

$$\gamma_1 \Phi_1^{(p-1)}(x, y) \equiv [xy^{p-1}] \pmod p.$$

Так как $\gamma_1\Phi_1^{(p-1)}(x, y) \in A_p$ и A_i можно считать модулями над $GF[p]$, то мы доказали таким образом теорему, из которой сразу следует соотношение (1), полученное впервые Цассенхаузом ([4]) другим путем.

ТЕОРЕМА 3. *В A_p, кроме pL_p, есть и другие элементы, именно, если x и y — любая пара производящих элементов x_i $(i = 1, 2, \dots)$, то $[xy^{p-1}] \in A_p$, но $\overline{\in} pL_p$.*

Оказывается, применяя эндоморфизмы и исключения методом, описанным выше, мы можем получить из элемента $[xy^{p-1}] \in A_p$ все элементы A_k $(k = p, p+1, \dots, 2p-2)$.

Чтобы доказать это, потребуются некоторые новые понятия.

Именно, нам потребуется обобщение понятия некоммутативного дифференцирования, приведенного у Хаусдорфа ([6]) [см. также ([12])].

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — свободные ассоциативные производящие свободного ассоциативного кольца $\mathfrak{A}$ с областью операторов — коммутативным кольцом C. Тогда оператор $\nu \frac{\partial}{\partial x_1}$ можно определить следующим образом.

Возьмем полином $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от $x_1, x_2, \dots, x_n$ с коэффициентами из C. Сделаем замену x_1 на $x_1 + \alpha\nu$, где α — переменное, коммутирующее со всеми x_i и элементами C. Тогда

$$P(x_1 + \alpha\nu, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= P(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha P_1(x_1, x_2, \dots, x_n; \nu) + \alpha^2 P_2(x_1, \dots, x_n; \nu) + \cdots .$$

Мы обозначаем

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \nu) = \left(\nu \frac{\partial}{\partial x_1}\right) P(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

например:

$$\left(\nu \frac{\partial}{\partial x_1}\right)(x_1 x_2 x_1^2) = \nu x_2 x_1^2 + x_1 x_2 \nu x_1 + x_1 x_2 x_1 \nu.$$

Оператор $\nu \frac{\partial}{\partial x_1}$ линейный. Мы будем его иногда обозначать через $\underset{x_1 \to \nu}{D}$. Если P и Q — два полинома от $x_1, x_2, \dots, x_n$ над C, то

$$\underset{x_1 \to \nu}{D}(PQ) = (\underset{x_1 \to \nu}{D} P) Q + P (\underset{x_1 \to \nu}{D} Q).$$

Пусть теперь $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1r_1}, \; P_{21}, \dots, P_{2r_2}, \dots, P_{nr_n}$ — какие-то полиномы из $\mathfrak{A}$. Пусть $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r_1}, a_{21}, \dots, a_{2r_2}, \dots, a_{nr_n}$ — переменные, коммутирующие друг с другом, $x_1, x_2, \dots, x_n$ и всеми элементами C.

Пусть имеем полином $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$. Сделаем в f замену:

$$x_1 \text{ на } x_1' = x_1 + a_{11}P_{11} + a_{12}P_{12} + \ldots + a_{1r_1}P_{1r_1},$$
$$x_2 \text{ на } x_2' = x_2 + a_{21}P_{21} + a_{22}P_{22} + \ldots + a_{2r_2}P_{2r_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n \text{ на } x_n' = x_n + a_{n1}P_{n1} + a_{n2}P_{n2} + \ldots + a_{nr_n}P_{nr_n}.$$

Тогда

$$f(x_1', x_2', \ldots x_n') = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_{\alpha_{ij} \geqslant 0} a_{11}^{\alpha_{11}} a_{12}^{\alpha_{12}} \cdots a_{1r_1}^{\alpha_{1r_1}} \cdots a_{nr_n}^{\alpha_{nr_n}} f(\alpha)(x_1, x_2, \ldots, x_n, P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{nr_n}),$$
$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} > 0,$$

где (α) означает распределение α_{ij}.

Определим оператор

$$\underset{\substack{k_{11}x_1 \to P_{11} \\ k_{12}x_1 \to P_{12} \\ \cdots\cdots \\ k_{1r_1}x_1 \to P_{1r_1} \\ \cdots\cdots \\ k_{nr_n}x_n \to P_{nr_n}}}{D} \tag{22}$$

следующим образом.

По определению, полагаем, что результат действия оператора (22) на $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет равен $f(\alpha)(x_1, x_2, \ldots, x_n, P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{nr_n})$ с таким распределением α_{ij}, когда $\alpha_{ij} = k_{ij}$. Очевидно, что оператор (22) линейный. Если все $k_{ij} = 0$, то тогда (22) определяем как единичный оператор.

Если ни одно слагаемое f не имеет полного набора множителей

$$(k_{11} + k_{12} + \cdots + k_{1r_1}) \quad x_1, \ (k_{21} + k_{22} + \cdots + k_{2r_2}) \quad x_2, \ldots,$$
$$(k_{n1} + k_{n2} + \cdots + k_{nr_n}) \quad x_n,$$

то результат действия оператора (22) на f будет равен нулю. Для оператора (22) будем иногда вводить сокращенное обозначение $\underset{k_{ij}x_i \to P_{ij}}{D}$ и называть его производной высшего порядка или просто производной. Операцию применения к полиному $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какой-либо производной, определенной таким образом, будем называть дифференцированием. Например:

$$\underset{\substack{2x_1 \to P \\ x_2 \to Q}}{D} (x_1^2 x_2^2 x_1) = P^2Qx_2x_1 + P^2x_2Qx_1 + Px_1Qx_2P +$$
$$+ Px_1x_2QP + x_1PQx_2P + x_1Px_2QP.$$

Мы используем несколько свойств дифференцирования, которые выскажем в виде лемм. Доказательства их получаются без всякого труда и не будут здесь приведены.

ЛЕММА 6. *Если f и g — два полинома из $\mathfrak{A}$, то*

$$\underset{k_{ij}x_i \to P_{ij}}{D}(f\cdot g) = \sum_{\substack{m_{ij}=0,1,2,\ldots,k_{ij}\\ i,j}} \underset{m_{ij}x_i \to P_{ij}}{D} f \cdot \underset{(k_{ij}-m_{ij})x_i \to P_{ij}}{D} g,$$

$$\underset{k_{ij}x_i \to P_{ij}}{D}(f\circ g) = \sum_{\substack{m_{ij}=0,1,2,\ldots,k_{ij}\\ i,j}} \underset{m_{ij}x_i \to P_{ij}}{D} f \circ \underset{(k_{ij}-m_{ij})x_i \to P_{ij}}{D} g.$$

Суммирование здесь производится по всевозможным независимым разбиениям k_{ij} на два неотрицательных слагаемым m_{ij} и $(k_{ij}-m_{ij})$, $\circ$ означает операцию, определяемую соотношением (7).

Рассмотрим в $\mathfrak{A}$ подмодуль всех полиномов Ли, порожденных сложением, вычитанием, умножением $\circ$ и скалярным умножением на элементы C из элементов $\mathfrak{A}$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим его через $\mathfrak{L}$.

ЛЕММА 7. *Если $f \in \mathfrak{L}$ и все $P_{ij} \in \mathfrak{L}$, то и*

$$\underset{k_{ij}x_i \to P_{ij}}{D} f \in \mathfrak{L}.$$

Оператор $\underset{k_{ij}x_i \to P_{ij}}{D} f$ в случае совпадения некоторых полиномов $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{ir_i}$ упрощается. Например, если $P_{11}=P_{12}=\cdots=P_{1a}$, то тогда

$$\frac{(k_{11}+k_{12}+\cdots+k_{1a})!}{k_{11}!\,k_{12}!\cdots k_{1a}!}$$

слагаемых в разложении $\underset{k_{ij}x_i \to P_{ij}}{D} f$ одинаковы и могут быть объединены в одно. В этом случае получается следующее тождество:

$$\underset{\substack{k_{11}x_1 \to P_{11}\\ k_{12}x_1 \to P_{11}\\ \cdots\cdots\\ k_{1a}x_1 \to P_{11}\\ k_{1a+1}x_1 \to P_{1a+1}\\ k_{1r_1}x_1 \to P_{1r_1}\\ \cdots\cdots\\ k_{nr_n}x_n \to P_{nr_n}}}{D} f = \frac{(k_{11}+k_{12}+\cdots+k_{1a})!}{k_{11}!\,k_{12}!\ldots k_{1a}!} \underset{\substack{(k_{11}+k_{12}+\cdots+k_{1a})x_1 \to P_{11}\\ k_{1a+1}x_1 \to P_{1a+1}\\ \cdots\cdots\\ k_{1r_1}x_1 \to P_{1r_1}\\ \cdots\cdots\\ k_{nr_n}x_n \to P_{nr_n}}}{D} f \tag{23}$$

и аналогичные тождества при других совпадениях P_{ij}.

ЛЕММА 8. *Повторное выполнение одного дифференцирования, а затем произвольного другого равносильно сумме конечного числа каких-то дифференцирований. При этом дифференцирование рассматривается как линейное преобразование модуля всех полиномов, входящих в $\mathfrak{A}$.*

Например:

$$\underset{3x_1 \to Q}{D}\ \underset{\substack{x_1 \to P_1\\ x_3 \to P_2}}{D} f = \underset{\substack{3x_1 \to Q\\ x_2 \to P_1\\ x_3 \to P_2}}{D} f + \underset{\substack{2x_1 \to Q\\ x_2 \to \underset{x_1 \to Q}{D} P_1\\ x_3 \to P_2}}{D} f + \underset{\substack{2x_1 \to Q\\ x_2 \to P_1\\ x_3 \to \underset{x_1 \to Q}{D} P_2}}{D} f + \underset{\substack{x_1 \to Q\\ x_2 \to \underset{x_1 \to Q}{D} P_1\\ x_3 \to \underset{x_1 \to Q}{D} P_2}}{D} f +$$

$$+ \underset{\substack{x_1 \to Q\\ x_2 \to P_1\\ x_3 \to \underset{2x_1 \to Q}{D} P_2}}{D} f + \underset{\substack{x_1 \to Q\\ x_2 \to \underset{2x_1 \to Q}{D} P_1\\ x_3 \to P_2}}{D} f + \underset{\substack{x_2 \to \underset{3x_1 \to Q}{D} P_1\\ x_3 \to P_2}}{D} f + \underset{\substack{x_2 \to P_1\\ x_3 \to \underset{3x_1 \to Q}{D} P_2}}{D} f +$$

$$+ \underset{\substack{x_2 \to \underset{x_1 \to Q}{D} P_1\\ x_3 \to \underset{2x_1 \to Q}{D} P_2}}{D} f + \underset{\substack{x_2 \to \underset{2x_1 \to Q}{D} P_1\\ x_3 \to \underset{x_1 \to Q}{D} P_2}}{D} f.$$

Последняя лемма показывает, что совокупность всех дифференцирований образует подкольцо кольца линейных преобразований модуля всех полиномов $\mathfrak{A}$, причем это кольцо допускает ту же область операторов — кольцо C. Также, если рассматривать только дифференцирования такие, что все $P_{ij} \in \mathfrak{L}$, то, как показывают леммы 7 и 8, совокупность этих дифференцирований образует подкольцо кольца линейных преобразований модуля $\mathfrak{L}$ с той же областью операторов C.

Мы говорим, что идеал $\mathfrak{B}$ кольца Ли $\mathfrak{L}$ порождается элементами $w_1, w_2, \ldots, \in \mathfrak{L}$, если любой элемент $\mathfrak{B}$ представи́м в виде суммы конечного числа слагаемых вида
$\alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \ldots, (\ldots((w_1 \circ a_1) \circ a_2) \ldots) \circ a_k \ldots, (\ldots((w_2 \circ b_1) \circ b_2) \ldots) \circ b_s, \ldots,$
где $k, s, \ldots,$ — любые целые числа > 0, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ принадлежат области операторов C, a_i, $b_j, \ldots$ принадлежат $\mathfrak{L}$.

После введения новых понятий и последнего определения перейдем к дальнейшему исследованию строения идеала A для периодических групп с периодом p — простым числом.

Из теоремы 1 следует, что $\mathfrak{L}$ и A можно рассматривать над конечным полем $GF[p]$ (т. е. $p\mathfrak{L} = 0$). Мы показали, что $[xy^{p-1}] \in A$, где x и y — любая пара элементов из совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Введем в $\mathfrak{L}$ идеал J, порожденный всеми элементами $\mathfrak{L}$ вида

$$\underset{\substack{x_1 \to P \\ k_1 y \to P_1 \\ k_2 y \to P_2 \\ \cdots\cdots \\ k_r y \to P_r}}{D} [xy^{p-1}], \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_2 = p - 1,$$

где $P, P_1, P_2, \ldots, P_r$ — произвольные элементы $\mathfrak{L}$.

Вследствие дистрибутивности $[xyy \ldots y]$ в каждом множителе для получения базиса этого идеала (порождающих элементов) достаточно взять в качестве P и P_i одночлены Ли, так как эти одночлены являются базисом $\mathfrak{L}$.

Теперь, на основании лемм 6 и 8, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Идеал J инвариантен относительно всех производных кольца $\mathfrak{L}$, т. е. если D — произвольная производная кольца $\mathfrak{L}$* (т. е. все $P_{ij} \in \mathfrak{L}$), *то $DJ \subset J$, причем под DJ мы понимаем совокупность элементов вида Dj, где $j \in J$.*

Доказательство. Так как любое w_i является производной $[xy^{p-1}]$, $w_i = D_i[xy^{p-1}]$, то

$$Dw_i = DD_i [xy^{p-1}].$$

Произведение линейных преобразований DD_i является суммой конечного числа каких-то производных, поэтому $Dw_i \in J$. Применяя несколько раз вторую формулу леммы 6, мы сведем, например, $D((\ldots((w_1 \circ a_1) \circ a_2) \ldots) \circ a_t)$ к сумме конечного числа слагаемых вида

$$(\ldots((D_\alpha w_1 \circ D_{\alpha_1} a_1) \circ D_{\alpha_2} a_2) \circ \ldots) \circ D_{\alpha_t} a t,$$

где $D_{\alpha i}$ — какие-то производные. Так как $D_\alpha w_i \in J$, то и все произведение $\in J$, и так как оператор D линеен, то теорема доказана.

ЛЕММА 9. *Пусть* $\mathfrak{G} = \{e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_k}\}$, $g_1 = e^{x_i}$ — *показательное представление свободной группы и пусть элемент* $g \in \mathfrak{G}$ *имеет вид*

$$g = e^{P_m + P_{m+1} + P_{m+2} + \cdots},$$

где P_m — *полином Ли степени* m *с целыми коэффициентами, а* $P_i\,(i > m)$ — *полиномы Ли с рациональными коэффициентами степени* i. *Тогда полиномы* $P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_{m+p-2}$ *имеют* p*-целые коэффициенты при выражении их в виде линейных комбинаций через некоторый базис* $\mathfrak{L}$, *состоящий из правонормированных произведений Ли.*

Доказательство. Надо сперва вспомнить первоначальное магнусовское представление свободной группы ([1]). Производящие элементы этой группы представляются в виде рядов $g_i = 1 + x'_i$, где $x'_1, x'_2, \ldots$ — свободные образующие ассоциативного свободного кольца. Тогда элемент $g \in \mathfrak{G}$ представится в виде ряда

$$g = 1 + Q_1(x'_1, x'_2, \ldots) + Q_2(x'_1, x'_1, x'_2, \ldots) + \cdots,$$

где $Q_i(x'_1, x'_2, \ldots,)$ — полиномы с целыми коэффициентами. Из соотношения $g_i = 1 + x'_i$ следует, что

$$g = 1 + Q_m(x'_1, x'_2, \ldots,) + Q_{m+1}(x'_1, x'_2, \ldots) + \cdots,$$

причем $Q_m(x'_1, x'_2, \ldots)$ — целочисленный полином такой, что

$$Q_m(x_1, x_2, \ldots) = P_m(x_1, x_2, \ldots).$$

Действительно, связь между этими двумя представлениями осуществляется следующим образом.

Если сделать замену $1 + x'_i = e^{x_i}$, т. е. $x'_i = e^{x_i} - 1$ и

$$x_i = \log(1 + x'_i) = x'_i - \frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i^3}{3} - \cdots,$$

то одно представление переходит в другое, т. е. при замене

$$x'_i = x_i + \frac{x_i^2}{2!} + \frac{x_i^3}{3!} + \cdots$$

ряд для $g(x'_1, x'_2, \ldots)$ перейдет в ряд для $g(x_1, x_2, \ldots)$, т. е. в ряд $e^{P_m + P_{m+1} + \cdots}$

Посмотрим, как осуществляется этот переход. При замене в $g(x'_1, x'_2 \cdots)$ x'_i на x_i посредством показательного ряда получаем

$$g(x'_1, x'_2, \ldots) = g(x_1, x_2, \ldots) =$$
$$= 1 + Q_m(x_1, x_2, \ldots) + Q'_{m+1}(x_1, x_2, \ldots) + Q_{m+2}(x_1, x_2, \ldots) + \cdots.$$

Из того, что все коэффициенты полиномов Q_i — целые, следует, что коэффициенты полиномов Q'_{m+i} при $i = 0, 1, \ldots, p-2$ будут p-целые,

так как если в знаменателе коэффициента появится p, то это неизбежно повысит степень полинома не менее чем на $p-1$. Теперь

$$P_m + P_{m+1} + \cdots = \log(1+z),$$

где $z = Q_m + Q'_{m+1} + Q'_{m+2} + \cdots$,

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}.$$

В этом ряде p может появиться в знаменателе коэффициента снова лишь при повышении степени не менее чем на $p-1$. Итак, все полиномы P_{m+i} $(i = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$ имеют p-целые коэффициенты, а потому и в полиномы Ли они могут быть перестроены на основании леммы 1 во введении так, что у них останутся p-целые коэффициенты, и лемма 9 доказана.

ТЕОРЕМА 5. $J \subseteq A$.

Докажем, что все базисные элементы J содержатся в A. В качестве базиса J можно взять все элементы $\mathfrak{L}$ вида $\underset{\substack{x \to p \\ k_1 y_1 \to Q_1 \\ k_2 y_2 \to Q_2 \\ \cdots\cdots \\ k_r y_r \to Q_r}}{D} [xy^{p-1}]$, где $P, Q_1, \ldots, Q_2$ — одночлены Ли и $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = p - 1$.

Доказательство для простоты ведем для $p = 5$ (при любом p оно проводится аналогично).

Пусть $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_k, u, v, u_1, u_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ обозначают свободные в совокупности производящие свободного ассоциативного кольца, а $\mathfrak{G}$ — каждый раз свободная группа, порожденная показательными функциями (13) от переменных $x, y, x_1, x_2, \ldots, u, v, u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, z_1, z_2, \ldots$.

Так как $[xy^4] \in A$, то для группы $\mathfrak{G} = \{e^x, e^y\}$ найдется элемент, у которого в показательном представлении начальный член будет пятой степени и совпадать с $[x, y^4]$, причем

$$e^{[xy^4] + P_6 + P_7 + \cdots} \in \mathfrak{G}(5),$$

где $\mathfrak{G}(5)$ — группа, порожденная всеми пятыми степенями элементов $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{G}(5)$ — вполне характеристическая группа, более того, она любым гомоморфизмом переводится в соответствующую группу $F(5)$, где F — образ $\mathfrak{G}$.

Производя эндоморфизм $e^x \to e^x$, $e^y \to e^{a_1 z_1} e^{a_2 z_2} e^{a_3 z_3} e^{a_4 z_4}$, где a_i — целые числа, мы за счет комбинирования получившихся элементов с различными значениями a_1, a_2, a_3, a_4 получаем:

$$e^{\sum\limits_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)} [x_1 z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} z_{\alpha_3} z_{\alpha_4}] + P_6(x_1, z_i) + P_7(x_1, z_i) + \cdots} \in \mathfrak{G}(5). \qquad (a)$$

Здесь начальная сумма — не что иное, как

$$\underset{\substack{x \to x_1 \\ y \to z_1 \\ y \to z_2 \\ y \to z_3 \\ y \to z_4}}{D} [xy^4],$$

где x_1, z_1, z_2, z_3, z_4 — свободные производящие кольца. В начальном слагаемом показателя (а) вместо x_1, z_1, z_2, z_3, z_4 надо подставить одночлены Ли P, Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4. Для этого, казалось бы, в (а) надо осуществить эндоморфизм

$$e^{x_1} \to e^{P+\cdots}, \quad e^{z_i} \to e^{Q_i+\cdots}$$

(многоточие означает члены высших степеней), т. е. в формуле (а) заменить x_1 на $P + \ldots$, z_i — на $Q_i + \cdots$. Однако возможен такой случай, что хотя $P_6(x_1, z_i)$ имеет большую степень, чем начальный член, но после замены начальный член $P_6(x_1, z_i)$ окажется меньшей степени, чем начальный член, получившийся из первого слагаемого. Для того чтобы избежать этого, используя метод исключения слагаемых, примененный при доказательстве теоремы 3, показываем, что, наряду с (а), найдется в $\mathfrak{G}(5)$ элемент вида

$$e^{\alpha \sum\limits_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)} [x, z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} z_{\alpha_3} z_{\alpha_4}] + P_9 + P_{10} + \cdots} \in \mathfrak{G}(5),$$

где α — целое $\not\equiv 0 \pmod p$.

Применим процесс постепенной замены x_1, z_1, z_2, z_3, z_4 на одночлены $P_1 Q_1$, Q_2, Q_3, Q_4. Проведем это подробно для x_1. Пусть, например, вместо x_1 надо подставить $[xyxyxy^2]$. Делаем замены последовательно:

$$x_1 = [u_1 y], \quad u_1 = [u_2 y], \quad u_2 = [u_3 x], \quad u_3 = [u_4 y], \quad u_4 = [u_5 x],$$
$$u_5 = [u_6 y], \quad u_6 = x.$$

Замена осуществляется посредством групповых эндоморфизмов

$$e^{x_1} \to e^{[u_1 y]+\cdots}, \quad e^{u_1} \to e^{[u_2 y]+\cdots}, \ldots,$$

остальные производящие переходят каждый раз сами в себя.

При этом начальная степень P_9, P_{10}, ... может и не увеличиться, но после замены степень начального элемента $\alpha \sum [x, z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, z_{\alpha_3}, z_{\alpha_4}]$ увеличивается каждый раз на единицу и следующие три места можно освободить методом исключения. В конце концов мы полностью заменим x_1 на $[xyxyxy^2]$. Аналогично заменяем и все z_i. Если же нам надо некоторые z_i сделать равными, т. е. получить производную при кратных заменах y, то делаем это так же, как и выше, считая некоторые z_i одинаковыми.

Полученная производная будет сводиться к кратной производной посредством z_k при помощи формулы типа формулы (23). Получившийся коэффициент будет при этом $\not\equiv 0 \pmod p$, так как все числа, из которых составляются факториалы, меньше p.

Итак, мы получим, что

$$e^{D[xy^{p-1}]+\cdots} \in \mathfrak{G}(5),$$

а это и означает, что все $D[xy^{p-1}] \subset A$, $J \subseteq A$. Теорема доказана.

Очевидно, что идеал J имеет базис, состоящий из однородных полиномов Ли, так же как и идеал A.

Можно высказать гипотезу: $A = J$. Доказать ее во всей общности не удалось, можно доказать только следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Для любого простого числа p для прямой суммы модулей имеет место включение:*

$$A_p + A_{p+1} + \cdots + A_{2p-2} \subset J.$$

Для доказательства нам потребуется

ЛЕММА 10. *В формуле $e^z = e^x e^y$*

$$z = H_1(x, y) + H_2(x, y) + \cdots + H_{p-1}(x, y) + H_p(x, y) + \cdots$$
$$\cdots + H_{2p-2}(x, y) + \cdots,$$

многочлены $H_i(x, y)$ степени i устроены так, что если заменить p-целые коэффициенты многочлена pH_i $(i = p, p+1, \ldots, 2p-2)$ на классы вычетов по $(\operatorname{mod} p)$ *или на элементы конечного поля $GF[p]$, то тогда $pH_i \in J$, где J — идеал, порожденный в кольце Ли $\mathfrak{L}(x, y)$ над конечным полем $GF[p]$ всеми производными $D[xy^{p-1}]$.*

Многочлены H_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ имеют p-целые коэффициенты. Случай $p = 2$ получается как следствие теоремы 3. Далее считаем $p > 2$.

Для доказательства используем представление z, данное в формуле (16); $\nu = \omega_1(x, y)$ имеет такое строение, какое должно иметь z в лемме, так как

$$\nu = \omega_1(x, y) = x + \frac{1}{2}[xy] + \frac{B_1}{2!}[xy^2] - \frac{B_2}{4!}[xy^4] + \frac{B_3}{6!}[xy^6] - \cdots.$$

Так как первое B_i, имеющее p в знаменателе, будет $B_{\frac{p-1}{2}}$, то и соответствующий коэффициент $\frac{B_{\frac{p-1}{2}}}{(p-1)!}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ имеет p в знаменателе в первой степени.

Одночлен $[xy^{p-1}] \subset J$.

До $(2p-2)$-й степени включительно в знаменателе попадается только одно p и все одночлены $[xy^{2k}] \in J$ при $2k > p-1$. Далее,

$$\omega_2(x, y) = \left(\nu \frac{\partial}{\partial y}\right) \omega_1(x, y);$$

это выражение дистрибутивно как относительно ν, так и относительно $\omega_1(x, y)$. Нам надо рассмотреть все производные

$$\left(a_w w \frac{\partial}{\partial y}\right)(b_u \cdot u),$$

где a_w и b_u — рациональные дроби, w и u — одночлены, входящие соответственно в ν и ω_1.

Если при умножении на p это выражение не обращается в 0 (по $\operatorname{mod} p$), то, значит, в знаменателе a_w или b_u есть p.

Если p — в знаменателе a_w, то w имеет степень $\geqslant p$, а потому $\in J$, и при дифференцировании получаем многочлен вида $\frac{1}{p} P$, где $P \in J$.

Если p — в знаменателе b_u, то u имеет степень $\geqslant p$, $u \in J$, а потому $\left(a_w w \frac{\partial}{\partial y}\right) u \in J$, так как J инвариантен относительно всех дифференцирований.

Если a_w и b_u оба имеют p в знаменателе, то степень u и $v \geqslant p$, а потому степень $\left(a_w w \frac{\partial}{\partial y}\right)(b_u u) \geqslant 2p-1$, т. е. степень слагаемого выходит за рассматриваемые пределы.

Это доказывает, что $\omega_2(x, y)$ имеет требуемую структуру. Далее рассуждаем аналогично для $\omega_3(x, y)$, $\omega_4(x, y)$ и т. д. до $\omega_{p-1}(x, y)$:

$$z = y + \omega_1(x, y) + \frac{1}{2!}\omega_2(x, y) + \frac{1}{3!}\omega_3(x, y) + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\omega_{p-1}(x, y) + \cdots.$$

Сумма первых p-слагаемых имеет требуемую структуру. Действительно, в ней собраны все слагаемые степени до $(p-1)$-й в x. То, что остальные слагаемые степени $\leqslant 2p-2$, умноженные на p, тоже $\in J$, доказывается по симметрии так же, как это делалось ранее. Если

$$z = z(x, y),$$

то

$$z = -z(-y_1 - x).$$

Отсюда следует, что слагаемые до $(p-1)$-й степени в y после умножения на p принадлежат идеалу J_1, порожденному всеми производными $D[yx^{p-1}]$. Но так как

$$\underset{\substack{x \to y \\ (p-1)\, y \to x}}{D} [xy^{p-1}] = [yx^{p-1}]$$

и произведение дифференцирований является суммой дифференцирований, то $J_1 \subseteq J$, также $J \subseteq J_1$, $J = J_1$ и все слагаемые до $(p-1)$-й степени в y по умножении на p принадлежат J. Этими многочленами исчерпываются слагаемые до степени $2p-2$, и лемма 10 доказана.

Докажем теперь теорему 6.

Рассмотрим выражение любого элемента $\mathfrak{G}(p)$ в виде ряда

$$g = e^{P_1 + P_2 + \cdots + P_p + \cdots + P_{2p-2} + \cdots}. \tag{24}$$

Леммы 4 и 5 показывают, что P_i при $p \leqslant i \leqslant 2p-2$ имеют p-целые коэффициенты и если их рассматривать по $\bmod p$, то они образуют модуль $\{P_i\}$. Докажем, что $\{P_i\} \in J$.

Вследствие леммы 5, достаточно доказать, что любой элемент g_1, являющийся p-й степенью элемента $\mathfrak{G}$, будет иметь $P_i \in J$, если коэффициенты P_i рассматривать как элементы $GF[p]$.

Для этого рассмотрим произвольный элемент $g \in \mathfrak{G}$, тоже представленный в виде (24).

Так как

$$g^p = e^{pP_1 + pP_2 + \cdots + pP_p + \cdots + pP_{2p-2} + \cdots}, \tag{25}$$

то надо доказать, что в (25) $pP_i \in J$ при $i \leqslant 2p-2$.

Производящие элементы и обратные им имеют требуемое свойство. Введем высоту элемента $\mathfrak{G}$ — наименьшее число множителей $e^{\pm x_1}$, $e^{\pm x_2}$, ..., в виде произведения которых он может быть выражен.

Пусть уже в (25) включение $pP_i \in J$ доказано для всех элементов $\mathfrak{G}$ высоты $< h$. Докажем это включение для элементов высоты h. Любой

элемент $g \in \mathfrak{G}$ высоты h имеет вид $g = g' e^{\pm x}$, где e^{x_i} — производящий элемент $\mathfrak{G}$, а g' — элемент $\mathfrak{G}$ высоты $h-1$; $g' = e^{P_1 + P_2 + \cdots + P_{2p-2} + \cdots}$, и по индукционному предположению,

$$pP_i \in J \quad (i = p,\ p+1, \ldots, 2p-2).$$

Обозначим

$$z_1 = P_1 + P_2 + \cdots + P_{2p-2} + \cdots,$$

$$z_2 = \pm x_i,$$

$$g = e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_3},$$

$$z_3 = H_1(z_1, z_2) + H_2(z_1, z_2) + \cdots + H_p(z_1, z_2) + \cdots + H_{2p-2}(z_1, z_2) + \cdots.$$

Рассмотрим в H_i все члены степени m при замене z_1 и z_2 их выражениями. Из определения производной D следует, что после такой замены H_i будет равно сумме всевозможных производных

$$\underset{\substack{k_1 x \to P_1 \\ k_2 x \to P_2 \\ \cdots\cdots \\ k_r x \to P_r \\ k_{r+1} y \to \pm x_i}}{D} H_i(x, y) \quad (k_1 + k_2 + \cdots + k_r + k_{r+1} = i).$$

Умножим это выражение на p и будем отбирать члены степени m, где $p \leqslant m \leqslant 2p-2$.

1) $p \leqslant i \leqslant 2p-2$. Тогда $pH_i(x, y) \in J$. Если все полиномы $P_1, P_2, \ldots, P_r$ имеют p-целые коэффициенты, то, по доказанному, такие производные $pH_i(x, y)$ тоже $\in J$. Если в производной встретилось хоть одно P_j с коэффициентами не p-целыми, то его степень обязательно $\geqslant p$ и степень производной $\geqslant 2p-1$, т. е. такие производные не попадают в число рассматриваемых слагаемых.

2) $i < p$. Рассмотрим $pDH_i(x, y)$. Если два x в производной переводятся в P_j с не p-целыми коэффициентами, то степени этих $P_j \geqslant p$ и общая степень $\geqslant 2p$, т. е. не подходит. Итак, в рассматриваемых слагаемых P_j степени $\geqslant p$ либо совсем не будет встречаться, либо встречается только одно.

В последнем случае объединяем p с этим P_j, $pP_j \subset J$; производная $\in J$, так как J — идеал в кольце Ли. В первом случае $pDH_i(x, y) \equiv 0 \pmod{p}$, т. е. $\in J$ тривиальным образом.

Таким образом, все слагаемые, получающиеся из $H_i(z_1, z_2)$ группировкой членов степени m ($p \leqslant m \leqslant 2p-2$, $i = 1, 2, \ldots, 2p-2$), при умножении на p принадлежат J.

Следовательно, и сумма этих слагаемых тоже обладает требуемым свойством. Так как это свойство выполнено при $h = 1$, то оно выполняется и для всех элементов g произвольной длины h. Отсюда, в частности, следует, что $A_m \subset J$ ($m \leqslant 2p-2$), так как A_m состоит из всех начальных полиномов степени m в показателе элементов пересечения $\mathfrak{G}(p) \cap \mathfrak{G}_m$. Так как это верно при $m = p, p+1, \ldots, 2p-2$, то отсюда непосредственно следует теорема 6.

§ 3. Применение полученных результатов

В качестве примеров разберем строение модуля $A_5 + A_6 + A_7 + A_8$ при $p = 5$ и двух производящих элементов и строение модуля $A_3 + A_4$ при $p = 3$ при любом числе производящих элементов.

1. Периодическая группа с периодом 5 и двумя производящими элементами. Пусть $F = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}(5)$, $\mathfrak{G}\{e^x, e^y)$ — свободная группа, x и y — производящие свободной ассоциативной алгебры над полем рациональных чисел, $\mathfrak{L}$ — кольцо Ли, порожденное x и y над полем $GF[5]$, J — идеал $\mathfrak{L}$, порожденный всеми производными $[xy^{p-1}]$.

Базис кольца целочисленных полиномов Ли является базисом и $\mathfrak{L}$, так как, на основании леммы 1 во введении, базис кольца целочисленных полиномов Ли линейно независим и по $\bmod p$, т. е. над $GF[p]$.

Для двух производящих у нас уже был найден базис для полиномов степеней от 1 до 7 включительно. Над $GF[p]$ ранг $L_1 = 2$, ранг $L_2 = 1$, ранг $L_3 = 2$, ранг $L_4 = 3$, ранг $L_5 = 6$, ранг $L_6 = 9$, ранг $L_7 = 18$, ранг $L_8 = 30$. Теорема 2 дает тогда:

$$F_i/F_{i+1} \simeq L_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Отсюда следует, что порядок $F_1/F_2 = 5^2$, порядок $F_2/F_3 = 5$, порядок $F_3/F_4 = 5^2$, порядок $F_4/F_5 = 5^3$, т. е. порядок $F/F_5 = 5^8$.

Для нахождения порядков следующих фактор-групп убывающего центрального ряда надо найти базисы A_5, A_6, A_7, A_8. Так как

$$A_5 \dotplus A_6 \dotplus A_7 \dotplus A_8 \subseteq J \subseteq A,$$

то достаточно рассмотреть часть базиса J над полем $GF[5]$, состоящего из однородных полиномов Ли. Нам нужны полиномы этого базиса степени меньше 9.

Идеал J порождается в $\mathfrak{L}$ всеми производными $D[xy^4]$. Так как $A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_8 \subset J$, то все A_i $(i \leqslant 8)$ будут порождены как аддитивные группы производными $D[xy^4]$.

Будем иногда элементы идеала A называть соотношениями (кольца $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}/A$).

(a) A_5. Надо найти все производные $D[xy^4]$, дающие полиномы степени 5.

Очевидно, любая такая производная не может заменять элементы x и y на полиномы степени выше первой, так как тогда степень получающегося многочлена будет больше пяти.

Итак, для получения базиса A_5 необходимы следующие производные: тождественная $[xy^4]$,

$$\underset{y\to x}{D}[xy^4] = [xxy^3] + [xyxy^2] + [xy^2xy] + [xy^3x] \equiv [xy^3x] - 3[xy^2xy] \pmod 5,$$

$$\underset{2y\to x}{D}[xy^4] = [xyx^2y] + [xyxyx] + [xy^2x^2] \equiv -[yx^3y] + 3[yx^2yx] \pmod 5,$$

$$\underset{3y\to x}{D}[xy^4] = [xyx^3] = -[yx^4].$$

Так как $[yx^4]$ получается дифференцированием из $[xy^4]$ и произведение дифференцирований равно сумме дифференцирований, то при дифференцировании $[yx^4]$ ничего нового не получим.

Остальные производные, в которых встречаются одновременные замены x и y, новых независимых элементов не дают.

Получившиеся черыре элемента $\in A_5$ не равны нулю в $\mathfrak{L}$ и линейно независимы, так как все разных степеней в x. Других способов получения соотношений в A_5 нет, так как повторные производные сводятся к линейной комбинации первичных.

Итак, ранг A_5 равен 4, ранг L_5/A_5 равен 2, порядок F_5/F_6 равен порядку $L_5/A_5 = 5^2$.

(b) A_6. Из базиса A_5 домножением на $\circ x$ и $\circ y$ мы получим серию элементов A_6. Поэтому A_6 содержит:

1) $[xy^5]$,
2) $[xy^4x]$,
3) $[yx^5]$,
4) $[yx^4y]$,
5) $[xy^3x^2] - 3\,[xy^2xy]$.

При домножении еще войдут элементы:

$$[xy^3xy] - 3\,[xy^2xy^2] = \frac{[xy^4x] + [xy^2x\ y^2]}{2} - 3\,[xy^2xy^2] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[xy^4x] - \frac{5}{2}\,[xy^2xy^2] = 3\,[xy^4x] \pmod{5}.$$

Таким образом, этот элемент уже линейно зависит от элемента 2).

Так же элемент

$$[yx^3y^2] - 3\,[yx^2yxy] = -\{[xy^3x^2] - 3\,[xy^2xyx]\}$$

линейно зависит от элемента 5).

При этом мы использовали тождественные соотношения, выведенные для одночленов Ли степени 6.

Из лемм для производных следует, что любое дифференцирование элементов 1), 2), 3), 4), 5) не даст новых линейно независимых элементов A_6, так как эти производные могут заменять x только на x или y и y на x или y, а такие производные не прибавляют новых линейно независимых элементов A_5.

Остается проверить линейную независимость от элементов 1) — 5) производных следующего вида:

$$\underset{\substack{y\to x\\ y\to[xy]}}{D}[xy^4],\quad \underset{\substack{2y\to x\\ y\to[xy]}}{D}[xy^4],\quad \underset{y\to[xy]}{D}[xy^4],\quad \underset{\substack{3y\to x\\ y\to[xy]}}{D}[xy^4],$$

$$\underset{x\to[xy]}{D}[xy^4],\quad \underset{\substack{x\to[xy]\\ y\to x}}{D}[xy^4],\quad \underset{\substack{x\to[xy]\\ 2y\to x}}{D}[xy^4],\quad \underset{\substack{x\to[xy]\\ 3y\to x}}{D}[xy^4],\quad \underset{\substack{x\to[xy]\\ 4y\to x}}{D}[xy^4].$$

Выкладки делаем, пользуясь найденными тождественными соотношениями в кольце Ли, сравнениями по mod 5 и сравнениями по mod M, порожденному уже известными элементами A_6 1) — 5).

Если в результате таких преобразований мы от полинома Ли P приходим к полиному Ли Q, то говорим, что $P=Q$ на основании соотношений 1) — 5), или разность $P-Q$ — следствие этих соотношений.

Если полином Ли $P=Q$ на основании соотношений 1) — 5) и $Q=0$ или Q является полиномом, очевидным образом принадлежащим M, то это значит, что и P принадлежит M, т. е. линейно зависит от элементов A_6 1) — 5).

$$\underset{x\to[xy]}{D}[xy^4]=[[xy]\,y^4]=[xy^5] \text{ совпадает с 1);}$$

$$\underset{\substack{x\to[xy]\\ y\to x}}{D}[xy^4]=[xy\,xy^3]+[xy^2xy^2]+[xy^3xy]+[xy^4x]=$$

$$=2[xy^2xy^2]+\frac{[xy^4x]+[xy^2xy^2]}{2}+[xy^4x]\equiv 4[xy^4x]\ (\mathrm{mod}\ 5) \text{ совпадает с 2);}$$

$\underset{\substack{x\to[xy]\\ 3y\to x}}{D}[xy^4]$ только знаком отличается от того, что получится в предыдущем случае при перемене x и y местами.

$\underset{\substack{x\to[xy]\\ 2y\to x}}{D}[xy^4]$ на основании соотношения 5) имеет слагаемые:

$$\begin{aligned}
[xy^3x^2]&\equiv 3[xy^2xyx],\\
[xy^2xyx]&=[xy^2xyx],\\
[xy\,xy\,xy]&=-[yx^2yxy],\\
[xy^2xy^2]&=-[yx^2yxy],\\
[xy\,xy^2x]&=[xy^2xyx],\\
[xyx^2y^2]&=-[yx^3y^2]\equiv-3[yx^2yxy].
\end{aligned}$$

Суммируя, получим (на основании соотношения 5)):

$$D[xy^4]\equiv 5[xy^3xyx]-5[yx^2yxy]\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ 5),$$

т. е. эта производная есть следствие соотношения 5). Далее,

$$\underset{y\to[xy]}{D}[xy^4]=[x[xy]\,y^3]+[xy[xy]\,y^2]+[xy^2[xy]\,y]+[xy^3[xy]]=$$

$$=-[xyxy^3]+0+[xy^2xy^2]-[xy^3xy]+[xy^3xy]-[xy^4x]=-[xy^4x],$$

т. е. эта производная лишь знаком отличается от 2).

$\underset{\substack{3y\to x\\ y\to[xy]}}{D}[xy^4]$ есть следствие 3).

$\underset{\substack{x\to[xy]\\ 4y\to x}}{D}[xy^4]=[xyx^4]=-[yx^5]$ лишь знаком отличается от 3).

$\underset{\substack{2y\to x\\ y\to[xy]}}{D}[xy^4]$ имеет следующие ненулевые слагаемые:

$$\begin{aligned}
[xyx[xy]\,x]&=[xyx^2yx]-[xyxyx^2],\\
[xyx^2[xy]]&=[xyx^3y]-[xyx^2yx],\\
[x[xy]\,yx^2]&=-[xyxyx^2],\\
[x[xy]\,xyx]&=-[xyx^2yx],\\
[x[xy]\,x^2y]&=-[xyx^3y].
\end{aligned}$$

Суммируя, получаем

$$\frac{5}{2}[yx^2yx^2]+\frac{1}{2}[yx^4y]\equiv 3[yx^4y] \pmod 5.$$

$\underset{\substack{y\to x\\ y\to[xy]}}{D}[xy^4]$ имеет следующие ненулевые слагаемые:

$$\begin{aligned}
[xyxy[xy]] &= [xyxyxy]-[xyxy^2x],\\
[xyx[xy]y] &= [xyx^2y^2]-[xyxyxy],\\
[xy^2x[xy]] &= [xy^2x^2y]-[xy^2xyx],\\
[xy^2[xy]x] &= [xy^2xyx]-[xy^3x^2],\\
[x[xy]xy^2] &= -[xyx^2y^2],\\
[x[xy]yxy] &= -[xyxyxy],\\
[x[xy]y^2x] &= -[xyxy^2x].
\end{aligned}$$

Суммируя, получим

$$-2[xy^2xyx]-[xy^3x^2]\equiv 3[xy^2xyx]-[xy^3x^2] \pmod 5,$$

т. е. производная только знаком отличается от 5).

Мы не рассматривали еще всех производных вида $\underset{x\to y}{D}[yx^4]$; все они получаются из уже исследованных производных перестановкой x и y, а так как соотношения 1) — 5) симметричны относительно x и y, то новых соотношений не получится.

На основании определения и свойств J и теоремы 6, § 2 очевидно, что других линейно независимых элементов A_6 нет. Ранг $A_6=5$, ранг $L_6=9$, ранг $L_6-A_6=4$, а не 1, как это дано в работе Грюна ([5]).

Отсюда следует, что порядок $F_6/F_7=5^4$.

Мною построены базисы A_7 и A_8. Приведу только результат без подробных вычислений.

(c) A_7. Домножением элементов A_6 получаем в A_7 линейно независимые элементы:

1) $[xy^6]$,	6) $[yx^4y^2]$,
2) $[xy^5x]$,	7) $[yx^4yx]$,
3) $[xy^4x^2]$,	8) $[xy^4xy]$,
4) $[yx^6]$,	9) $[xy^3x^3]-3[xy^2xyx^2]$,
5) $[yx^5y]$,	10) $[yx^3y^3]-3[yx^2yxy^2]$.

Далее, получаем элементы

11) $[yx^2yx^3]$,

12) $[xy^2xy^3]$;

11) — производная с обратным знаком $\underset{y\to[xy^3]}{D}[yx^4]$, а 12) — симметричный элемент, получающийся путем перестановки x и y (это действие — тоже дифференцирование).

Далее имеем:

13) $\underset{y\to x}{D}[xy^2xy^3]\equiv[xy^2xyxy]+[yx^2yxy^2]+[xy^2xy^2x] \pmod 5$,

14) $\underset{x\to y}{D}[yx^2yx^3]\equiv[yx^2yxyx]+[xy^2xyx^2]+[yx^2yx^2y] \pmod 5$.

Эти 14 элементов образуют базис A_7. Проверка довольно громоздка, поэтому здесь ее приводить не будем. Ранг L_7 равен 18. Поэтому порядок $F_7 / F_8 = 5^4$, а не единице, как это дано у Грюна.

(d) A_8. Базис модуля $L_8 - A_8$ над $GF[5]$ будет состоять из трех элементов:

$$\mu = [xy^2xyxy^2],$$
$$\beta = [xy^2xyxyx],$$
$$\nu = [yx^2yxyx^2].$$

Все элементы A_8 являются следствиями соотношений, входящих в A_7, и еще некоторых новых соотношений, получаемых следующим образом.

Базис $L_7 - A_7$, на основании уже известных соотношений 1) — 14), получается из базиса L_7. Он состоит из элементов:

$$\begin{array}{ll} [xy^2xyxy], & [yx^2yxy^2], \\ [yx^2yxyx[, & [xy^2xyx^2]. \end{array} \qquad (26)$$

Так как $\sum_i A_i = A$ — идеал, то элементы, получаемые домножением (26) на $\circ\, x$ и $\circ\, y$, породят весь модуль $L_8 - A_8$. Это будут элементы L_8:

$$\begin{array}{lll} \mu = [xy^2xyxy^2], & \rho = [yx^2yxy^3], & \\ \beta = [xy^2xyxyx], & \gamma = [yx^2yxyxy], & \delta = [xy^2xyx^2y], \\ \alpha = [yx^2yxy^2x], & \nu = [yx^2yxyx^2], & \sigma = [xy^2xyx^3]. \end{array}$$

В $L_8 - A_8$, кроме следствий соотношений $L_7 - A_7$, будут еще соотношения: ρ, σ, α, δ, $\beta + \gamma$, т. е.

$$A_8 = A_7 \circ L_1 + \{\rho, \sigma, \alpha, \delta, \beta + \gamma\}.$$

Скобки { } обозначают модуль над $GF[5]$, порожденный заключенными в них элементами.

Итак, порядок $F_8 / F_9 = 5^3$.

Таким образом, утверждение Грюна ([5]) о том, что $F_k = F_{k+1}$ при $k = 7, 8, 9\ldots$, неверно при $k = 7, 8$. Будет ли оно верно при каком-либо $k > 8$ — вопрос, требующий исследования. Во всяком случае эти результаты показывают, что ослабленная проблема Бернсайда в этом случае остается открытой.

Отметим, что порядок $F / F_9 = 5^{8+2+4+4+3} = 5^{21}$.

F / F_9 является конечной периодической группой порядка 5^{21} с периодом 5 и двумя производящими элементами. Есть ли конечные группы с периодом 5 и двумя производящими больших порядков и, вообще, такие группы сколь угодно больших порядков, неизвестно (в этом и заключается ослабленная проблема Бернсайда для данного случая).

Сформулируем все полученные результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для максимальной периодической группы с периодом 5 и двумя производящими элементами имеем следующие порядки факторов убывающего центрального ряда:*

порядок $F/F_2 = 5^2$, *порядок* $F_2/F_3 = 5$, *порядок* $F_3/F_4 = 5^2$,
порядок $F_4/F_5 = 5^3$, *порядок* $F_5/F_6 = 5^2$, *порядок* $F_6/F_7 = 5^4$,
порядок $F_7/F_8 = 5^4$, *порядок* $F_8/F_9 = 5^3$;

F/F_9 *будет конечной группой порядка* 5^{21}.

2. Периодическая группа с периодом 3. Пусть $\mathfrak{G} = \{e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots e^{x_k}\}$ — свободная группа, $F = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}(3)$ — максимальная периодическая группа с периодом 3 и производящими.

Известно, что F — конечная группа [см. ([13]), ([16]), ([17])]. Порядок F определен в работе ([16]). Покажем, что порядок F просто определяется и этим методом.

Пусть $\mathfrak{L}$ — кольцо Ли, порожденное $x_1, \ldots, x_k$ над $GF[3]$, $\mathfrak{L}_i$ — подмодули $\mathfrak{L}$ полиномов степени i. Ранг $L_1 = k$, так как базис — $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Ранг $L_2 = C_k^2$, так как базис состоит из всех полиномов $[x_i x_j]$ $(i < j)$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ (в кольце $\mathfrak{L}$). A_3 уже не пусто, A_3 содержит все

$$[x_i x_j^2], \quad i \neq j \tag{a}$$

и все полиномы, получающиеся отсюда дифференцированием. Пусть x, y и z обозначают какие-то производящие x_i. Тогда

$$[xyz] + [xzy] \in A_3$$

или

$$[xyz] + [xzy] \equiv 0 \pmod{A_3}. \tag{b}$$

Напишем:

$$[x[yz]] = [xyz] - [xzy].$$

Складывая, находим:

$$[x[yz]] \equiv 2[xyz] \pmod{A_3} \tag{c}$$

или

$$-[yzx] \equiv 2[xyz].$$

Окончательно имеем:

$$[xyz] \equiv [yzx] \pmod{A_3}. \tag{d}$$

Итак, три перестановки из симметрической группы перестановок трех символов по $(\mathrm{mod}\, A_3)$ не меняют $[xyz]$, а три другие переводят $[xyz]$ в $-[xyz]$ по $(\mathrm{mod}\, A_3)$.

Соотношениями (a), (b) и (d) исчерпываются все соотношения A_3, так как производные их ничего нового не дают. Поэтому, базис $L_3 - A_3$ состоит из всех элементов $[x_i x_j x_h]$ с $i < j < h$, причем все они линейно независимы. Число их $= C_k^3$.

Итак, порядок $F/F_4 = 3^{C_1^k + C_k^2 + C_k^3}$.

Докажем, что $L_4 = A_4$, откуда $F_4/F_5 = 1$ и $F_{4+i}/F_{4+i+1} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ввиду того, что F — конечная 3-группа, то при m, достаточно большом, $F_m = 1$, а так как будет доказано, что $F_4 = F_5 = F_6 = \cdots = F_m$, то и $F_4 = 1$.

$$\underset{\substack{u \to [xy] \\ 2t \to z}}{D} [ut^2] = [xyz^2] \in A_4.$$

Все правонормированные произведения четырех множителей, где хотя бы одно переменное входит дважды, принадлежат A_4, так как, например,

$$[xyzy] \equiv [zxyy] \equiv 0 \pmod{A_4}.$$

(Здесь мы пользуемся тем, что можно циклически переставлять первые три элемента.) Также и $[xyzx] \equiv 0 \pmod{A_4}$. Докажем, что и все

$$[xyzu] \equiv 0 \pmod{A_4}.$$

$$\underset{y\to[uz]}{D}[xy^2] = [x[uz]y] + [xy[uz]].$$

На основании (c) получим $2[xuzy] + [xyuz] - [xyzu] \equiv 0 \pmod{A_4}$ или

$$[xyzu] \equiv [uxyz] + 2[uzxy] \pmod{A_4}. \qquad (e)$$

Здесь сделаны только циклические перестановки в первых трех множителях у слагаемых правой части.

$$\underset{z\to u}{D}[xyu^2] = [xyzu] + [xyuz] \equiv 0 \pmod{A_4}. \qquad (f)$$

Соотношение (f) показывает, что транспозиция рядом стоящих множителей меняет знак $[xyzu]$ по $\bmod A_4$. Ранее это было доказано лишь для первых трех множителей, а теперь — во всей общности. Так как транспозиция рядом стоящих элементов порождает всю симметрическую группу четырех символов, то по $\bmod A_4$ при всех перестановках порядка множителей в $[xyzu]$ имеем следующую картину. Результат четной перестановки сравним с $[xyzu]$, нечетной — сравним с этим элементом, взятым с обратным знаком.

Пользуясь этим правилом, все входящие в (e) произведения приводим к $[xyzu]$. Имеем: $[xyzu] \equiv -[xyzu] - 2[xyzu] \equiv 0 \pmod{A_4}$, т. е. произвольное произведение $[xyzu] \in A_4$, $L_4 = A_4$, чем и доказана

ТЕОРЕМА 2 [16]. *Порядок F максимальной периодической группы периода 3 с k производящими элементами равен*

$$3^{C_k^1+C_k^2+C_k^3} = 3^{\frac{k^3+5k}{6}}.$$

§ 4. Заключение

В работе автора [20] получены первые соотношения для идеала A в случае периодических групп с периодом p^a, $a > 1$. Соотношения такого типа, полученные Грюном [5], оказались не наилучшими, да и самый метод его требует дополнительного обоснования.

В настоящей работе остались неисследованными несколько вопросов, решение которых было бы крайне важно для теории периодических p-групп. Отметим важнейшие из них:

1. Верна ли гипотеза $J = A$?

2. Известно, что $J \subseteq A$. Будет ли нильпотентным кольцо Ли $\mathfrak{L}/J$? Если удастся показать, что $\mathfrak{L}/J$ — нильпотентное кольцо Ли, то тогда и $\mathfrak{L}/A$ будет нильпотентным кольцом Ли, а потому, на основании сказанного во введении, получится положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда.

Наоборот, если удастся доказать гипотезу $J = A$ и показать, что кольцо $\mathfrak{L}/J$ с конечным числом образующих будет не нильпотентно, то

тогда получится отрицательное решение ослабленной проблемы Бернсайда и потому отрицательное решение проблемы Бернсайда.

Кольцо Ли $\mathfrak{L} / J$ является максимальным кольцом Ли, удовлетворяющим соотношению $[uv^{p-1}] = 0$ для любых своих элементов u и v. Кольца Ли $\mathfrak{L}_1$, любые два элемента которых u_1 и v_1 удовлетворяют соотношению $[u_1 v_1{}^m] = 0$, называются нилькольцами Ли. Вопрос о нильпотентности нилколец Ли, имеющих конечное число образующих, остается открытым.

Следует отметить, что нильпотентность ассоциативных нилколец с конечным числом образующих (колец, все элементы которых удовлетворяют соотношению $u^m = 0$) была доказана Левицким ([18]).

Поступило
15. IX. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Magnus W., Über Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Ann. 111 (1935), 259—280.

[2] Magnus W., Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, J. reine und angew. Math., 177 (1937), 105—115.

[3] Magnus W., Über Gruppen und zugeordnete Liesche Ringe, J. reine und angew. Math., 182 (1940), 142—149.

[4] Zassenhaus H., Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 13 (1939), 1—100.

[5] Grün O., Zusammenhang zwischen Potenzbildung und Kommutatorbildung, J. reine und angew. Math., 182 (1940), 158—177.

[6] Hausdorf E., Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, Bericht d. König. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-Phys. Klasse, 58 (1906), 19—48.

[7] Witt E., Treue Darstellung Liescher Ringe, J. reine und angew. Math., 177 (1937), 152—160.

[8] Дынкин Е. Б., Вычисление коэффициентов в формуле Campbell'a-Hausdorf'a, Доклады Ак. Наук СССР, 57, № 4 (1947), 323—326.

[9] Дынкин Е. Б., О представлении ряда $\log(e^x e^y)$ от некоммутирующих x и y через коммутаторы, Матем. сборн., 25(67) : 1 (1949), 155—162.

[10] Campbell J. E., Introductory Treatise on Lie Theory of finite continuous Transformation Groups, Oxford, 1903.

[11] Baker H. E., Alternants and continuous groups, Proc. Lond. Math. Soc., 3 (1905), 24—47.

[12] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.—Л., 1940.

[13] Burnside W., On a unsettled question in the theory of discontinuous groups, Quart. J. Math., 33 (1902), 230—238.

[14] Baer R., The higher commutator subgroups of a group, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 143—160.

[15] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937.

[16] Levi F. u. van der Waerden B. L., Über eine besondere Klasse von Gruppen, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 9 (1932), 154—158.

[17] Санов И. Н., Решение проблемы Бернсайда для показателя 4; Уч. зап. ЛГУ, 55 (1940), 166—170.

[18] Levitzki J., On a problem of A. Kurosch, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 1033—1035.

[19] Hall P., A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. Lond. Math. Soc., 36 (1934), 29—95.

[20] Санов И. Н., О некоторой системе соотношений в периодических группах с периодом—степенью простого числа, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 477—502.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 59—74

Б. И. СЕГАЛ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Рассматривается вопрос об определении потенциальной функции для цилиндрических областей конечной и бесконечной глубины при различных граничных условиях.

§ 1. В работе [1] мы рассмотрели для области прямоугольного параллелепипеда несколько пространственных задач теории потенциала, имеющих применение к вопросам гидродинамики. В качестве примеров приложения наших решений мы рассмотрели ряд численных примеров. Почти одновременно с нашей работой появилась интересная работа И. А. Чарного [2], в которой дается приближенный метод, позволяющий весьма просто и с достаточной точностью решить вопрос об интерференции несовершенных скважин в тех случаях, когда мощность пласта не слишком велика. Имея в виду случаи, когда мощность пласта достаточно велика, когда нужно определить не только дебит скважины, но и найти значение потенциала в любой точке области, а также ряд других возможных приложений, мы предполагаем в настоящей работе рассмотреть некоторые пространственные задачи теории потенциала для областей, имеющих форму прямого кругового цилиндра. Эти области, наряду с прямоугольными параллелепипедами, являются основными при решении практических вопросов.

Обозначим через r, φ, z цилиндрические координаты точки пространства. Пусть $p = p(r, \varphi, z)$ означает давление в данной точке (r, φ, z), ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, k — коэффициент фильтрации. Как известно, для пьезометрического напора H имеем

$$H = \frac{p}{\rho g} - z,$$

а для потенциала скорости фильтрации u имеем

$$u = -kH + u_0,$$

причем напор H и потенциал u удовлетворяют уравнению Лапласа.

§ 2. Рассмотрим сначала цилиндрическую область бесконечной глубины (рис. 1). Предположим, что верхнее основание этой области, радиус которого мы принимаем равным единице, представляет собою непрони-

цаемую границу. Пусть на боковой поверхности рассматриваемой цилиндрической области потенциал u имеет постоянное значение, равное нулю. На непроницаемом основании области, на расстоянии b от его центра, расположены n равноотстоящих друг от друга полусферических выемок радиуса ε (скважины нулевой высоты; на рис. 1 изображен случай $n=4$).

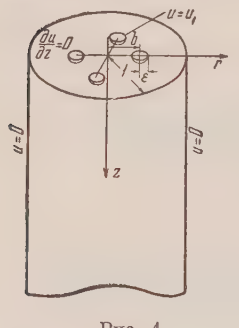


Рис. 1

В точках поверхности каждой полусферической выемки потенциал u имеет заданное постоянное значение u_1. Поставим своей задачей определить значение потенциала в любой точке рассматриваемой области и найти расход жидкости, протекающей через каждую полусферическую выемку.

Искомая потенциальная функция u должна удовлетворять следующим граничным условиям:

1) $u=0$ при $r=1, \quad z>0$;

2) $\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ при $z=0, \quad r<1, \quad |w-w_k|>\varepsilon$,

где

$$w=re^{i\varphi}, \quad w_k=be^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\ldots,n-1;$$

3) $u=u_1$ при $|w-w_k|\leqslant\varepsilon, \quad z=\sqrt{\varepsilon^2-|w-w_k|^2}$.

В дальнейшем мы, кроме того, всегда будем считать, что потенциальная функция в бесконечно удаленных точках равна нулю.

Мы будем искать функцию u в предположении, что $\varepsilon\ll b<1$. Это предположение оправдывается условиями, встречающимися в приложениях.

§ 3. Поместим в точке $\left(b, \dfrac{2k\pi}{n}, 0\right)$ сток мощности q. Ему соответствует потенциал

$$v_k=v_k(r,\varphi,z)=\frac{q}{4\pi\sqrt{R_k^2+z^2}}, \tag{3.1}$$

где

$$R_k^2=r^2+b^2-2br\cos\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right). \tag{3.2}$$

Воспользуемся формулой*

$$\int_0^\infty \cos\alpha t I_0(\beta t) K_0(\gamma t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{\alpha^2+(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma\sin^2\psi}}, \tag{3.3}$$

справедливой при $\operatorname{Re}(\gamma\pm\beta\pm i\alpha)>0$, причем $I_0(x)$ и $K_0(x)$ означают бесселевы функции чисто мнимого аргумента нулевого порядка. Полагая

---

* Ср. формулу (3) в книге ([3]), § 13. 22, стр. 426.

здесь $\beta = 0$, находим

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty \cos \alpha t K_0(\gamma t)\,dt.$$

При помощи последнего равенства мы получаем из (3.1)

$$v_k = \frac{q}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \cos zt K_0(R_k t)\,dt.$$

Для функции K_0 справеделива формула сложения*

$$K_0(R_k) = I_0(b) K_0(r) + 2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(b) K_m(r) \cos m\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right), \tag{3.4}$$

где $r > b$. Поэтому мы можем предыдущее равенство переписать в виде

$$v_k = \frac{q}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \cos zt \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' I_m(bt) K_m(rt) \cos m\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right)\right\} dt,$$

причем штрих у знака суммы показывает, что слагаемое, соответствующее $m = 0$, нужно разделить на 2. Если к функции v_k прибавить гармоническую функцию v'_k, обращающуюся в $-v_k$ на поверхности нашего цилиндра, т. е. при $r = 1$, и удовлетворяющую граничному условию 2) § 2, то получим потенциальную функцию, удовлетворяющую в рассматриваемой области условиям 1) и 2) § 2. Эта функция представляется в виде**

$$V_k = v_k + v'_k =$$

$$= \frac{q}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \cos zt \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{I_m(bt)}{I_m(t)} \left[I_m(t) K_m(rt) - I_m(rt) K_m(t)\right] \cos m\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right)\right\} dt \tag{3.5}$$

или, заменив слагаемое v_k прежним его выражением (3.1), получим

$$V_k = \frac{q}{4\pi\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{q}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \cos zt \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{I_m(bt)}{I_m(t)} I_m(rt) K_m(t) \cos m\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right)\right\} dt. \tag{3.6}$$

Для получения искомой функции u нужно еще удовлетворить условию 3) § 2. Для этого достаточно взять сумму u найденных нами потенциальных функций V_k для всех k от 0 до $n-1$ и определить q из условия $u = u_1$ на поверхности каждой полусферической выемки радиуса ε.

* Эта формула получается из формулы (8) § 11.41 книги (3) при $\nu \to 0$.
** Ср. работу (4).

Если воспользоваться выражением (3.5) для V_k, то получим

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} V_k =$$

$$= \frac{qn}{\pi^2} \int_0^\infty \cos zt \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{I_{mn}(bt)}{I_{mn}(t)} [I_{mn}(t) K_{mn}(rt) - I_{mn}(rt) K_{mn}(t)] \cos mn\varphi \right\} dt, \quad (3.7)$$

так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos m\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \begin{cases} n \cos m\varphi, & \text{если } m \text{ делится на } n, \\ 0, & \text{если } m \text{ не делится на } n. \end{cases}$$

Из (3.6) мы получаем аналогично

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} V_k =$$

$$= \frac{q}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R_k^2 + z^2}} - \frac{qn}{\pi^2} \int_0^\infty \cos zt \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{I_{mn}(bt)}{I_{mn}(t)} I_{mn}(rt) K_{mn}(t) \cos mn\varphi \right\} dt. \quad (3.8)$$

Выражение (3.7) удобно для вычислений, если r значительно больше, чем b. Если же r значительно меньше чем b, то в формуле (3.7) меняем r и b местами. Если, наконец, r близко к b, то можно воспользоваться для вычисления u формулой (3.8). При пользовании этой формулой следует заметить, что ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится весьма быстро при значениях b, не близких к единице, и почти во всех случаях достаточно ограничиться первым членом $(m = 0)$, если даже $n = 1$. Поэтому мы можем положить

$$u = \frac{q}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R_k^2 + z^2}} - \frac{qn}{2\pi^2} \int_0^\infty \cos zt \frac{I_0(bt)}{I_0(t)} I_0(rt) K_0(t)\, dt. \quad (3.9)$$

§ 4. Вычисление последнего интеграла следует производить в зависимости от величины r и z. Если вычисление u производится для точки, близкой к одному из n стоков, то z близко к 0, r близко к b и одно из R_k, например R_0, близко к нулю. В этом случае часть рассматриваемого интеграла, соответствующая значениям $t > 1$, мала по сравнению с первым членом правой части (3.9), а в части того же интеграла, соответствующей значениям $0 \leqslant t \leqslant 1$, отношение $I_0(bt) / I_0(t)$ близко к единице. Исходя из этих соображений, мы можем заменить равенство (3.9) следующим:

$$u = \frac{q}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R_k^2 + z^2}} - \frac{qn}{2\pi^2} \int_0^\infty \cos zt I_0(rt) K_0(t)\, dt.$$

Применив теперь к последнему интегралу формулу (3.3), находим

$$u = \frac{q}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R_k^2 + z^2}} - \frac{qn}{2\pi^2 \sqrt{z^2 + (1+r)^2}} K(\theta), \tag{4.1}$$

где $K(\theta)$ означает полный эллиптический интеграл первого рода, а угол θ определяется из равенства

$$\sin^2\theta = \frac{4r}{z^2 + (1+r)^2}.$$

Для определения q заметим, что, ввиду $\varepsilon \ll b$, величина u будет почти постоянной на поверхности каждой полусферической выемки. Поэтому достаточно определить q из условия $u = u_1$ при $z = \varphi = 0$ и $r = b + \varepsilon$. Тогда $R_0 = \varepsilon$; заменив еще во всех остальных членах в правой части (4.1) $b + \varepsilon$ через b, получим следующее условие для определения q:

$$u_1 = q\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon} + \frac{1}{4\pi b}\left(\omega + \sum_{k=1}^{\frac{n-1-\omega}{2}} \operatorname{cosec}\frac{k\pi}{n}\right) - \frac{n}{2\pi^2(1+b)} K(\theta)\right\}, \tag{4.2}$$

где θ определяется из равенства

$$\sin^2\theta = \frac{4b}{(1+b)^2},$$

а ω равна нулю или единице, смотря по тому, является ли n числом нечетным или четным.

Подставив найденное значение q в формулы (3.7) и (3.8), мы получаем решение поставленной нами задачи, причем одна из этих двух формул всегда оказывается удобной для вычисления значения u ввиду быстрой сходимости ряда и интеграла в одной из этих двух формул.

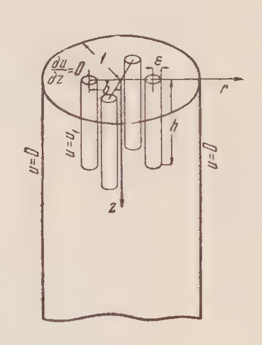


Рис. 2

Заметим, что для количества Q жидкости, притекающей к каждой полусферической выемке (дебит скважины), имеем $Q = \frac{q}{2}$.

§ 5. Переходим теперь к рассмотрению случая, когда полусферические выемки заменяются цилиндрическими вырезами с радиусом основания ε и с высотой h (скважины глубины h, см. рис. 2). Пусть дно каждого цилиндрического выреза имеет форму полусферы радиуса ε. Если все остальные условия рассмотренной нами в §§ 2—4 задачи оставить прежними, то граничные условия 1), 2) § 2 сохраняются, а условие 3) заменяется следующим:

$$u = u_1 \quad \text{при} \quad |w - w_k| = \varepsilon, \quad z < h$$
$$\text{и при} \quad |w - w_k| \leqslant \varepsilon, \quad z = h + \sqrt{\varepsilon^2 - |w - w_k|^2} \tag{5.1}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Поместим в точках $\left(b, \frac{2k\pi}{n}, \zeta\right)$ стоки мощности 1. Соответствующий им потенциал, удовлетворяющий граничному условию 1), мы можем по аналогии с (3.7) и (3.8) представить в виде

$$v_1(\zeta) = \frac{n}{\pi^2} \int_0^\infty \cos(z-\zeta)\, t \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' B_{mn}(r, t) \cos mn\varphi \right\} dt,$$

где

$$B_{mn}(r, t) = \frac{I_{mn}(bt)}{I_{mn}(t)} \left[I_{mn}(t) K_{mn}(rt) - I_{mn}(rt) K_{mn}(t)\right],$$

или в виде

$$v_1(\zeta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{R_k^2+(z-\zeta)^2}} -$$

$$- \frac{n}{\pi^2} \int_0^\infty \cos(z-\zeta)\, t \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{I_{mn}(bt)}{I_{mn}(t)} I_{mn}(rt) K_{mn}(t) \cos mn\varphi \right\} dt.$$

Для удовлетворения условию 2) § 2 прибавим к v_1 потенциал v_2, соответствующий стокам, помещенным в точках $\left(b, \frac{2k\pi}{n}, -\zeta\right)$, симметричных точкам $\left(b, \frac{2k\pi}{n}, \zeta\right)$ относительно плоскости $z=0$. В результате мы получаем следующую потенциальную функцию:

$$v(\zeta) = v_1 + v_2 = \frac{2n}{\pi^2} \int_0^\infty \cos zt \cos \zeta t \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' B_{mn}(r, t) \cos mn\varphi \right\} dt, \tag{5.2}$$

или

$$v(\zeta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{R_k^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_k^2+(z+\zeta)^2}} \right) -$$

$$- \frac{2n}{\pi^2} \int_0^\infty \cos zt \cos \zeta t \left\{ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{I_{mn}(bt)}{I_{mn}(t)} I_{mn}(rt) K_{mn}(t) \cos mn\varphi \right\} dt. \tag{5.3}$$

§ 6. Для удовлетворения условию (5.1) поместим вдоль каждой из прямых $r=b$, $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ на отрезке от $z=0$ до $z=h$ линию стока, мощность которой характеризуется функцией $q=q(\zeta)$, т. е. в точке $z=\zeta\ (0 \leqslant \zeta \leqslant h)$ поместим элемент стока мощности $q d\zeta$. Мы будем считать, что функция $q(\zeta)$ представляется в виде квадратного трехчлена

$$q(\zeta) = A + B\zeta + C\zeta^2. \tag{6.1}$$

Поместим, кроме того, в точках $\left(b, \frac{2k\pi}{n}, h\right)$ точечные стоки мощности D. Постоянные А, B, C и D мы выберем так, чтобы приближенно было удовлетворено условие (5.1)

Потенциал u, соответствующий указанным линиям стока и точечным стокам, представится в виде

$$u = \int_0^h q(\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta + Dv(h). \tag{6.2}$$

Если в последнее равенство подставить выражение для $q(\zeta)$ из (6.1) и выражение $v(\zeta)$ из (5.2), то получим

$$u = \frac{2An}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt \frac{\sin ht}{t}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}{}' B_{mn}(r, t)\cos mn\varphi\right\}dt +$$

$$+ \frac{2Bn}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt\left(\frac{h\sin ht}{t} + \frac{\cos ht - 1}{t^2}\right)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}{}' B_{mn}(r, t)\cos mn\varphi\right\}dt +$$

$$+ \frac{2Cn}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt\left(\frac{h^2\sin ht}{t} + \frac{2h\cos ht}{t^2} - \frac{2\sin ht}{t^3}\right)\left\{\sum_{m=0}^{\infty}{}' B_{mn}(r, t)\cos mn\varphi\right\}dt +$$

$$+ \frac{2Dn}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt\cos ht\left\{\sum_{m=0}^{\infty}{}' B_{mn}(r, t)\cos mn\varphi\right\}dt. \tag{6.3}$$

§ 7. Ряды, входящие в последнее выражение, сходятся медленно при значениях r, близких к b. Поэтому, если r близко к b, то удобнее пользоваться для нахождения u выражением для $v(\zeta)$ по формуле (5.3). В этом случае, положив

$$Q_k = \frac{z + h + \sqrt{R_k^2 + (z+h)^2}}{z - h + \sqrt{R_k^2 + (z-h)^2}} = \frac{\left(h + z + \sqrt{R_k^2 + (h+z)^2}\right)\left(h - z + \sqrt{R_k^2 + (h-z)^2}\right)}{R_k^2},$$

получим из (6.2)

$$u = L - M, \tag{7.1}$$

где

$$L = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A\log Q_k + B\left[\sqrt{R_k^2 + (z+h)^2} + \sqrt{R_k^2 + (z-h)^2} - \right.\right.$$

$$\left. - 2\sqrt{R_k^2 + z^2} + z\log\frac{\left(z + \sqrt{R_k^2 + z^2}\right)^2 Q_k}{\left(z + h + \sqrt{R_k^2 + (z+h)^2}\right)^2}\right] +$$

$$+ C\left[\frac{h + 3z}{2}\sqrt{R_k^2 + (z-h)^2} + \frac{h - 3z}{2}\sqrt{R_k^2 + (z+h)^2} + \frac{2z^2 + R_k^2}{2}\log Q_k\right] +$$

$$\left. + D\left[\frac{1}{\sqrt{R_k^2 + (z-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_k^2 + (z+h)^2}}\right]\right\}, \tag{7.2}$$

$$M = \frac{2An}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt\frac{\sin ht}{t} S(t)\,dt + \frac{2Bn}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt\left(\frac{h\sin ht}{t} + \frac{\cos ht - 1}{t^2}\right)S(t)\,dt +$$

$$+ \frac{2Cn}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt\left(\frac{h^2\sin ht}{t} + \frac{2h\cos ht}{t^2} - \frac{2\sin ht}{t^3}\right)S(t)\,dt + \frac{2Dn}{\pi^2}\int_0^\infty \cos zt\cos ht\,S(t)\,dt, \tag{7.3}$$

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{I_{mn}(bt)}{I_{mn}(t)} I_{mn}(rt)\,K_{mn}(t)\cos mn\varphi.$$

Так как найденный нами потенциал u удовлетворяет граничным условиям 1) и 2) § 2, то нам остается выбрать постоянные A, B, C и D так, чтобы удовлетворить еще условию (5.1). Для этого, как и в упомянутой нашей работе ([1]), вычислим значение u при $R_0 = \varepsilon$ (например, при $r = b + \varepsilon$ и $\varphi = 0$) и при $z = 0$, $z = z_1$, $z = z_2$, $z = h$, где $0 < z_1 < z_2 < h$, и найденные четыре значения u приравниваем заданному значению u_1. Мы получаем для определения указанных четырех постоянных A, B, C и D четыре уравнения.

§ 8. Учитывая, что $\varepsilon \ll b$, можно упростить формулы (7.2) и (7.3) при вычислении значения потенциала u для $r = b + \varepsilon$ и $\varphi = 0$. С этой целью мы отбрасываем в первом члене (соответствующем $k = 0$) суммы (7.2) для L слагаемые, имеющие малые значения. Для вычисления каждого из следующих членов ($1 \leqslant k \leqslant n - 1$) заменяем каждый интеграл

$$\int_0^h \left(\frac{1}{\sqrt{R_k^2 + (z - \zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_k^2 + (z + \zeta)^2}}\right)(A + B\zeta + C\zeta^2)\, d\zeta$$

его приближенным значением

$$\left[\frac{1}{\sqrt{R_k^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_k^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2}}\right] \int_0^h (A + B\zeta + C\zeta^2)\, d\zeta \approx$$

$$\approx \left[\frac{1}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2}}\right]\left(Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}\right).$$

Полагая теперь

$$Q = Q(z) = \frac{2(z + h)}{z - h + \sqrt{\varepsilon^2 + (z - h)^2}} = \frac{2(h + z)\left[h - z + \sqrt{\varepsilon^2 + (h - z)^2}\right]}{\varepsilon^2}, \quad (8.1)$$

мы находим таким образом

$$L = \frac{1}{4\pi}\left\{A \log Q + B\left[z + h + \sqrt{\varepsilon^2 + (h - z)^2} - 2\sqrt{\varepsilon^2 + z^2} + z \log \frac{(z + \sqrt{\varepsilon^2 + z^2})^2 Q}{4(h + z)^2}\right] + \right.$$

$$+ C\left[\frac{h + 3z}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + (h - z)^2} + \frac{h - 3z}{2}(h + z) + z^2 \log Q\right] + D\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (h - z)^2}} + \frac{1}{h + z}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2}}\right]\left(Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}\right) +$$

$$\left. + D\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + (z - h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + (z + h)^2}}\right]\right\}. \quad (8.2)$$

§ 9. Для упрощения выражения (7.3) для M мы ограничиваемся в каждой сумме лишь первым членом при $m = 0$, а в выражениях

$$\frac{I_0(bt)}{I_0(t)}, \quad \frac{\sin ht}{t}, \quad \frac{h \sin ht}{t} + \frac{\cos ht - 1}{t^2}, \quad \frac{h^2 \sin ht}{t} + \frac{2h \cos ht}{t^2} - \frac{2 \sin ht}{t^3}$$

заменяем t нулем. Тогда получаем

$$M = \frac{n}{\pi^2}\left(Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}\right)\int\limits_0^\infty \cos zt\, I_0(bt)\, K_0(t)\, dt +$$
$$+ \frac{Dn}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty [\cos(z+h)t + \cos(z-h)t]\, I_0(bt)\, K_0(t)\, dt,$$

или, воспользовавшись для вычисления последних интегралов формулой (3.3), получим

$$M = \frac{n}{\pi^2}\left(Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3}\right)\frac{K(\theta_1)}{\sqrt{z^2+(1+b)^2}} +$$
$$+ \frac{Dn}{2\pi^2}\left(\frac{K(\theta_2)}{\sqrt{(z+h)^2+(1+b)^2}} + \frac{K(\theta_3)}{\sqrt{(z-h)^2+(1+b)^2}}\right), \qquad (9.1)$$

где $K(\theta)$ попрежнему означает полный эллиптический интеграл первого рода, а углы θ_1, θ_2, θ_3 вычисляются по формулам

$$\sin^2\theta_1 = \frac{4b}{z^2+(1+b)^2}, \quad \sin^2\theta_2 = \frac{4b}{(z+h)^2+(1+b)^2}, \quad \sin^2\theta_3 = \frac{4b}{(z-h)^2+(1+b)^2}.$$

Если подставить значения (8.2) и (9.1) в (7.1), то можно фактически вычислить значение потенциала u для любого значения z при условии, что $R_0 = \varepsilon$. Таким образом, мы можем указанным выше способом составить систему уравнений для A, B, C и D. Определив эти неизвестные коэффициенты, можно найти количество жидкости, протекающей через каждую из n скважин (дебит) по формуле

$$Q = \int\limits_0^h (A + B\zeta + C\zeta^2)\, d\zeta + D = Ah + B\frac{h^2}{2} + C\frac{h^3}{3} + D. \qquad (9.2)$$

Подставив найденные значения A, B, C и D в формулы (6.3), (7.2) и (7.3), мы получим два выражения (6.3) и (7.1) для вычисления значения потенциальной функции u, удовлетворяющей условиям задачи, формулированной в § 5, причем в одной из этих двух формул ряды и интегралы быстро сходятся.

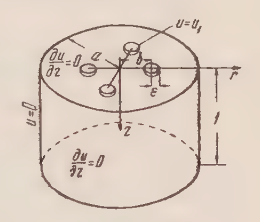


Рис. 3

§ 10. Переходим теперь к рассмотрению цилиндрической области конечной глубины (рис. 3). При этом мы ограничимся случаем полусферических выемок (скважины нулевой высоты).

Мы примем глубину цилиндрической области за единицу измерения длин; радиус основания цилиндра обозначим через a. Пусть верхнее и нижнее основания цилиндрической области представляют собою непроницаемые границы; на боковой поверхности этой области потенциал u имеет постоянное значение, равное нулю. На верхнем непроницаемом основании на расстоянии b от оси цилиндра расположены n равноотстоящих друг от друга полусферических выемок радиуса ε (на рис. 3

изображен случай $n=4$). В точках каждой полусферической выемки потенциал u имеет заданное постоянное значение u_1.

Искомая потенциальная функция u должна удовлетворять следующим граничным условиям:

1) $u=0$ при $r=a$, $0<z<1$;

2) $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ при $z=0$, $r<a$, $|w-w_k|>\varepsilon$ и при $z=1$, $r<a$;

3) $u=u_1$ при $|w-w_k|\leqslant\varepsilon$, $z=\sqrt{\varepsilon^2-|w-w_k|^2}$,

где

$$w=re^{i\varphi},\quad w_k=be^{i\frac{2k\pi}{n}},\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

§ 11. Поместим в точке $\left(b, \frac{2k\pi}{n}, 0\right)$ сток мощности q. Соответствующий ему потенциал v_k, удовлетворяющий на плоскостях $z=-1$ и $z=1$ условию $\frac{\partial v_k}{\partial z}=0$, был найден Маделюнгом ([5]) и представляется в виде:

$$v_k=\frac{q}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{\infty}K_0(l\pi R_k)\cos l\pi z+\frac{1}{2}\log\frac{4}{R_k}\right\}, \tag{11.1}$$

где R_k имеет значение (3.2), или, с точностью до величины порядка R_k^2, в виде

$$v_k=\frac{q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{R_k^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{R_k^2+(2-z)^2}}-\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z}{2}+1\right)+\psi\left(2-\frac{z}{2}\right)\right]\right\}, \tag{11.2}$$

где

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Последним выражением для v_k удобно пользоваться, когда R_k мало.

Воспользовавшись теоремой сложения (3.4), мы получаем из (11.1):

$$v_k=\frac{q}{\pi}\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z\sum_{m=0}^{\infty}{}' I_m(l\pi b)K_m(l\pi r)\cos m\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)+\frac{1}{4}\log\frac{4}{R_k}\right\}.$$

§ 12. Найденный потенциал v_k удовлетворяет также условию $\frac{\partial v_k}{\partial z}=0$ на плоскости $z=0$. Таким образом, он полностью удовлетворяет условию 2) § 10. Для того чтобы удовлетворить еще условию 1) § 10, достаточно к функции v_k прибавить гармоническую функцию v_k', обращающуюся в $-v_k$ на поверхности цилиндра и удовлетворяющую условию 2). При этом мы найдем потенциальную функцию V_k, удовлетворяющую граничным условиям 1) и 2). Эта функция представляется в виде

$$V_k=v_k+v_k'=\frac{q}{\pi}\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z\sum_{m=0}^{\infty}{}' B_m(r,a,b,l)\cos m\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}\log\frac{a^4+b^2r^2-2a^2br\cos\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)}{a^2\left[r^2+b^2-2br\cos\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)\right]}\right\}, \tag{12.1}$$

где

$$B_m(r,\ a,\ b,\ l)=\frac{I_m(l\pi b)}{I_m(l\pi a)}\left[I_m(l\pi a)\,K_m(l\pi r)-I_m(l\pi r)\,K_m(l\pi a)\right].$$

Логарифмический член в формуле (12.1) получен обычно применяемым в подобных случаях методом отображения точки $\left(b,\ \frac{2k\pi}{n}\right)$ относительно круга $r=a$. Именно, если через r_1 обозначить расстояние между точкой $(r,\ \varphi)$ и точкой $\left(\frac{a^2}{b},\ \frac{2k\pi}{n}\right)$, являющейся отображением точки $\left(b,\ \frac{2k\pi}{n}\right)$ относительно круга $r=a$, то функция

$$\log\frac{br_1}{a}$$

обращается при $r=a$ в $-\log\frac{1}{R_k}$. Если поэтому взять сумму

$$\frac{1}{4}\log\frac{br_1}{a}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{R_k}=\frac{1}{4}\log\frac{br_1}{aR_k}$$

и подставить вместо r_1 и R_k их значения, то получим логарифмический член формулы (12.1), обращающийся при $r=a$ в нуль.

§ 13. Полученное выражение (12.1) для V_k удобно для вычислений, если r значительно больше, чем b; в этом случае ряд, входящий в это выражение, сходится быстро. Если r значительно меньше b, то меняем в выражении (12.1) r и b местами. Если же r близко к b, то выражение (12.1) для V_k непригодно для вычислений. В этом случае мы замечаем, что ряд, входящий в слагаемое v'_k, попрежнему быстро сходится. Поэтому мы оставляем выражение v'_k без изменений и заменяем в (12.1) слагаемое v_k его выражением (11.1), если каждое R_k значительно больше нуля, или выражением (11.2), если R_k близко к нулю. В первом случае мы получаем:

$$V_k=\frac{q}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z\,K_0(l\pi R_k)-\right.$$
$$-2\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{I_m(l\pi b)}{I_m(l\pi a)}I_m(l\pi r)\,K_m(l\pi a)\cos m\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{4}\log\frac{a^4+b^2r^2-2a^2br\cos\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)}{a^2\left[r^2+b^2-2br\cos\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)\right]}\right\},\qquad(13.1)$$

а во втором случае

$$V_k=\frac{q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{R_k^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{R_k^2+(2-z)^2}}-\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z}{2}+1\right)+\psi\left(2-\frac{z}{2}\right)\right]-\right.$$
$$-4\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{I_m(l\pi b)}{I_m(l\pi a)}I_m(l\pi r)\,K_m(l\pi a)\cos m\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{2}\log\frac{a^4+b^2r^2-2a^2br\cos\left(\varphi-\frac{2k\pi}{n}\right)}{16a^2}\right\}.\qquad(13.2)$$

§ 14. Для получения искомой потенциальной функции u нужно еще удовлетворить условию 3) § 10. Для этого достаточно взять сумму найденных нами функций V_k для всех k от 0 до $n-1$ и определить q из условия $u = u_1$ на поверхности каждой полусферической выемки радиуса ε.

Заметив, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos m\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \begin{cases} n\cos m\varphi, & \text{если } m \text{ делится на } n, \\ 0, & \text{если } m \text{ не делится на } n, \end{cases}$$

и воспользовавшись известным тождеством

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 + y^2 - 2xy\cos\left(\varphi - \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = x^{2n} + y^{2n} - 2x^n y^n \cos n\varphi,$$

мы найдем при помощи (12.1) для

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

следующее выражение:

$$u = \frac{q}{\pi}\left\{n\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z \sum_{m=0}^{\infty}{}' B_{mn}(r,\ a,\ b,\ l)\cos mn\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\log\frac{a^{4n} + b^{2n}r^{2n} - 2a^{2n}b^n r^n \cos n\varphi}{a^{2n}(r^{2n} + b^{2n} - 2r^n b^n \cos n\varphi)}\right\}. \qquad (14.1)$$

Этой формулой можно пользоваться для фактического вычисления u, если r значительно больше, чем b. Если r значительно меньше b, то в формуле (14.1) меняем r и b местами.

§ 15. Для получения формулы, удобной для вычислений в случае, когда r близко к b, но каждое R_k значительно больше нуля, мы воспользуемся равенством (13.1) для V_k. При этом мы всюду заменяем r через b и получаем:

$$u = \frac{q}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z \sum_{k=0}^{n-1} K_0\left(2l\pi b \sin\left|\frac{k\pi}{n} - \frac{\varphi}{2}\right|\right) - \right.$$

$$- 2n\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{[I_{mn}(l\pi b)]^2 K_{mn}(l\pi a)}{I_{mn}(l\pi a)}\cos mn\varphi +$$

$$\left. + \frac{1}{4}\log\frac{a^{4n} + b^{4n} - 2a^{2n}b^{2n}\cos n\varphi}{4a^{2n}b^{2n}\sin^2\frac{n\varphi}{2}}\right\}. \qquad (15.1)$$

Выведем, наконец, формулу, удобную для вычислений в случае, когда одно из R_k, например R_0, близко к нулю. Полагаем $R_0 = \varepsilon \ll 1$, $\varphi = 0$, $r = b$ и получаем

$$R_k = 2b\sin\frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

При вычислении $u = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ мы воспользуемся для V_0 выражением (13.2), а при вычислении V_k $(k = 1, \ldots, n-1)$—выражением (13.1). Мы получаем

$$u = \frac{q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+z^2}} + \frac{1}{2-z} - \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{z}{2}+1\right)+\psi\left(2-\frac{z}{2}\right)\right] + \right.$$
$$+ 2\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z\sum_{k=1}^{n-1}K_0\left(2\,l\pi b\sin\frac{k\pi}{n}\right) -$$
$$\left. - 4n\sum_{l=1}^{\infty}\cos l\pi z\sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{[I_{mn}(l\pi b)]^2 K_{mn}(l\pi a)}{I_{mn}(l\pi a)} + \log\frac{a^{2n}-b^{2n}}{4na^n b^{n-1}}\right\}. \qquad (15.2)$$

§ 16. Для удовлетворения условию 3) § 10 достаточно выбрать q так, чтобы на поверхности полусферической выемки, т. е. при $z=0$ и $R_0 = \varepsilon$, удовлетворялось равенство $u = u_1$.

Заметив, что

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(2) = 1-\gamma,$$

где γ означает постоянную Эйлера ($\gamma = 0{,}5772\ldots$), мы получаем из (15.2) следующее равенство для определения q (удвоенного дебита полусферической выемки):

$$u_1 = \frac{q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon} + \gamma + 2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}K_0\left(2\,l\pi b\sin\frac{k\pi}{n}\right) - \right.$$
$$\left. - 4n\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{[I_{mn}(l\pi b)]^2 K_{mn}(l\pi a)}{I_{mn}(l\pi a)} + \log\frac{a^{2n}-b^{2n}}{4na^n b^{n-1}}\right\}. \qquad (16.1)$$

Так как ряды, входящие в эту формулу, сходятся весьма быстро, то мы можем фактически вычислить q. Подставив найденное значение q в формулы (14.1), (15.1) и (15.2), мы получаем решение поставленной нами задачи. Заметим, что одна из трех формул всегда дает возможность фактически вычислить значение потенциальной функции u.

§ 17. Приведем некоторые численные примеры *. Рассмотрим сначала случай цилиндрических вырезов в цилиндрической области бесконечной глубины (§§ 5—9). Пусть $b = \frac{1}{4}$; $n=5$; $\varepsilon=0{,}00025$; $h=0{,}01$; 0,02; 0,03.

Воспользовавшись формулами (7.1), (8.2) и (9.1), мы находим для потенциала u на поверхности каждого цилиндрического выреза $|w-w_k|=\varepsilon$, для определенных z, значения, указанные в таблице 1.

---

* Вычисления выполнены К. Т. Земцовой, ассистентом кафедры математики Московского станко-инструментального института им. И. В. Сталина.

Таблица 1

h	z	u
0,01	0	$0{,}9095A + 0{,}002613B + 0{,}0001071C + 221{,}2D$
	0,006	$0{,}8741A + 0{,}004734B + 0{,}0002986C + 333{,}2D$
	0,009	$0{,}7785A + 0{,}005250B + 0{,}0006130C + 1044{,}0D$
	0,01	$0{,}6159A + 0{,}004015B + 0{,}0003196C + 4071{,}2D$
0,02	0	$1{,}2318A + 0{,}007383B + 0{,}0004565C + 121{,}1D$
	0,012	$1{,}1960A + 0{,}012903B + 0{,}0014215C + 177{,}4D$
	0,018	$1{,}0993A + 0{,}014577B + 0{,}0022374C + 543{,}6D$
	0,02	$0{,}8823A + 0{,}011227B + 0{,}0015734C + 4046{,}1D$
0,03	0	$1{,}5080A + 0{,}014271B + 0{,}001091C + 87{,}8D$
	0,02	$1{,}4601A + 0{,}024704B + 0{,}004040C + 141{,}1D$
	0,028	$1{,}3430A + 0{,}026442B + 0{,}005729C + 534{,}4D$
	0,03	$1{,}1245A + 0{,}020946B + 0{,}003961C + 4037{,}7D$

Предполагая, согласно условию (5.1), что для каждого из трех рассматриваемых случаев $h = 0{,}01$, $h = 0{,}02$ и $h = 0{,}03$ потенциал u на поверхности цилиндрического выреза имеет постоянное значение, равное единице, мы приравниваем найденные значения потенциала u единице и из полученных таким образом трех линейных систем определяем значения A, B, C, и D, указанные в таблице 2.

Таблица 2

h	A	B	C	D
0,01	1,065	— 0,58	160,8	0,000073
0,02	0,844	—12,45	99,0	0,000059
0,03	0,727	—10,80	49,1	0,000053

При помощи этих значений A, B, C и D мы получаем решение задачи в каждом из трех рассматриваемых случаев, как это указано в конце § 9. Пользуясь формулой (9.2), мы находим значения дебита Q_1, указанные в таблице 3.

Таблица 3

h	Q_1
0,01	0,0107
0,02	0,0147
0,03	0,0174

§ 18. Переходим теперь к рассмотрению случая полусферических выемок в цилиндрической области бесконечной глубины (§§ 2—4). При этом мы попрежнему полагаем $b = \frac{1}{4}$ и $n = 5$, а для ε выбираем такие три значения, чтобы получить полусферические выемки, площади поверхностей которых были бы равны соответственно площадям поверхностей цилиндрических вырезов, рассмотренных в § 17.

Для этого достаточно положить

$$\varepsilon = \sqrt{0{,}00025\,h};$$

мы получаем три значения

$$\varepsilon = 0{,}001581, \quad \varepsilon = 0{,}002236, \quad \varepsilon = 0{,}002739,$$

соответствующие трем значениям

$$h = 0{,}01, \quad h = 0{,}02, \quad h = 0{,}03$$

По формуле (4.2) мы находим, что этим значениям ε соответствуют следующие значения q:

$$q = 0{,}0197, \quad q = 0{,}0227, \quad q = 0{,}0338.$$

При помощи этих значений q мы находим решение задачи в каждом из трех рассматриваемых случаев, как это указано в конце § 4. Заметив, что дебит Q_2 равен $\frac{1}{2}q$, мы находим значения Q_2, указанные в таблице 4.

Таблица 4

h	ε	Q_2
0,01	0,001581	0,0098
0,02	0,002236	0,0138
0,03	0,002739	0,0169

§ 19. Рассмотрим, наконец, случай полусферических выемок в цилиндрической области конечной глубины (§ 10—16). Полагаем

$$a = 4, \quad b = 1, \quad n = 5.$$

Значения ε выбираем соответственно трем случаям, рассмотренным в § 18. Так как теперь масштаб уменьшен в четыре раза (в § 18 предполагалось $a = 1$, а теперь мы положили $a = 4$), то нужно значения ε из § 18 умножить на 4, и мы получаем:

$$\varepsilon = 0{,}006324, \quad \varepsilon = 0{,}008944, \quad \varepsilon = 0{,}010956.$$

По формуле (16.1) мы находим, что этим значениям ε соответствуют следующие значения q:

$$q = 0{,}07722, \quad q = 0{,}1080, \quad q = 0{,}1311,$$

при помощи которых мы находим решение задачи в каждом из трех рассматриваемых случаев, как это указано в конце § 16.

Таблица 5

h	ε	Q	Q_3
0,01	0,006324	0,0386	0,0097
0,02	0,008944	0,0540	0,0135
0,03	0,010956	0,0655	0,0164

Заметим, что q означает удвоенный дебит Q полусферической выемки. Для сравнения полученных результатов с результатами § 17 и 18 мы увеличим теперь масштаб в четыре раза. Для получения «приведенного» таким образом дебита Q_3 полусферических выемок нужно значения Q разделить на 4. Мы получаем значения Q и Q_3, указанные в таблице 5.

§ 20. Для надлежащей оценки найденных значений Q_1, Q_2 и Q_3 рассмотрим теперь полупространство $z \leqslant 0$ с непроницаемой границей $z=0$. Пусть на этой непроницаемой границе имеется полусферическая выемка радиуса ε. Если значение потенциала на поверхности выемки принять равным единице, а в бесконечности — равным нулю, то дебит Q_4 этой выемки определяется по формуле

$$Q_4 = 2\pi\varepsilon. \tag{20.1}$$

Значения Q_4, соответствующие значениям ε, рассмотренным в § 18, представлены в таблице 6.

Таблица 6

h	ε	Q_4
0,01	0,001581	0,0099
0,02	0,002236	0,0140
0,03	0,002739	0,0172

Сравнение значений Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4, указанных в таблицах 3, 4, 5 и 6, показывает, что эти значения близки во всех рассмотренных случаях; при расчетах, не требующих большой точности, можно в аналогичных случаях (когда ε достаточно мало) заменить сложные вычисления § 17, 18 и 19 вычислением Q по простой формуле (20.1). Однако получаемые при такой замене результаты нельзя считать удовлетворительными при более высоких требованиях точности.

Поступило
12. XII. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сегал Б. И., Некоторые пространственные задачи теории потенциала и их приложения, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 323—358.

[2] Чарный И. А., Об интерференции несовершенных скважин, Изв. Ак. Наук СССР, Отд. техн. наук, 1946, № 11, 1519—1526.

[3] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, часть первая, Москва, 1949.

[4] Dougall J., The determination of Green's Function by means of Cylindrical or Spherical Harmonics, Proc. Edinb. Math. Soc., XVIII (1900), 33—83.

[5] Madelung E., Das elektrische Feld in Systemen von regelmässig angeordneten Punktladungen, Phys. Zeitschr., XIX (1918), 524—532.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 75—100

М. И. МОРОЗОВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КЛАССОВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе вводится понятие интерполяционного класса функций и устанавливается существование и единственность функции интерполяционного класса, наименее уклоняющейся от данной непрерывной функции, определенной на замкнутом множестве, принадлежащем отрезку. Кроме того, доказываются теоремы, являющиеся обобщениями известных теорем Чебышева и Валле-Пуссена.

Введение

Пусть функция $y = F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = F(x; \bar{a})$ от x и n вещественных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определена в области $G: 0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty \leqslant \tilde{a}_i < a_i < \tilde{\tilde{a}}_i \leqslant +\infty$.

Областью D_x будем называть множество значений, принимаемых функцией $y = F(x; \bar{a})$ при некотором фиксированном значении x, в то время как каждый из параметров a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ независимо от других принимает все значения из интервала $\tilde{a}_i < a_i < \tilde{\tilde{a}}_i$.

Относительно функции $y = F(x; a)$ предполагается, что она:

1) однозначна и непрерывна в области G относительно всех ее аргументов в их совокупности;

2) обладает в области G интерполяционным свойством. (A)

При этом об однозначной функции $y = F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = F(x; \bar{a})$ от x и n параметров мы говорим, что она обладает интерполяционным свойством (коротко, свойством J), если всякая система уравнений вида

$$y_i = F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{B}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любая система различных между собою значений x отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, а каждое из y_i — любое значение из области D_{x_i}, однозначно разрешима относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Функция

$$y = F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{1}$$

удовлетворяющая условиям (A), определяет собой некоторый класс K непрерывных функций переменной x, каждая из которых соответствует определенной системе значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Класс K будем называть интерполяционным классом функций, соответствующим функции (1).

Частным случаем функции (1) является функция вида

$$y = F(x; \bar{a}) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \qquad (2)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — непрерывные функции, определенные на отрезке [0,1] и образующие на этом отрезке систему Чебышева [по терминологии С. Н. Бернштейна (1)], т. е. удовлетворяющие условию: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, если $F(x; \bar{a}) = 0$ при n различных значениях x отрезка [0,1].

Пусть функция $f(x)$ переменной x принадлежит к классу C непрерывных функций, определенных на отрезке [0,1] и удовлетворяющих для каждого x условию $f(x) \in D_x$. Пусть E — какое-либо замкнутое множество точек отрезка [0, 1], содержащее не менее $n+1$ точек (в частном случае множеством E может быть отрезок [0, 1]).

Уклонением функции $F(x; \bar{\alpha})$ от функции $f(x) \in C$ на множестве E называется

$$\max_E |f(x) - F(x; \bar{\alpha})|.$$

Функция $F(x; \bar{\alpha})$ называется наименее уклоняющейся от функции $f(x)$ на множестве E, если ее уклонение от функции $f(x)$ не больше, чем уклонение любой функции класса K от этой же функции $f(x)$, т. е. если

$$\max_E |f(x) - F(x; \bar{\alpha})| = \min_{\bar{a}} \max_E |f(x) - F(x; \bar{a})| = \mu(f; E).$$

Число $\mu(f; E)$ (которое будем обозначать через $\mu(f)$ в случае, если E совпадает с отрезком [0, 1]) называется наилучшим приближением функции $f(x) \in C$ посредством функций класса K на множестве E.

В предлагаемой статье доказываются следующие теоремы, касающиеся равномерного приближения функций класса C посредством функций какого-либо из классов K:

1. *Для каждой данной функции $f(x) \in C$ и каждого данного множества E_{n+1}, состоящего из $n+1$ различных точек отрезка [0, 1], существует в классе K одна и только одна функция $F(x; \bar{\alpha})$, наименее уклоняющаяся от функции $f(x)$ на множестве E_{n+1}.*

2. *Для каждой функции $f(x) \in C$ существует одна и только одна функция $F(x; \bar{\alpha}) \in K$, наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на замкнутом множестве $E \in [0, 1]$, содержащем не менее $n+1$ различных точек, причем $\mu(f; E) = \sup \mu(f; E_{n+1})$ по всем множествам E_{n+1}, состоящим из $n+1$ различных точек множества E.*

3. *Для того чтобы функция $F(x; \bar{\alpha}) \in K$ была наименее уклоняющейся от функции $f(x) \in C$ на замкнутом множестве $E \in [0, 1]$, содержащем не менее $n+1$ различных точек, необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум функции $|f(x) - F(x; \bar{\alpha})|$ достигался не менее чем в $n+1$ точках $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$ множества E, в которых разность $f(x) - F(x; \bar{\alpha})$ последовательно меняет знак.*

Эти теоремы представляют собою обобщение соответствующих теорем П. Л. Чебышева (последняя теорема) и Валле-Пуссена (2) (первые две

теоремы), имеющих место в случае равномерного приближения непрерывных функций многочленами. Доказательству этих теорем посвящен в основном раздел III данной статьи.

В разделах I и II рассматриваются свойства функций класса K, вытекающие из свойства J функции $F(x; \overline{a})$, причем раздел I статьи посвящен рассмотрению этих свойств на отрезке, а раздел II — на множестве, состоящем из $n+1$ различных точек отрезка $[0, 1]$.

Задача о равномерном приближении непрерывных функций одной переменной x посредством функций класса, определяемого функцией $F(x; \overline{a})$, зависящей от x и n параметров, впервые была поставлена и рассматривалась основоположником теории приближения функций великим русским математиком П. Л. Чебышевым в его мемуаре «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций» ([3]). П. Л. Чебышев установил в этом мемуаре необходимое условие, которому должна удовлетворять система значений α_i параметров a_i, чтобы

$$\max_x |f(x) - F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|$$

был меньше, чем при всякой другой системе значений параметров, достаточно близкой к системе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, и применил его к задачам приближения функций на конечном отрезке посредством многочленов и рациональных функций. Однако относительно функции $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = F(x; \overline{a})$ П. Л. Чебышев предполагал, что она не только непрерывна, но и непрерывно дифференцируема как по переменной x, так и по параметрам. Об интерполяционных свойствах функции $F(x; \overline{a})$ Чебышев не делал никаких предположений и в общей постановке не касался вопроса о существовании и единственности функции рассматриваемого класса, наименее уклоняющейся от данной непрерывной функции.

Значительно позже Юнг ([4]) доказал существование в классе, определяемом функцией $F(x; \overline{a})$, функции, наименее уклоняющейся от данной непрерывной функции, при следующих предположениях:

1) $F(x; \overline{a})$ однозначно определена и непрерывна по всем ее аргументам (в их совокупности) для каждого x на конечном отрезке $[a, b]$ и для всех вещественных конечных значений параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2) Для всякого положительного числа M всегда существует число N такое, что если имеет место соотношение $|F(x; \overline{a})| \leqslant M$ для всех значений x отрезка $[a, b]$, то для параметров a_i имеет место соотношение $|a_i| \leqslant N$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Но единственность функции рассматриваемого класса, наименее уклоняющейся от данной непрерывной функции, и теорему 3 Юнг доказал только для случая, когда функция $F(x; \overline{a})$ имеет вид (2). Вообще же о свойстве J функции $F(x; \overline{a})$ Юнг, так же как и П. Л. Чебышев, не делал никаких предположений.

I. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО КЛАССА НА ОТРЕЗКЕ

В этом разделе, так же как и в разделе II, устанавливаются некоторые общие свойства функций интерполяционных классов, не зависящие от вида функции $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$, определяющей интерполяционный класс.

§ 1. Свойства разности двух функций интерполяционного класса

Применяя обозначение

$$\Delta F(x;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha}) = F(x;\ \bar{\beta}) - F(x;\ \bar{\alpha}),$$

установим справедливость двух следующих теорем:

ТЕОРЕМА 1. *Если $F(x;\ \bar{\alpha})$ и $F(x;\ \bar{\beta})$ — две различные функции класса K такие, что их разность $\Delta F(x;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha})$ равна нулю в $n-1$ различных точках $x \in [0,\ 1]$:*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}, \tag{3}$$

то $\Delta F(x;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha})$ сохраняет знак внутри каждого из интервалов

$$(x_i,\ x_{i+1}),\ (0,\ x_1)\ (\textit{если}\ x_1 \neq 0)\ \textit{и}\ (x_{n-1},\ 1)\ (\textit{если}\ x_{n-1} \neq 1),$$

изменяя его последовательно при переходе через точки системы (3).

Доказательство. В самом деле, допустим, что в каком-либо из интервалов $(x_i,\ x_{i+1})$ $\Delta F(x;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha})$ меняет знак. Тогда $\Delta F(x;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha})$, будучи непрерывной функцией, обращается в нуль по крайней мере в одной точке этого интервала. Но тогда, в силу свойства J функции (1), $F(x;\ \bar{\beta}) \equiv F(x;\ \bar{\alpha})$.

Допустим теперь, что в каких-либо двух соседних интервалах $(x_{i-1},\ x_i)$ и $(x_i,\ x_{i+1})$ $\Delta F(x;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha})$ имеет один и тот же знак (возьмем для определенности плюс) и покажем, что это допущение приводит к противоречию. Действительно, определим функцию $F(x;\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\gamma_n)$ так, чтобы

$$F(x_k;\ \bar{\gamma}) = F(x_k;\ \bar{\alpha}) = F(x_k;\ \bar{\beta}) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ i-1,\ i+1,\ \ldots,\ n-1),$$
$$F(x_0;\ \bar{\gamma}) = F(x_0;\ \bar{\beta}) \quad (x_{i-1} < x_0 < x_i),$$
$$F(x_0';\ \bar{\gamma}) = F(x_0';\ x') \quad (x_i < x_0' < x_{i+1}).$$

Такое определение функции $F(x;\bar{\gamma})$ возможно вследствие свойства J. Тогда $\Delta F(x;\ \bar{\gamma};\ \alpha) = 0$ при $x = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,x_{n-1}$ и при $x = x_0'$, а $\Delta F(x;\ \bar{\gamma};\ \bar{\beta}) = 0$ при $x = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_{n-1}$ и при $x = x_0$, т. е. каждая из этих функций имеет на отрезке $[0,\ 1]$ $n-1$ нулей.

Возможны три случая:

1. $\Delta F(x_i;\ \bar{\gamma};\ \bar{\alpha}) = \Delta F(x_i;\ \bar{\gamma};\ \bar{\beta}) > 0,$
2. $\Delta F(x_i;\ \bar{\gamma};\ \bar{\alpha}) = \Delta F(x_i;\ \bar{\gamma};\ \bar{\beta}) = 0,$
3. $\Delta F(x_i;\ \bar{\gamma};\ \bar{\alpha}) = \Delta F(x_i;\ \bar{\gamma};\bar{\beta}) < 0.$

В первом случае $\Delta F(x;\ \bar{\gamma};\ \beta)$ обращается в нуль по крайней мере еще при одном значении x, именно при некотором значении x из интервала (x_i, x_0'), так как $\Delta F(x_i;\ \bar{\gamma};\ \bar{\beta}) > 0$, а

$$\begin{aligned} \Delta F(x_0';\ \bar{\gamma};\ \bar{\beta}) &= \Delta F(x_0';\ \bar{\gamma},\ \bar{\beta}) - \Delta F(x_0';\ \bar{\gamma};\ \bar{\alpha}) = \\ &= F(x_0';\ \bar{\gamma}) - F(x_0';\ \bar{\beta}) - F(x_0';\ \bar{\gamma}) + F(x_0';\bar{\alpha}) = \\ &= -\Delta F(x_0';\bar{\beta};\bar{\alpha}) < 0. \end{aligned}$$

Но это противоречит тому, что функция $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ обладает свойством J. Противоречие второго случая со свойством J функции $F(x; \bar{a})$ очевидно.

В третьем случае приходим к противоречию со свойством J, установив, так же как и в случае 1, что $\Delta F(x; \bar{\gamma}; \bar{\alpha})$ обращается в нуль по крайней мере еще один раз, именно в интервале (x_0, x_i).

Из только что доказанной теоремы непосредственно следует:

ТЕОРЕМА 2. *Если $F(x; \bar{\alpha})$, $F(x; \bar{\beta})$ и $F(x; \gamma)$ — три различные функции класса K такие, что для $n-1$ различных значений $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ отрезка $[0, 1]$ имеют место равенства*

$$F(x_i; \bar{\gamma}) = F(x_i; \bar{\alpha}) = F(x_i; \bar{\beta})$$

и неравенства

$$\begin{aligned} &\Delta F(x; \bar{\alpha}; \bar{\gamma}) > 0, \\ &\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\gamma}) < 0 \end{aligned} \tag{4}$$

в каком-либо из интервалов (x_i, x_{i+1}) (занумерованных в порядке их следования), на которые отрезок $[0,1]$ делится точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, то неравенства (4) имеют место во всех интервалах одинаковой четности с интервалом $(x_i; x_{i+1})$, а неравенства*

$$\begin{aligned} &\Delta F(x; \bar{\alpha}; \bar{\gamma}) < 0, \\ &\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\gamma}) > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

— во всех интервалах различной четности с интервалом (x_i, x_{i+1}).

§ 2. Структура области D_x

Областью D_x называется, как уже упоминалось выше, множество значений функции $F(x; \bar{a})$ при фиксированном значении x. На вопрос о том, какова ее структура, отвечает следующая:

ТЕОРЕМА 3. *Область D_x при любом x отрезка $[0, 1]$ представляет собою интервал (который может быть и бесконечным)**.*

Покажем, во-первых, что на отрезке $[0,1]$ существует по крайней мере одно значение $x = x_0$ такое, что область D_{x_0} содержит по крайней мере два значения. В самом деле, если бы при всяком значении x из $[0,1]$ область D_x состояла только из одного элемента, то, зафиксировав n различных значений x из $[0,1]$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы получили бы, что система уравнений

$$(\text{B}): \quad y_i = F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет относительно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бесконечное множество решений, что противоречит условию 2 из (A).

---

* Если $x_1 \neq 0$, то за первый интервал принимается интервал $(0, x_1)$, при $x_1 = 0$ первым интервалом будет, очевидно, интервал (x_1, x_2).

** Как, например, в том случае, когда функция $F(x; \bar{a})$ есть функция вида (2).

Покажем, во-вторых, что если при некотором $x = x_0$ область D_{x_0} содержит значения y_0' и y_0'', то она содержит все точки отрезка $[y_0', y_0'']$. В самом деле, возьмем систему из n различных значений $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ и две системы значений

$$y_0', y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \quad \text{и} \quad y_0'', y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \tag{6}$$

принадлежащих соответственно областям $D_{x_0}, D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_{n-1}}$.

Каждая из систем уравнений

$$\begin{aligned} y_0' &= F(x_0; a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ y_i &= F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y_0'' &= F(x_0; a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ y_i &= F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned}$$

согласно условию 2 из (А), имеет единственное решение.

Обозначим эти решения соответственно через $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ и $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n''$. Эти решения различны, т. е. существует по крайней мере одно зничение i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такое, что $\alpha_i' \neq \alpha_i''$, так как системы (6) различны $(y_0' \neq y_0'')$.

Возьмем в области $\tilde{a}_i < a_i < \tilde{\tilde{a}}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ множество $\mathfrak{A}$, определяемое системами значений $\{\alpha_i'\}$ и $\{\alpha_i''\}$, т. е. возьмем множество точек, для которых координата a_i изменяется на отрезке, определенном α_i' и α_i'', если $\alpha_i' \neq \alpha_i''$, и $a_i = \alpha_i'$, если $\alpha_i' = \alpha_i''$.

Рассматривая теперь непрерывную функцию $F(x_0; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в замкнутой области $\overline{\mathfrak{A}}$, убеждаемся в том, что D_{x_0} содержит, наряду с y_0' и y_0'', и весь отрезок, ими определяемый.

Покажем, что область $D_{x'}$ при любом x' из отрезка [0,1] является интервалом. Для этого докажем, что область $D_{x'}$ содержит по крайней мере два различных значения $y_{x'}'$ и $y_{x'}''$.

В самом деле, для функций $F(x: \overline{\alpha}')$ и $F(x; \overline{\alpha}'')$, определяемых найденными выше системами $\alpha_1'\, \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ и $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n''$, имеют место равенства

$$F(x_i; \overline{\alpha}') = F(x; \overline{\alpha}'') \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Если бы $D_{x'}$ содержала только одно значение, то отсюда следовало бы, что еще $F(x'; \overline{\alpha}') = F(x'; \overline{\alpha}'')$. Но так как, согласно условию 2 из (А), система уравнений:

$$\begin{aligned} y_{x'} &= F(x'; a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ y_i &= F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

имеет единственное решение, то это означало бы, что $\alpha_i' = \alpha_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $F(x; \overline{\alpha}'') \equiv F(x; \overline{\alpha}'')$, что невозможно, так как $F(x_0; \overline{\alpha}') \neq F(x_0; \overline{\alpha}'')$.

Тот факт, что $D_{x'}$ при любых x' из отрезка [0,1] представляет собой интервал, т. е. что среди чисел, принадлежащих $D_{x'}$, нет ни наибольшего, ни наименьшего, следует из теоремы 2.

В самом деле, допустим, что среди чисел множества $D_{x'}$ имеется наибольшее, которое обозначим через $y^0_{x'}$. Тогда возьмем, наряду с x', еще n различных между собой и отличных от x' значений отрезка [0,1]: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Не нарушая общности рассуждения, можно взять все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или меньше x', или больше x'. Будем считать для определенности, что $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x'$. В каждой из областей D_{x_i} $(i = 2, 3, \ldots, n)$ возьмем по одному значению y^0_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$, причем одно из них, например y^0_2, возьмем из числа внутренних точек множества D_{x_2} и построим функцию $F(x; \overline{\gamma})$ класса K такую, что

$$F(x_i; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = y^0_i \quad (i = 2, \ldots, n),$$

$$F(x'; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = y^0_{x'}.$$

Пусть $F(x_1; \overline{\gamma}) = y^0_1$. Возьмем из множества D_{x_2} два числа $\tilde{y}_2$ и $\tilde{\tilde{y}}_2$ такие, что $\tilde{y}_1 < y^0_2 < \tilde{\tilde{y}}_2$. Построим две функции $F(x; \overline{\alpha'})$ и $F(x; \overline{\alpha''})$ класса K так, чтобы

$$F(x_2; \overline{\alpha'}) = \tilde{y}_2, \quad F(x_2; \overline{\alpha''}) = \tilde{\tilde{y}}_2,$$
$$F(x_i; \overline{\alpha'}) = F(x_i; \overline{\alpha''}) = y^0_i \quad (i = 1, 3, 4, \ldots, n).$$

Тогда, согласно теореме 2, или $F(x'; \overline{\alpha'})$, или $F(x'; \overline{\alpha''})$ должно быть больше, чем $y^0_{x'}$, а это противоречит предположению, что $y^0_{x'}$ — наибольшее из чисел множества $D_{x'}$.

Аналогично можно показать, что среди чисел множества $D_{x'}$ нет наименьшего числа. Приведенный выше метод доказательства теоремы 3, очевидно, не применим в случае $n = 1$, но теорема 3 справедлива и в этом случае, что непосредственно следует из определения (A) функции $F(x; a_1)$, так как функция $y_{x'} = F(x'; a_1)$ является в интервале $\tilde{a}_1 < a_1 < \tilde{\tilde{a}}_1$ непрерывной, строго монотонной функцией переменной a_1.

§ 3. Построение последовательности функций класса K, равномерно сходящейся к данной функции этого же класса

ТЕОРЕМА 4. *Для всякой функции $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ класса K можно построить равномерно сходящуюся к ней последовательность функций этого же класса*

$$\{F(x; \beta^{(k)}_1, \beta^{(k)}_2, \ldots, \beta^{(k)}_n)\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

такую, что $\Delta F(x; \overline{\beta^{(k)}}; \overline{\alpha}) = 0$ для $n-1$ различных данных значений x:

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \leqslant 1 \tag{7}$$

отрезка [0,1], *причем $\Delta F(x; \overline{\beta^{(k)}}; \alpha)$ при переходе через значения x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ меняет знак, а в каждом из интервалов, на которые делится отрезок* [0,1] *точками последовательности* (7), *сохраняет один и тот же знак для всех значений k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.*

Доказательство. Пусть

$$y_i = F(x_i; \bar{\alpha}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{8}$$

— значения функции $F(x; \bar{\alpha})$ в точках последовательности (7).

Возьмем на отрезке [0,1] какую-либо точку x, отличную от точек последовательности (7), и значение y из области $D_{\tilde{x}}$, отличное от $F(\tilde{x}; \bar{\alpha})$. Тогда числа (8) и число $\tilde{y}$, рассматриваемые как n значений некоторой функции $F(x; \bar{\beta})$ класса K в n различных точках отрезка [0,1], однозначно определяют эту функцию, т. е. числа $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$.

Возьмем, далее, в интервале $(\tilde{y}, F(\tilde{x}; \bar{\alpha}))$ последовательность чисел $\{\tilde{y}^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, монотонно сходящуюся к $F(\tilde{x}; \bar{\alpha})$, и определим последовательность функций

$$\{F(x; \beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)})\} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

принадлежащих к классу K, следующим образом:

$$F(x_i; \bar{\beta}^{(k)}) = F(x_i; \bar{\alpha}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и

$$F(\tilde{x}; \bar{\beta}^{(k)}) = \tilde{y}^{(k)}$$

для каждого значения k. Возможность определения такой последовательности функций вытекает из свойства J функции (1).

Определенная таким образом последовательность функций обладает указанными в теореме свойствами. Действительно, из способа построения последовательности (9) непосредственно следует, что $\Delta F(x_i: \bar{\beta}^{(k)}; \alpha) = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$. При этом, вследствие теоремы 1, $\Delta F(x; \bar{\beta}^{(k)}; \alpha)$ при переходе через значение x_i меняет знак, а в каждом из интервалов (x_i, x_{i+1}) сохраняет один и тот же знак при всех k.

Из теоремы 2 вытекает также, что для любого x отрезка [0,1] значение функции $F(x; \bar{\beta}^{(k+1)})$ при любом k находится между $F(x; \bar{\beta}^{(k)})$ и $F(x; \bar{\alpha})$.

Последовательность функций (9) сходится к функции $F(x; \bar{\alpha})$.

В самом деле, допустим, что для некоторого значения x_0, принадлежащего отрезку [0,1], сходимость не имеет места, и покажем, что это допущение приводит к противоречию. Пусть для определенности $F(x_0; \bar{\beta}) < F(x_0; \bar{\alpha})$. Тогда монотонно возрастающая последовательность чисел

$$\{F(x_0; \beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)})\} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

будучи ограниченной, имеет предел, который обозначим через y_0. Очевидно, что при нашем предположении $y_0 < F(x_0; \bar{\alpha})$.

Возьмем число y_0^*, принадлежащее интервалу $(y_0, F(x_0; \alpha))$, и построим функцию $F(x; \bar{\alpha}^*)$ такую, что

$$F(x_i; \bar{\alpha}^*) = F(x_i; \bar{\alpha}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и

$$F(x_0; \bar{\alpha}^*) = y_0^*.$$

В силу теоремы 2, значение $F(\tilde{x}; \overline{\alpha}^*)$ находится внутри интервала $(\tilde{y}, F(\tilde{x}; \overline{\alpha}))$, а так как последовательность чисел $\{F(\tilde{x}; \overline{\beta}^{(k)})\}$ сходится к $F(\tilde{x}; \alpha)$, то можно указать такое $k = m$, что $F(\tilde{x}; \overline{\beta}^{(m)})$ находится между $F(\tilde{x}; \alpha^*)$ и $F(\tilde{x}; \overline{\alpha})$. Но в таком случае, в силу теоремы 2, $F(x_0; \overline{\beta}^{(m)})$ должно находиться между y_0^* и $F(x_0; \overline{\alpha})$, которые, по предположению, различны. Таким образом, мы приходим к противоречию: с одной стороны,

$$F(x_0; \overline{\beta}^{(m)}) < y_0,$$

а с другой,

$$F(x_0; \overline{\beta}^{(m)}) > y_0.$$

В силу теоремы 2, в каждом из интервалов, на которые отрезок [0,1] разбивается точками последовательности (7), последовательность функций (9) представляет собой монотонную последовательность функций. Поэтому на основании теоремы Дини сходимость последовательности (9) к функции $F(x; \overline{\alpha})$ будет равномерной.

§ 4. О нулях разности двух функций интерполяционного класса

В дальнейшем будем различать простые нули функции вида $\Delta F(x; \beta; \overline{\alpha})$ и двойные. Будем называть x_0 простым нулем функции $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$, если она при переходе x через x_0 меняет знак, в противном случае x_0 будем называть двойным нулем.

ТЕОРЕМА 5. *Если m_1 — число простых нулей функции $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$, а m_2 — число ее двойных нулей и $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha}) \not\equiv 0$*, то $m_1 + 2m_2 \leqslant n - 1$.*

Доказательство. В случае, когда $m_2 = 0$, справедливость теоремы непосредственно следует из свойства J функции (1). Покажем, что теорема справедлива и для $m_2 \neq 0$. В этом случае, на основании теоремы 1, $m_1 + m_2 < n - 1$.

Итак, предположим, что $m_2 \neq 0$, $m_1 + 2m_2 > n - 1$ и покажем, что это предположение приводит к противоречию. Заметим, во-первых, что из неравенств $m_1 + m_2 < n - 1$ и $m_1 + 2m_2 > n - 1$ следуют неравенства $m_2 \geqslant 2$ и $m_1 \leqslant n - 3$.

Пусть

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{m_1} \tag{10}$$

— простые нули функции $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$. Этими нулями отрезок [0, 1] разбивается самое большое на $m_1 + 1$ интервалов, в каждом из которых $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$ не меняет знака. При этом в любых двух соседних интервалах она имеет различные знаки (разумеется, в точках, где она не обращается в нуль). Пусть x_1^0 и $x_{m_2}^0$ — наименьший и наибольший (соответственно) из двойных нулей функции $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$**.

---

* Предполагается, что по крайней мере для одного из значений i $(i=1, 2, \ldots, n)$ $\alpha_i \neq \beta_i$.

** Очевидно, что числа 0 и 1 не могут быть двойными нулями функции $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$.

Возьмем на отрезке [0, 1] n различных значений

$$0 \leqslant \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \cdots < \tilde{x}_n \leqslant 1 \tag{11}$$

следующим образом. Если x_1 меньше x_1^0, то берем $\tilde{x}_1 = x_1$, если же x_1^0 меньше x_1, то в качестве $\tilde{x}$ берем любое значение из интервала $(0, x_1^0)$. Включаем, далее, в совокупность чисел (11) все числа совокупности (10) и число x_1^0. Таким образом, получаем m_1+1 или m_1+2 чисел совокупности (11).

Остальные числа совокупности (11) берем или из интервала $(x_{m_2}^0, x_k^*)$, где x_k^* — наименьшее из чисел совокупности (10), удовлетворяющих неравенству $x_{m_2} < x_k$, если такие существуют, или из интервала $(x_{m_2}, 1)$ противном случае.

Построим теперь функцию $F(x; \bar{\gamma})$ такую, что

1. $$\Delta F(\tilde{x}_i; \bar{\gamma}; \bar{\alpha}) = 0$$

для всех x_i совокупности (11), за исключением $\tilde{x}_i = x_1^0$;

2. $$\Delta F(x_1^0; \bar{\gamma}; \bar{\alpha}) \gtrless 0,$$

смотря по тому, больше или меньше нуля функция $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$ в интервале, содержащем точку x_1^0;

3. $$|\Delta F(x; \bar{\gamma}; \bar{\alpha})| < \varepsilon,$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Такое построение, в силу теоремы 4, возможно.

Рассмотрим функцию

$$\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\gamma}) = \Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha}) - \Delta F(x; \bar{\gamma}; \bar{\alpha}).$$

Эта функция будет иметь в качестве нулей все числа совокупности (10) и, кроме того, по два простых нуля в окрестности каждого из двойных нулей функции $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$.

В самом деле, из интервалов, на которые отрезок [0, 1] был разбит посредством чисел совокупности (10), изменился при разбиении отрезка [0, 1] нулями функции $\Delta F(x; \bar{\gamma}; \bar{\alpha})$ только интервал, содержащий точку $x_{m_2}^0$, и, может быть, интервал, содержащий точку x_1^0, в случае, если x_1^0 меньше всех чисел совокупности (10). При этом ни одна из точек последнего разбиения, не принадлежащая совокупности (10), не попала на отрезок $[x_1^0, x_{m_2}^0]$. Поэтому в интервалах последнего разбиения, содержащих точки x_1^0 и $x_{m_2}^0$, и в интервалах, заключенных между ними, функция $\Delta F(x; \bar{\gamma}; \bar{\alpha})$ имеет те же знаки, что и функция $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$, за исключением точек, являющихся двойными нулями функции $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$. А так как $|\Delta F(x; \bar{\gamma}; \bar{\alpha})| < \varepsilon$, то при достаточно малом ε в окрестности каж-

дого из двойных нулей функции $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$ функция $\Delta F(x; \beta; \gamma)$ будет иметь по два различных нуля*. Следовательно, она будет иметь всего $m_1 + 2m_2 > n - 1$ различных нулей, что, в силу свойства J, невозможно. Таким образом, допущение, что $m_1 + 2m_2 > n - 1$, приводит к противоречию.

Так как в доказательстве теоремы 5 были использованы неравенства $m_2 \geqslant 2$ и $m_1 \leqslant n - 3$, то справедливость теоремы установлена, разумеется, только для $n > 3$.

Для $n = 1, 2, 3$ рассуждения, приведенные выше, очевидно, неприменимы, но, как легко видеть, теорема будет справедлива и для этих значений.

В самом деле, для $n = 1$ число нулей $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$ равно нулю, что непосредственно следует из свойства J функции (1). В случае $n = 2$ число различных нулей $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$ не может быть больше единицы, причем этот единственный нуль, если он имеется, не может быть двойным, в силу теоремы 1. В случае $n = 3$ число различных нулей $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$ не может быть больше 2. В силу теоремы 1, если $\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$ имеет два различных нуля, то они должны быть простыми. Если же имеется только один нуль, то он может быть, не нарушая справедливости доказанной теоремы, как простым, так и двойным нулем.

II. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО КЛАССА НА МНОЖЕСТВЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ $n+1$ РАЗЛИЧНЫХ ТОЧЕК ОТРЕЗКА [0,1]

В разделе I рассматривались свойства функций интерполяционного класса K, относящиеся ко всему отрезку [0, 1]. Здесь устанавливаются некоторые свойства функций класса K, относящиеся к любому множеству, состоящему из $n + 1$ различных точек отрезка [0, 1].

Эти свойства, являясь более глубокими свойствами функций интерполяционного класса, играют весьма существенную роль в доказательстве одной из основных теорем раздела III.

§ 5. Условия тождественности двух функций интерполяционного класса

Это условие выражается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 6. *Если для* $n + 1$ *различных значений отрезка* [0, 1]

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant 1 \tag{12}$$

разность

$$\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha}) = F(x; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) - F(x; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

двух функций класса K *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta F(x_i; \overline{\beta}; \overline{\alpha}) \begin{cases} \geqslant 0 \text{ при } i \text{ нечетном}, \\ \leqslant 0 \text{ при } i \text{ четном}, \end{cases} \tag{13}$$

---

* Если $M_1, M_2, \ldots, M_{m_1+1}$ обозначают наибольшие значения функции $|\Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})|$ соответственно в интервалах $J_1, J_2, \ldots, J_{m_1+1}$, на которые отрезок [0, 1] делится точками совокупности (10), а $M = \min[M_1, M_2, \ldots, M_{m_1+1}]$, то достаточно для этого взять $\varepsilon < M$.

или неравенствам

$$\Delta F(x_i; \bar{\beta}; \bar{\alpha}) \begin{cases} \leqslant 0 \text{ при } i \text{ нечетном}, \\ \geqslant 0 \text{ при } i \text{ четном}, \end{cases} \tag{14}$$

то

$$F(x; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \equiv F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Допустим для определенности, что имеют место неравенства (14). Тогда вместо них можем написать

$$\Delta F(x_i; \bar{\beta}; \bar{\alpha}) = (-1)^i \cdot c_i,$$

где $c_i \geqslant 0$.

Возьмем из $n+1$ чисел c_i все отличные от нуля и обозначим их через c_{i_k}, где $k = 1, 2, \ldots, p \leqslant n+1$. Будем считать, что число p больше 1, так как если бы среди чисел c_i было только одно (или не было бы ни одного), отличное от нуля, то функции $F(x; \bar{\alpha})$ и $F(x; \bar{\beta})$ имели бы одинаковые значения в n различных точках отрезка $[0,1]$, и, следовательно, в силу свойства J функции (1), были бы тождественно равны друг другу. Будем также считать, что точки x_{i_k} занумерованы в порядке возрастания, т. е.

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_p}.$$

Возьмем какой-либо из интервалов $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ и подсчитаем число содержащихся в нем нулей функции $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$. Если числа i_k и i_{k+1} одинаковой четности, то функция $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$ на концах интервала имеет один и тот же знак. Следовательно, $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$ обращается в нуль внутри этого интервала четное число раз. Число уже известных нулей $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$, содержащихся в интервале $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$, равно $i_{k+1} - i_k - 1$. Это число при условии одинаковой четности чисел i_k и i_{k+1} нечетное. Таким образом, в рассматриваемом интервале $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ к имеющимся нулям (попарно различным) нужно или прибавить еще один нуль, или считать по крайней мере один из них двойным нулем функции $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$. Если числа i_k и i_{k+1} разной четности, то функция $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$ на концах интервала $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ имеет разные знаки. Следовательно, внутри интервала она имеет нечетное число нулей. Число известных уже нулей, установленное выше и равное $i_{k+1} - i_k - 1$ при условии различной четности чисел i_k и i_{k+1}, будет четным. Таким образом, и в этом случае в рассматриваемом интервале имеется по крайней мере еще один нуль функции $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$, кроме ранее указанных, или по крайней мере один из ранее указанных нулей является двойным нулем.

Следовательно, функция $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$ в каждом интервале $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ имеет не менее чем $i_{k+1} - i_k$ нулей.

Подсчитаем теперь число нулей функции $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$ на всем отрезке $[0, 1]$. Если $i_1 = 1$, то будем считать нули, начиная с интервала (x_1, x_{i_2}), в котором их будет $i_2 - 1$. Если же $i_1 \neq 1$, то необходимо будет подсчитать еще число нулей в полуинтервале $[0, i_1)$. Число известных нулей в этом полуинтервале, очевидно, равно $i_1 - 1$.

Рассмотрим последний интервал $(x_{i_{p-1}}, x_{i_p})$. Если $i_p = n+1$, то число нулей в этом интервале, согласно доказанному выше, равно $n + 1 - i_{p-1}$

Если же i_p не равно $n+1$, т. е. $i_p < n+1$, то нужно учесть еще число нулей в полуинтервале $(x_{i_p}, 1]$, которое равно $n+1-i_p$.

Из всего сказанного выше относительно числа нулей функции $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha})$ в интервалах вида $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ и полуинтервалах $[0, x_{i_1})$ и $(x_{i_p}, 1]$ вытекает, что общее число нулей этой функции на отрезке $[0, 1]$ равно

$$i_1 - 1 + (i_2 - i_1) + \cdots + (i_p - i_{p-1}) + (n + 1 - i_p) = n,$$

откуда, согласно теореме 5, следует, что $\Delta F(x; \bar{\beta}; \bar{\alpha}) \equiv 0$, т. е.

$$F(x; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \equiv F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

§ 6. Система функций, ассоциированная с множеством Y_{n+1} на множестве E_{n+1}

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — $n+1$ различных точек отрезка $[0,1]$. Обозначим это множество через

$$E_{n+1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}.$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ — $n+1$ чисел, каждое из которых принадлежит соответственно $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_{n+1}}$. Это множество обозначим через

$$Y_{n+1} = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}.$$

Возможны два случая:

1. Существует система значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такая, что

$$F(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{15}$$

2. Такая система не существует.

Если имеет место первый случай, то функцию $F(x; \bar{\alpha})$, удовлетворяющую равенствам (15), будем называть функцией, вполне интерполирующей множество Y_{n+1} на множество E_{n+1}. Если же имеет место второй случай, то каждые из n значений множества Y_{n+1}, рассматриваемые как n значений некоторой функции класса K в соответствующих точках множества E_{n+1}, определяют эту функцию.

Таким образом, $n+1$ значений $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, сгруппированных по n, определяют $n+1$ функций класса K. Совокупность этих $n+1$ функций будем называть системой функций, ассоциированной с множеством Y_{n+1} на множестве E_{n+1}. Для краткости будем обозначать ее через $F(Y_{n+1}; E_{n+1})$. Обозначим через $F_i(x)$ ту из функций этой системы, значение которой в точке x_i множества E_{n+1} отлично от y_i.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *Функции $F_i(x)$ системы $F(Y_{n+1}; E_{n+1})$ обладают следующим свойством: либо имеют место неравенста*

$$F_i(x_i) > y_i \quad \text{для } i \text{ нечетных} \tag{16}$$

и

$$F_i(x_i) < y_i \quad \text{для } i \text{ четных,} \tag{17}$$

либо, наоборот, имеют место неравенства (16) *при i четных и* (17) *при i нечетных.*

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из свойства J функции (1). В самом деле, если бы при каком-либо i ($i=1, 2, \ldots, n+1$) имели место неравенства $F_i(x_i) > y_i$ и $F_{i+1}(x_{i+1}) > y_{i+1}$, то это означало бы, что функции $F_i(x)$ и $F_{i+1}(x)$, имеющие, согласно их построению, одинаковые значения в $n-1$ точках отрезка $[0,1]$ (именно во всех точках множества E_{n+1}, за исключением точек x_i и x_{i+1}), сохраняют одно и то же значение еще в одной точке, именно, в некоторой точке x_0 интервала (x_i, x_{i+1}). Но это невозможно, так как $F_i(x) \not\equiv F_{i+1}(x)$.

§ 7. Функции, осциллирующие относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}

Всякую функцию $y = F(x; \bar{\alpha})$ класса K, обладающую тем свойством что ее значения в точках множества E_{n+1} удовлетворяют неравенствам

$$F(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) > y_i \text{ при } i \text{ нечетном,}$$

$$F(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) < y_i \text{ при } i \text{ четном}$$

в случае, если $F_1(x_1) > y_1$, и неравенствам соответственно противоположного смысла в случае $F_1(x_1) < y_1$, будем называть функцией, осциллирующей относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.

ТЕОРЕМА 8. *Если в классе K существует функция, вполне интерполирующая множество $Y_{n+1} = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ на множестве $E_{n+1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, то в нем не существует ни одной функции, осциллирующей относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}. Если же в классе K нет функции, вполне интерполирующей множество Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, то в нем существует бесконечное множество функций, осциллирующих относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.*

Справедливость первого из утверждений теоремы следует непосредственно из свойства J функции (1). Для доказательства второго утверждения покажем сначала (исходя из предположения, что в классе K нет функции, вполне интерполирующей множество Y_{n+1} на множестве E_{n+1}), что существует по крайней мере одна функция класса K, осциллирующая относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.

Возьмем функцию $F_1(x)$ системы $F(Y_{n+1}; E_{n+1})$ и для определенности предположим, что $F_1(x_1) - y_1 > 0$.

В каждом из интервалов (x_i, x_{i+1}) ($i = 2, 3, \ldots, n$) возьмем какую-либо точку x_i^* и построим функцию $F(x; \bar{\alpha})$ класса K такую, что

$$F(x_i^*; \bar{\alpha}) = F_1(x_i^*) \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

и

$$F(x_1; \bar{\alpha}) = y_1^*, \quad y_1 < y_1^* < F_1(x_1).$$

На основании теоремы 1, функция $F(x; \bar{\alpha})$ будет осциллирующей относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.

Чтобы установить теперь бесконечность множества функций класса K, осциллирующих относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, до-

статочно заметить, что число y_1^* может быть любым числом интервала $(y_1, F_1(x_1))$.

§ 8. Равноосциллирующая функция

Функцию $y = F(x; \overline{\alpha})$, осциллирующую относительно множества $Y_{n+1} = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ на множестве $E_{n+1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, назовем равноосциллирующей, если имеют место равенства

$$|F(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - y_i| = L \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

где вещественное число $L > 0$.

Функцию $F(x; \overline{\alpha})$, вполне интерполирующую множество Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, можно рассматривать как равноосциллирующую, соответствующую предельному случаю $L = 0$.

ТЕОРЕМА 9. *Среди всех функций класса K существует одна и только одна функция, равноосциллирующая относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.*

Если в классе K существует функция, вполне интерполирующая множество Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, то справедливость доказываемой теоремы следует непосредственно из теоремы 8.

Если же в классе K нет функции, вполне интерполирующей множество Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, то, согласно теореме 8, в классе K существует бесконечное множество функций, осциллирующих относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.

Докажем, во-первых, что среди них существует по крайней мере одна функция, равноосциллирующая относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.

Пусть $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n+1}(x)$ — система функций, ассоциированная с множеством Y_{n+1} на множестве E_{n+1}. Рассмотрим совокупность чисел

$$|y_i - F_i(x_i)|, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1;$$

не нарушая общности рассуждения, можно предположить, что

$$|y_1 - F_1(x_1)| \leqslant |y_i - F_i(x_i)| \quad (i = 2, 3, \ldots, n+1). \tag{18}$$

Кроме того, допустим для определенности, что $\lambda = F_1(x_1) - y_1 > 0$.

Рассмотрим бесконечную совокупность $\{F(x; \overline{\beta}(\mu))\}$ функций, зависящую от одного параметра и удовлетворяющую следующим условиям:

$$F(x_i; \beta_1(\mu), \beta_2(\mu), \ldots, \beta_n(\mu)) = y_i + (-1)^{i-1} \cdot \mu \quad (i=2, 3, \ldots, n+1), \tag{19}$$

где μ изменяется непрерывно от 0 до λ. Числа $y_i + (-1)^{i-1} \cdot \mu$, вследствие (18) и теоремы 7, принадлежат соответственно множествам D_{x_i}. Покажем, что функция

$$y_1(\mu) = F(x_1; \beta_1(\mu), \beta_2(\mu), \ldots, \beta_n(\mu))$$

является непрерывной монотонно убывающей функцией параметра μ на отрезке $[0, \lambda]$.

Чтобы доказать непрерывность функции $y_1(\mu)$ в любой точке $\mu = \mu^*$ рассматриваемого отрезка $[0, \lambda]$, возьмем в каждом из интервалов

(x_i, x_{i+1}) $(i = 2, 3, \ldots, n)$ по одной точке x_i^* и построим функцию $F(x; \overline{\gamma})$ класса K такую, что

$$F(x_i^*; \overline{\gamma}) = F(x_i^*; \beta_1(\mu^*), \beta_2(\mu^*), \ldots, \beta_n(\mu^*)), \tag{20}$$

$$\Delta F(x_1; \overline{\gamma}; \overline{\beta}(\mu^*)) < 0 \tag{21}$$

и

$$|\Delta F(x; \overline{\gamma}; \overline{\beta}(\mu^*))| \leqslant \varepsilon \tag{22}$$

на всем отрезке [0,1]. В силу теоремы 4, это построение возможно. Возьмем затем в качестве δ положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\delta \leqslant \min\{|\Delta F(x_i; \overline{\gamma}; \overline{\beta}(\mu^*))|\}. \tag{23}$$

Пусть μ удовлетворяет неравенствам

$$\mu^* < \mu < \mu^* + \delta.$$

Разность функций

$$\Delta F(x; \overline{\beta}(\mu^*), \beta(\mu)) \equiv F(x; \overline{\beta}(\mu^*)) - F(x; \beta(\mu)),$$

обращаясь, согласно построению, в нуль в каждом из интервалов (x_i, x_{i+1}) $(i = 2, 3, \ldots, n)$, удовлетворяет, вследствие теоремы 1, неравенству

$$\Delta F(x_1; \overline{\beta}(\mu^*); \overline{\beta}(\mu)) > 0. \tag{24}$$

Из неравенств (21), (23) и теоремы 2 следует неравенство

$$\Delta F(x_1; \overline{\gamma}; \overline{\beta}(\mu)) < 0, \tag{25}$$

а отсюда и из соотношений (23) и (24) следует, что

$$|y_1(\mu^*) - y_1(\mu)| < \varepsilon.$$

Аналогично доказывается соотношение

$$|y_1(\mu^*) - y_1(\mu)| < \varepsilon$$

и в случае, когда $\mu^* - \delta < \mu < \mu^*$. Таким образом непрерывность функции $F(x_1; \beta_1(\mu), \beta_2(\mu), \ldots, \beta_n(\mu))$ на отрезке $[0,\lambda]$ доказана. Для установления ее монотонного убывания достаточно заметить, что неравенство (24) есть следствие неравенства $\mu^* < \mu$. Из непрерывности и монотонного убывания функции $F(x_1; \overline{\beta}(\mu))$ на отрезке $[0, \lambda]$ непосредственно следует непрерывность и монотонное убывание функции $\varphi(\mu) = F(x_1; \overline{\beta}(\mu)) - y_1$ на этом же отрезке.

Следовательно, при возрастании μ от 0 до λ и убывания $\varphi(\mu)$ от λ будем иметь (вследствие непрерывности функции $\varphi(\mu)$) при некотором значении $\mu = \tilde{\mu}$ из интервала $0 < \mu < \lambda$ равенство $\varphi(\tilde{\mu}) = \tilde{\mu}$. Отсюда следует, что функция $F(x; \beta_1(\tilde{\mu}), \beta_2(\tilde{\mu}), \ldots, \beta_n(\tilde{\mu}))$ является равноосциллирующей относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, так как равенство $|F(x_i; \overline{\beta}(\tilde{\mu}))| = \tilde{\mu}$ имеет место для всех $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Докажем теперь единственность функции, равноосциллирующей относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}. В самом деле, допустим, что существует еще одна такая функция $F(x; \overline{\alpha})$. Пусть

$$\left|F(x_i;\ \beta(\tilde{\mu})) - y_i\right| = \mu,\text{*}$$

а

$$\left|F(x_i;\ \bar{\alpha}) - y_i\right| = \mu_0,$$

причем $\mu_0 \neq \tilde{\mu}$. Равенство $\mu_0 = \tilde{\mu}$ невозможно, так как, по предположению,

$$F(x;\ \bar{\alpha}) \not\equiv F(x;\ \bar{\beta}(\tilde{\mu})).$$

Тогда $\Delta F(x;\ \bar{\alpha};\ \bar{\beta}(\tilde{\mu}))$ удовлетворяет либо неравенствам

$$\Delta F(x_i;\ \bar{\alpha};\ \bar{\beta}(\tilde{\mu})) > 0 \text{ при } i \text{ нечетном}$$

и

$$\Delta F(x_i;\ \bar{\alpha};\ \beta\ (\tilde{\mu})) < 0 \text{ при } i \text{ четном},$$

либо неравенствам

$$\Delta F(x_i;\ \bar{\alpha};\ \bar{\beta}(\tilde{\mu})) < 0 \text{ при } i \text{ нечетном}$$

и

$$\Delta F(x_i;\ \bar{\alpha};\ \bar{\beta}(\tilde{\mu})) > 0 \text{ при } i \text{ четном}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Отсюда, на основании теоремы 6, следует, что

$$F(x;\ \bar{\alpha}) \equiv F(x;\ \bar{\beta}(\tilde{\mu})).$$

ТЕОРЕМА 10. *Если* $F(x;\ \bar{\alpha})$ — *функция класса* K, *равноосциллирующая относительно множества* $Y_{n+1} = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ *на множестве* $E_{n+1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, *а* $F(x;\ \bar{\beta})$ — *любая из функций, осциллирующих относительно множества* Y_{n+1} *на множестве* E_{n+1}, *отличная от* $F(x;\ \bar{\alpha})$, *то*

$$m < L = |y_i - F(x_i;\ \bar{\alpha})| < M,$$

где

$$m = \min\{|y_i - F(x_i;\ \bar{\beta})|\},$$

а

$$M = \max\{|y_i - F(x_i;\ \bar{\beta})|\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Доказательство. В самом деле, если допустить, что $L \leqslant m$, то функция $\Delta F(x;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha})$ должна удовлетворять или неравенствам

$$\Delta F(x_i;\ \bar{\beta};\ \bar{\alpha}) \begin{cases} \geqslant 0 \text{ при } i \text{ нечетном}, \\ \leqslant 0 \text{ при } i \text{ четном}, \end{cases}$$

или неравенствам

$$\Delta F(x;\bar{\beta};\ \bar{\alpha}) \begin{cases} \leqslant 0 \text{ при } i \text{ нечетном}, \\ \geqslant 0 \text{ при } i \text{ четном}. \end{cases}$$

Таким образом, согласно теореме 6, будем иметь $F(x;\ \bar{\beta}) \equiv F(x;\ \bar{\alpha})$, но это невозмножно, так как противоречит нашему предположению, что $F(x;\ \bar{\beta}) \not\equiv F(x;\bar{\alpha})$.

Рассуждая аналогично, убеждаемся в том, что к противоречию приводит также и предположение, что $L \geqslant M$. Следовательно, $m < L < M$.

---

* В случае $\tilde{\mu} = 0$ единственность функции $F(x;\ \bar{\beta}(\tilde{\mu}))$ следует непосредственно из теоремы 8.

III. РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО КЛАССА

В этом разделе рассматриваются некоторые вопросы равномерного приближения функций класса C посредством функций класса K, причем сначала они рассматриваются на множестве, состоящем из $n+1$ различных точек отрезка $[0,1]$, а затем на любом замкнутом множестве, содержащем не менее чем $n+1$ различных точек отрезка $[0,1]$, в том числе и на самом отрезке $[0,1]$.

§ 9. Приближение на множестве, состоящем из $n+1$ различных точек отрезка $[0,1]$

Докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 11. *Для того чтобы функция* $F(x;\overline{\alpha})$ *класса* K *была функцией, наименее уклоняющейся от функции* $f(x)$ *класса* C *на множестве* $E_{n+1}=\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, *состоящем из* $n+1$ *различных точек отрезка* $[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы она была функцией, равноосциллирующей относительно множества* $Y_{n+1}=\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n+1})\}$ *на множестве* E_{n+1}.

Доказательство. Пусть $F(x;\overline{\alpha})$ — функция, наименее уклоняющаяся от функции $f(x)$ на множестве E_{n+1}. Тогда либо $F(x;\overline{\alpha})$ является функцией, вполне интерполирующей множество Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, либо нет. Если имеет место первый случай, то необходимость условия доказана. Если же имеет место второй случай, то, согласно теореме 9, в классе K существует функция $F(x;\overline{\beta})$, равноосциллирующая относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}.

Покажем, что $F(x;\overline{\alpha})\equiv F(x;\overline{\beta})$. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда

$$\max\{|f(x_i)-F(x_i;\overline{\alpha})|\}\leqslant|f(x_i)-F(x_i;\overline{\beta})|.$$

Но это означает, что имеют место либо неравенства

$$\Delta F(x_i;\overline{\beta};\overline{\alpha})\begin{cases}\geqslant 0 \text{ при } i \text{ нечетном},\\ \leqslant 0 \text{ при } i \text{ четном},\end{cases}$$

либо неравенства

$$\Delta F(x_i;\overline{\beta};\overline{\alpha})\begin{cases}\leqslant 0 \text{ при } i \text{ нечетном},\\ \geqslant 0 \text{ при } i \text{ четном}.\end{cases}$$

Отсюда следует, согласно теореме 6, что $F(x;\overline{\alpha})\equiv F(x;\overline{\beta})$.

Докажем достаточность условия. Пусть $F(x;\overline{\alpha})$ — функция, равноосциллирующая относительно множества Y_{n+1} на множестве E_{n+1}, и допустим, что она не является функцией, наименее уклоняющейся от $f(x)$ на этом множестве. Тогда в классе K существует функция $F(x;\overline{\gamma})$ такая, что

$$\max_{E_{n+1}}|f(x)-F(x;\overline{\gamma})|=\mu^*$$

меньше числа

$$\mu=|f(x_i)-F(x_i;\overline{\alpha})| \quad (i=1, 2, \ldots, n+1).$$

Но это приводит к противоречию, так как функция $\Delta F(x; \overline{\alpha}; \overline{\gamma})$ должна иметь на отрезке [0,1] не менее чем n различных нулей, не будучи тождественно равной нулю.

Из доказанной теоремы и из теоремы 9 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 12. *Для каждой данной функции $f(x) \in C$ и каждого данного множества E_{n+1}, состоящего из $n+1$ различных точек отрезка [0,1], существует в классе K одна и только одна функция $F(x; \overline{\alpha})$, наименее уклоняющаяся от функции $f(x)$ на множестве E_{n+1}.*

Простой перефразировкой теоремы 10 является следующее распространение теоремы Валле-Пуссена, относящейся к многочленам, на функции класса K.

ТЕОРЕМА 13. *Если функция $F(x; \overline{\beta})$ — какая-либо из функций класса K, осциллирующих относительно $f(x)$ на множестве E_{n+1}, состоящем из $n+1$ различных точек отрезка [0,1], и*

$$r_i = |f(x_i) - F(x_i; \overline{\beta})| \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

то наилучшее приближение функции $f(x) \in C$ на множестве E_{n+1} посредством функций класса K заключается между наименьшим и наибольшим из чисел r_i.

§ 10. Приближение на произвольном замкнутом множестве

ТЕОРЕМА 14. *Если абсолютный максимум функции $|f(x) - F(x; \overline{\alpha})|$ достигается не менее чем в $n+1$ точках*

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1} \tag{26}$$

замкнутого множества $E \in [0,1]$, в которых разность $f(x) - F(x; \overline{\alpha})$ последовательно меняет знак, то $F(x; \overline{\alpha})$ является функцией класса K, наименее уклоняющейся от функции $f(x) \in C$ на множестве E.

Доказательство. Пусть $|R(x)| = |f(x) - F(x; \overline{\alpha})|$ достигает своего абсолютного максимума μ с последовательным изменением знака $R(x)$ в $n+1$ точках совокупности (26) множества E и пусть в классе K существует функция $F(x; \overline{\beta})$ такая, что

$$\max_E |\widetilde{R}(x)| = \max_E |f(x) - F(x; \overline{\beta})| = \mu' < \mu. \tag{27}$$

Тогда разность

$$R(x) - \widetilde{R}(x) = F(x; \overline{\beta}) - F(x; \overline{\alpha}) = \Delta F(x; \overline{\beta}; \overline{\alpha})$$

в указанных $n+1$ точках (26) меняет последовательно знак и, следовательно, обращается в нуль внутри каждого из интервалов

$$(\xi_i, \xi_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, эта разность имеет на отрезке $[0,1]$ n нулей и, следовательно, в силу свойства J функции (1), $F(x;\overline{\beta})\equiv F(x;\overline{\alpha})$, что невозможно, так как, по предположению (неравенство (27)), $F(x;\overline{\alpha})$ и $F(x;\overline{\beta})$ — различные функции класса K. Из только что полученного противоречия следует справедливость теоремы.

ТЕОРЕМА 16. *Для каждой функции $f(x)$ класса C существует одна и только одна функция $F(x;\overline{\alpha})$ класса K, наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на замкнутом множестве $E\in[0,1]$, содержащем не менее $n+1$ различных точек. При этом наилучшее приближение $\mu(f;E)$ функции $f(x)$ посредством функций класса K на множестве E есть верхняя грань наилучших приближений $f(x)$ посредством функций класса K на множествах $E_{n+1}=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\}$, состоящих из $n+1$ различных точек множества E.*

Доказательство. Согласно теореме 12, каждому множеству E_{n+1}, состоящему из $n+1$ различных точек множества E, соответствует определенное число $\mu=\mu(f;E_{n+1})$ — значение наилучшего приближения функции $f(x)$ посредством функций класса K на множестве E_{n+1}. По определению, каждое из этих чисел есть число положительное или нуль. Верхняя грань $\tilde{\mu}$ этого множества $\{\mu\}$ будет равна нулю, очевидно, только тогда, когда $f(x)$ принадлежит классу K. Множество $\{\mu\}$ ограничено сверху, так как для любого μ имеет место неравенство

$$\mu\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-F(x;\overline{\beta})|,$$

где $F(x;\overline{\beta})$ — какая-либо из функций класса K.

Покажем, что $\tilde{\mu}$ — верхняя грань множества $\{\mu\}$ — принадлежит множеству $\{\mu\}$. Иначе говоря, покажем, что существуют множество $E^0_{n+1}=\{x^0_1,x^0_2,\ldots,x^0_{n+1}\}$, состоящее из $n+1$ различных точек множества E, и функция $F(x;\overline{\alpha})$ класса K такие, что

1. $F(x;\overline{\alpha})$ есть функция класса K, наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на множестве E^0_{n+1};

2. $\tilde{\mu}$ равно уклонению $F(x;\overline{\alpha})$ от функции $f(x)$ на множестве E^0_{n+1}.

Множество $\{\mu\}$, вообще говоря, может быть или конечным или бесконечным. Принадлежность $\tilde{\mu}$ множеству $\{\mu\}$ в первом случае очевидна. Следовательно, нужно установить только принадлежность $\tilde{\mu}$ множеству $\{\tilde{\mu}\}$ для случая, когда множество $\{\mu\}$ бесконечно. С этой целью выберем из множества $\{\mu\}$ монотонно возрастающую последовательность

$$\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_i,\ldots, \tag{28}$$

сходящуюся к $\tilde{\mu}$. Этой последовательности чисел соответствует последовательность функций

$$\{F(x;\overline{\beta}^{(i)})\} \tag{29}$$

и последовательность множеств

$$E^{(i)}_{n+1}\equiv\{x^{(i)}_1,x^{(i)}_2,\ldots,x^{(i)}_{n+1}\} \tag{30}$$

таких, что

$$|F(x_\nu^{(i)}; \overline{\beta}^{(i)}) - f(x_\nu^{(i)})| = \mu_i \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1;\ i = 1, 2, 3, \ldots).$$

При этом выбор чисел последовательности (28) произведен так, что разности $f(x) - F(x; \overline{\beta}^{(i)})$ в точках $x_\nu^{(i)}$ для одного и того же ν при всех $i = 1, 2, 3, \ldots$ имеют одинаковые знаки.

Рассматривая каждое из множеств последовательности (30) как точку единичного куба $n+1$-мерного пространства, заключаем, что последовательность (30) имеет по крайней мере одну предельную точку.

Пусть множество $E_{n+1}^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n+1}^0\}$ будет предельной точкой последовательности (30). Вследствие замкнутости множества E множество $E_{n+1}^0 \in E$. Мы можем считать, взяв в случае необходимости подпоследовательность последовательности (30), что $\lim_{i\to\infty} x_\nu^{(i)} = x_\nu^0$. Очевидно,

$$0 \leqslant x_1^0 \leqslant x_2^0 \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1}^0 \leqslant 1.$$

Докажем, что все числа

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n+1}^0 \tag{31}$$

различны между собою. Для этого предположим, что совокупность (31) содержит $l < n+1$ различных чисел, и покажем, что это предположение приводит к противоречию.

В самом деле, пусть $x_1^0 < x_2^0 < \ldots < x_l^0$ — l различных чисел системы (31) и пусть с $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_l^0$ соответственно совпадают $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ чисел системы (31), причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l = n + 1.$$

Возьмем функцию $F(x; \overline{\gamma})$ класса K такую, что

$$F(x_\nu^0; \overline{\gamma}) = f(x_\nu^0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, l).$$

Тогда, вследствие непрерывности функции $R(x; \overline{\gamma}) = f(x) - F(x; \overline{\gamma})$ на отрезке [0,1], можно выбрать положительное число

$$\delta < \frac{1}{2} \min\{|x_\nu^0 - x_{\nu+1}|\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, l-1)$$

такое, что

$$|R(x; \overline{\gamma})| < \frac{\tilde{\mu}}{3}, \tag{32}$$

если $|x_\nu^0 - x| < \delta$.

Можно указать номер i_1 такой, что для каждого $i > i_1$ в соответствующем этому i множестве $E_{n+1}^{(i)}$ точки $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{\alpha_1}^{(i)}$ попадут в интервал $|x_1^0 - x| < \delta$, точки $x_{\alpha_1+1}^{(i)}, x_{\alpha_1+2}^{(i)}, \ldots, x_{\alpha_1+\alpha_2}^{(i)}$ — в интервал $|x_2^0 - x| < \delta$ и т. д. и, наконец, точки $x_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{l-1}+1}^{(i)}, \ldots, x_{n+1}^{(i)}$ попадут в интервал $|x_l^0 - x| < \delta$.

Наряду с этим можно указать номер i_2 такой, что для каждой функции $F(x; \bar\beta^{(i)})$ последовательности (29) с номером $i > i_2$ будет выполняться неравенство

$$|f(x_\nu^{(i)}) - F(x_\nu^{(i)}; \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \ldots, \beta_n^{(i)})| > \frac{2}{3}\tilde{\mu}. \qquad (33)$$

Если взять i большим, чем i_1 и i_2, то функция $F(x; \bar\beta^{(i)})$ последовательности (29), соответствующая этому значению i, будет иметь с функцией $F(x; \bar\gamma)$ равные значения в $\alpha_1 - 1$ различных точках интервала $(x_1^{(i)}, x_{\alpha_1}^{(i)})$, в $\alpha_2 - 1$ различных точках интервала $(x_{\alpha_1+1}^{(i)}, x_{\alpha_2}^{(i)})$ и т. д. и, наконец, в $\alpha_l - 1$ различных точках интервала $(x_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{l-1}+1}, x_{n+1})$.

В самом деле, рассмотрим разность

$$F(x_k^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) - F(x_k^{(i)}; \bar\gamma) = \{F(x_k^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) - f(x_k^{(i)})\} + \{f(x_k^{(i)}) - F(x_k^{(i)}; \bar\gamma)\}.$$

При i, большем чем i_1 и i_2, выражение, стоящее в первой фигурной скобке, по абсолютной величине больше $\frac{2}{3}\tilde{\mu}$, согласно неравенству (33), и при $k = 1, 2, \ldots, \alpha_1$ последовательно меняет знак. С другой стороны, абсолютная величина выражения, стоящего во второй фигурной скобке, меньше (вследствие неравенства (32)), чем $\frac{1}{3}\tilde{\mu}$. Таким образом, разность $F(x_k^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) - F(x_k^{(i)}; \bar\gamma)$ последовательно меняет знак, когда k пробегает значения $1, 2, \ldots, \alpha_1$ и, следовательно, обращается в нуль по крайней мере в $\alpha_1 - 1$ различных точках интервала $(x_1^{(i)}, x_{\alpha_1}^{(i)})$.

Аналогично устанавливается справедливость утверждения для каждого из остальных интервалов.

Кроме того, функции $F(x; \bar\gamma)$ и $F(x; \bar\beta^{(i)})$ имеют равные значения по крайней мере в одной точке в каждом из $l - 1$ интервалов

$$(x_{\alpha_1}^{(i)}, x_{\alpha_1+1}^{(i)}), (x_{\alpha_1+\alpha_2}^{(i)}, x_{\alpha_1+\alpha_2+1}^{(i)}), \ldots, (x_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{l-1}}^{(i)}, x_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{l-1}+1}).$$

В самом деле, разности

$$f(x_{\alpha_1}^{(i)}) - F(x_{\alpha_1}^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) \text{ и } f(x_{\alpha_1+1}^{(i)}) - F(x_{\alpha_1+1}^{(i)}; \bar\beta^{(i)})$$

имеют разные знаки. С их помощью составим равенства

$$F(x_{\alpha_1}^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) - F(x_{\alpha_1}^{(i)}; \bar\gamma) = \{F(x_{\alpha_1}^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) - f(x_{\alpha_1}^{(i)})\} + \{f(x_{\alpha_1}^{(i)}) - F(x_{\alpha_1}^{(i)}; \bar\gamma)\},$$

$$F(x_{\alpha_1+1}^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) - F(x_{\alpha_1+1}^{(i)}; \bar\gamma) =$$

$$= \{F(x_{\alpha_1+1}^{(i)}; \bar\beta^{(i)}) - f(x_{\alpha_1+1}^{(i)})\} + \{f(x_{\alpha_1+1}^{(i)}) - F(x_{\alpha_1+1}^{(i)}; \bar\gamma)\}.$$

В силу (32) и (33), выражения, стоящие в первых фигурных скобках правых частей этих равенств, по абсолютной величине больше $\frac{2}{3}\tilde{\mu}$ и имеют разные знаки, а выражения, стоящие во вторых фигурных скобках, по абсолютной величине меньше $\frac{1}{3}\tilde{\mu}$. Отсюда следует, что левые части рассматриваемых равенств имеют противоположные знаки, и, таким образом, в интервале $(x_{\alpha_1}^{(i)}, x_{\alpha_1+1}^{(i)})$ существует по меньшей мере одна точка,

в которой функции $F(x; \overline{\beta}^{(i)})$ и $F(x; \overline{\gamma})$ имеют равные значения. Аналогично это обстоятельство устанавливается для всех остальных интервалов. Следовательно, $F(x; \overline{\beta}^{(i)})$ и $F(x; \overline{\gamma})$ имеют одинаковые значения по крайней мере еще в $l-1$ различных точках отрезка $[0, 1]$. Таким образом, они имеют равные значения по крайней мере в n различных точках отрезка $[0, 1]$, что невозможно, так как по построению $F(x; \overline{\beta}^{(i)})$ и $F(x; \overline{\gamma})$ — различные функции.

Отсюда следует, что все числа системы (31) различны между собою.

Возьмем теперь функцию $F(x; \overline{\alpha})$, равноосциллирующую относительно множества $Y_{n+1}^0 = \{f(x_1^0), f(x_2^0), \ldots, f(x_{n+1}^0)\}$ на множестве $E_{n+1} = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n+1}^0\}$, где $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n+1}^0$ — числа последовательности (31), и покажем, что значение

$$|f(x_k^0) - F(x_k^0; \overline{\alpha})| = \mu_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

равно $\widetilde{\mu}$.

В самом деле, μ_0 не может быть больше $\widetilde{\mu}$, так как $\widetilde{\mu}$ есть точная верхняя грань множества $\{\mu\}$, а μ_0 — одно из чисел этого множества.

Допустим теперь, что $\mu_0 < \widetilde{\mu}$. Вследствие непрерывности функции

$$R(x; \overline{\alpha}) = f(x) - F(x; \overline{\alpha})$$

можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$|R(x_k^0; \overline{\alpha}) - R(x; \overline{\alpha})| < \frac{1}{3}(\widetilde{\mu} - \mu_0), \tag{34}$$

как только x попадает в интервал $|x_k^0 - x| < \delta$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Возьмем теперь число i достаточно большим для того, чтобы каждое из чисел $x_k^{(i)}$ множества $E_{n+1}^{(i)}$, принадлежащего последовательности (30), попало соответственно внутрь интервала $|x_k^0 - x| < \delta$ и чтобы выполнялись неравенства

$$|f(x_k^{(i)}) - F(x_k^{(i)}; \overline{\beta}_k^{(i)})| < \frac{2}{3}\widetilde{\mu} + \frac{1}{3}\mu_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{35}$$

Тогда, на основании (34) и (35), в равенстве

$$F(x_k^{(i)}; \overline{\beta}^{(i)}) - F(x_k^{(i)}; \overline{\alpha}) = \{F(x_k^{(i)}; \overline{\beta}^{(i)}) - f(x_k^{(i)})\} + \{f(x_k^{(i)}) - F(x_k^{(i)}; \overline{\alpha})\}$$

выражение, стоящее в первой фигурной скобке, по абсолютной величине больше $\frac{2}{3}\widetilde{\mu} + \frac{1}{3}\mu_0$ и меняет знак при $k = 1, 2, \ldots, n+1$, в то время как для выражения, стоящего во второй фигурной скобке, имеет место неравенство

$$|f(x_k^{(i)}) - F(x_k^{(i)}; \overline{\alpha})| \leqslant |f(x_k^0) - F(x_k^0; \overline{\alpha})| + \frac{1}{3}(\widetilde{\mu} + \mu_0) <$$
$$< \frac{2}{3}\mu_0 + \frac{1}{3}\widetilde{\mu} < \frac{2}{3}\widetilde{\mu} + \frac{1}{3}\mu_0.$$

Таким образом, левая часть рассматриваемого равенства меняет знак при $k = 1, 2, \ldots, n+1$, что влечет, вследствие свойства J функции (1), $F(x; \overline{\beta}^{(i)}) \equiv F(x; \overline{\alpha})$ для достаточно больших i, а это невозможно, так

как $F(x_k^{(i)}; \beta^{(i)}) \neq F(x_k^{(i)}; \overline{\alpha})$ для достаточно большого значения i. Следовательно, $\mu_0 = \widetilde{\mu}$.

Итак, мы установили, что $\widetilde{\mu}$ принадлежит множеству $\{\mu\}$ и во втором случае, т. е. в случае, когда множество $\{\widetilde{\mu}\}$ бесконечно.

Докажем теперь, что

$$\widetilde{\mu} = \max_E |f(x) - F(x; \overline{\alpha})|.$$

В самом деле, если бы было $\max\limits_E |f(x) - F(x; \overline{\alpha})| = \mu^0 > \widetilde{\mu}$, то существовала бы в множестве E по крайней мере одна точка x^*, в которой функция $|f(x) - F(x; \overline{\alpha})|$ принимала бы значение μ^0.

Возможны три случая:

1. число x^* меньше всех чисел системы (31);
2. число x^* больше всех чисел системы (31);
3. число x^* содержится в одном из интервалов (x_k^0, x_{k+1}^0) $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Образуем теперь множество

$$E_{n+1}^* = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x^*, x_{k+1}^0, \ldots, x_{n+1}^0\}$$

из $n+1$ различных точек множества E следующим образом.

В первом случае, если разность $f(x^*) - F(x^*; \overline{\alpha})$ имеет тот же знак, что и разность $f(x_1^0) - F(x_1^0; \overline{\alpha})$, множество E_{n+1}^* получаем из множества $E_{n+1}^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n+1}^0\}$ путем замены x_1^0 на x^*; если же знак первой разности противоположен знаку второй разности, то полагаем

$$E_{n+1}^* = \{x^*, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}.$$

Во втором случае для получения E_{n+1}^* поступаем аналогично, заменяя x_{n+1}^0 в E_{n+1}^0 на x^* или выкидывая x_1^0 и присоединяя справа x^*.

В третьем случае, т. е. в случае, когда x^* находится внутри интервала (x_k^0, x_{k+1}^0), одна из разностей

$$f(x_k^0) - F(x_k^0; \overline{\alpha}) \tag{а}$$

или

$$f(x_{k+1}^0) - F(x_{k+1}^0; \overline{\alpha}) \tag{б}$$

имеет тот же знак, что и разность

$$f(x^*) - F(x^*; \overline{\alpha}). \tag{в}$$

В этом случае строим E_{n+1}^*, заменяя в E_{n+1}^0 одну из точек x_k^0 или x_{k+1}^0 на x^* в зависимости от того, будет ли разность (в) иметь знак, совпадающий со знаком разности (а) или разности (б). На полученном таким образом множестве E_{n+1}^* функция $F(x; \overline{\alpha})$ будет осциллирующей относительно множества

$$Y_{n+1}^* = \{f(x_1^0), \ldots, f(x_{k+1}^0), f(x^*), f(x_{k+1}^0), \ldots, f(x_{n+1}^0)\},$$

причем в n точках множества E^*_{n+1} значения функции $|f(x) - (x; F\ \overline{\alpha})$ равны $\widetilde{\mu}$ и в одной из них ее значение равно $\mu^0 > \widetilde{\mu}$. Согласно теореме 9, в классе K существует функция $F(x;\ \alpha_1^*,\ \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$, равноосциллирующая относительно множества Y^*_{n+1} на множестве E^*_{n+1}. Пусть

$$|f(x) - F(x;\ \overline{\alpha}^*)| = \mu^*$$

в точках множества E^*_{n+1}. Тогда, согласно теореме 13, число μ^* должно удовлетворять неравенству $\mu^* > \widetilde{\mu}$, что невозможно, так как число μ^* принадлежит множеству $\{\mu\}$, точной верхней гранью которого является число $\widetilde{\mu}$.

Таким образом, предположение, что $\mu^0 > \widetilde{\mu}$, приводит к противоречию. Следовательно, $\mu^0 = \widetilde{\mu}$, и функция $F(x;\ \overline{\alpha})$, вследствие теоремы 14, является функцией класса K, наименее уклоняющейся от функции $f(x)$ на множестве E.

Покажем, что в классе K существует только одна функция $F(x;\ \overline{\alpha})$, наименее уклоняющаяся от функции $f(x)$ на множестве E.

Допустим, что $F(x; \overline{\beta})$ — другая такая функция. Разность

$$\Delta F(x: \overline{\alpha};\ \overline{\beta}) = F(x;\ \overline{\alpha}) - F(x;\ \overline{\beta}) = \{f(x) - F(x;\ \overline{\beta}\} - \{f(x) - F(x;\ \overline{\alpha})\}$$

в точках множества $E^0_{n+1} = \{x^0_1,\ x^0_2,\ \ldots,\ x^0_{n+1}\}$, очевидно, либо будет равна нулю, либо будет иметь знак, противоположный знаку разности $f(x) - F(x;\ \overline{\alpha})$. Отсюда, согласно теореме 6, следует, что $F(x;\ \overline{\beta}) \equiv$ $\equiv F(x;\ \alpha)$.

Таким образом, свойство J, которым обладает функция (1) $y = F(x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, является достаточным (как установлено в теоремах 12 и 15) не только для существования в классе K, определяемом функцией (1), функции $F(x; \alpha)$, наименее уклоняющейся от функции $f(x)$ класса C на замкнутом множестве, состоящем не менее чем из $n+1$ различных точек отрезка [0,1], но и для единственности функции $F(x;\ \overline{\alpha})$.

В случае, когда функция $F(x;\ \overline{\alpha})$ имеет вид (2), свойство J является, как показал Haar ([5]), также и необходимым условием единственности функции $F(x; \overline{\alpha})$, наименее уклоняющейся от функции $f(x) \in C$.

Из теорем 11, 14 и 15 непосредственно следует, что и в случае равномерного приближения функций класса C посредством функций класса K справедлива основная теорема Чебышева.

ТЕОРЕМА 16. *Для того чтобы функция $F(x;\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K$ была наименее уклоняющейся от функции $f(x) \in C$ на замкнутом множестве E, содержащем не менее $n+1$ различных точек отрезка* [0,1], *необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум функции $|F(x; \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n) - f(x)|$ достигался не менее чем в $n+1$ точках $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$ множества E, в которых разность $f(x) - F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ последовательно меняет знак.*

В заключение выражаю искреннюю признательность С. М. Никольскому и Д. А. Райкову за ряд ценных замечаний, содействовавших улучшению стиля этой статьи.

Поступило
18.1. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, ч. 1, М.—Л., ОНТИ, 1937.

[2] Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

[3] Чебышев П. Л., Сочинения, т. II, М.—Л., 1947.

[4] Young J. W., General theory of approximations by functions involving a given number of arbitrary parameters, Trans. of the Amer. Math. Soc., 8 (1907), 331—344.

[5] Haar A., Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, Mathem. Ann., 78 (1917), 294—311.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 101—112

И. Н. САНОВ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МИНКОВСКОГО

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе показывается, что геометрический метод автора, найденный им в 1941 году, достаточен для доказательства теоремы Минковского об унимодулярных линейных преобразованиях лучевого тела достаточно малого объема, а также для доказательства основной части обобщений этой теоремы, сделанных Э. Хлавка.

Минковский в письме к Эрмиту ([1]) высказал следующее утверждение: *Если в m-мерном пространстве имеется центрально-симметрическое тело T с центром в начале координат, m-мерный объем которого $v < 2\zeta(m)$, то найдется такое унимодулярное линейное преобразование, которое переводит выпуклое тело T в выпуклое тело T', не содержащее, кроме начала координат, точек со всеми целыми координатами. $\zeta(m)$ — дзета-функция Римана.*

От Минковского не осталось доказательства этого утверждения.

В 1941 году мною на семинаре по алгебре в Ленинградском государственном университете докладывалась работа по полиномам с целыми коэффициентами, наименее уклоняющимися от нуля. Вследствие ряда обстоятельств эта работа ([2]) была опубликована только в 1949 г.

Лемма 1 работы ([2]) представляет собой лишь незначительно ослабленное утверждение Минковского.

В 1943 г. вышла работа Хлавка ([3]), в которой получен ряд результатов по геометрической теории чисел, в том числе доказано утверждение Минковского. Доказательство проводится формальными преобразованиями характеристических функций множеств.

В настоящей работе показывается, что основные результаты Хлавка, в том числе теорема Минковского, получаются простым развитием леммы 1 работы ([2]) автора. Весь метод доказательства основан на наглядно геометрическом анализе.

В работе будут существенно использованы понятия и обозначения, введенные в статье автора ([2]).

Назовем m-кратный интеграл функции единица по области Ω m-мерным объемом области Ω.

В работе ([2]) число измерений пространства обозначается через $n+1$. Мы сохраним это обозначение.

1°. Возьмем сначала произвольное ограниченное $(n+1)$-мерное тело T с единственным условием, чтобы оно имело объем в смысле Римана, т. е.

чтобы существовал кратный интеграл

$$\iiint\limits_{T} \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n+1} \tag{1}$$

и чтобы его можно было вычислять при любом порядке выполнения последовательного интегрирования.

Применим теперь к точкам тела T линейное преобразование с матрицей $(n+1)$-го порядка с определителем 1:

$$\begin{aligned} x_1' &= \sqrt[n]{\frac{1}{\lambda}}\, x_1, \\ x_2' &= \sqrt[n]{\frac{1}{\lambda}}\, x_2, \\ &\cdots\cdots \\ x_n' &= \sqrt[n]{\frac{1}{\lambda}}\, x_n, \\ x_{n+1}' &= \lambda x_{n+1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где λ — положительное вещественное число. При этом тело T перейдет в тело T', у которого сечение гиперплоскостью $x_{n+1} = 0$ будет совпадать с подобно уменьшенным в $\sqrt[n]{\lambda}$ раз соответственным сечением тела T. Следовательно, это сечение T' при достаточно большом λ $(\lambda \geqslant \lambda_0)$ не будет содержать целочисленных точек кроме начала. Обозначим $h = h(\lambda) = \text{т. в. гр.}_{X \in T} |x_{n+1}|$.

Применяя к телу T' рассуждения, аналогичные рассуждениям доказательства леммы 1 в (²) с тем лишь отличием, что будем рассматривать сечения T' гиперплоскостями $x_{n+1} = -[n], \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, [n]$ и проектировать покрытие этих гиперплоскостей такого же типа как в лемме 1 в (²) на гиперплоскость $x_{n+1} = 1$, мы получим, как и в (²), что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{s_1(r)}{s(r)} = \sum_{-h \leqslant i \leqslant h} s_i - s_0,$$

где

$$h = \text{т. в. гр.}_{X \in T} |x_{n+1}| = h(\lambda) \to \infty \text{ при } \lambda \to \infty, \quad s_0 = s_0(\lambda) \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Нетрудно заметить, что $\sum\limits_{-h \leqslant i \leqslant h} s_i$ представляет собой сумму Римана для интеграла (1). При $\lambda \to \infty$, $h \to \infty$ и эта сумма стремится к значению интеграла (1) v — $(n+1)$-мерному объему тела T, а $s_0 \to 0$. Поэтому, если $v < 1$, то при λ достаточно большом $(\lambda \geqslant \lambda_1)$ будет

$$\lim_{r \to \infty} \frac{s_1(r)}{s(r)} < 1.$$

На основании рассуждений леммы 1 в [2], мы видим, что при $\lambda \geqslant \max(\lambda_0, \lambda_1)$ для тела T' найдется сдвиг

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= x_1' + a_1 x_{n+1}', \\
x_2'' &= x_2' + a_2 x_{n+1}', \\
&\dots\dots\dots\dots \qquad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ — вещественные числа}) \\
x_n'' &= x_n' + a_n x_{n+1}', \\
x_{n+1}'' &= x_{n+1}',
\end{aligned} \tag{3}
$$

переводящий тело T' в тело T'', не содержащее, кроме, может быть, начала координат, других точек с целыми координатами.

Произведение унимодулярных линейных преобразований (2) и (3) дает нам линейное преобразование, переводящее тело T в T'', не содержащее целочисленных точек (кроме, может быть, начала координат).

Если применить вышеуказанное рассуждение для случая $v < k$, где k — целое положительное число, то мы получим кратное покрытие гиперплоскости $x_{n+1} = 1$, но так как

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lim_{r \to \infty} \frac{s_1(r)}{s(r)} = v < k,$$

то при r и λ достаточно больших мы получим, что $\frac{s_1(r)}{s(r)} < k$, а потому точки круга L_1 в гиперплоскости $x_{n+1} = 1$ в нашей конструкции не все будут покрыты более $k-1$-го раза, т. е. найдутся точки L_1, покрытые менее k раз, а это значит, что найдется сдвиг (3), переводящий T' в тело T'', содержащее не более $(k-1)$-й точки с целыми координатами, кроме, может быть, начала координат. Все эти результаты дают следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если в $(n+1)$-мерном пространстве $(n \geqslant 1)$ имеется произвольное ограниченное тело T, имеющее $(n+1)$-мерный объем в смысле Римана v, и $v < k$, где k — целое положительное число, то найдется унимодулярное линейное преобразование пространства, переводящее тело T в тело T'', не содержащее, кроме, может быть, начала координат, более $k-1$ точек пространства с целыми координатами. При этом линейное преобразование будет следующего типа:*

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= \lambda_1 x_1 + a_1 x_{n+1}, \\
x_2'' &= \lambda_2 x_2 + a_2 x_{n+1}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
x_n'' &= \lambda_n x_n + a_n x_{n+1}, \\
x_{n+1}'' &= \lambda_{n+1} x_{n+1},
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ — положительные вещественные числа, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n \cdot \lambda_{n+1} = 1$; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — вещественные числа.

В случае центральной симметрии тела T теорема может быть усилена на том основании, что при доказательстве можно использовать конструк-

цию лишь для части тела T с $x_{n+1} \geqslant 0$, так как часть тела T с $x_{n+1} \leqslant 0$ даст покрытие, при проектировании совпадающее с только что указанным покрытием. Это дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1′. *Если в $(n+1)$-мерном пространстве $(n \geqslant 1)$ имеется ограниченное центрально-симметрическое тело T с центром в начале координат, имеющее $(n+1)$-мерный объем в смысле Римана v, и если $\frac{v}{2} < k$, где k — целое число, то найдется унимодулярное линейное преобразование пространства типа (4), переводящее тело T в тело T'', содержащее, кроме, может быть, начала координат, не более $(k-1)$-й пары взаимно симметричных точек с целыми координатами.*

Очевидно, что при других формах симметрии тела T получаются соответственные усиления теоремы 1.

Некоторое усиление теоремы 1 получится в случае лучевого тела T, т. е. тела T, обладающего следующим свойством:

А) Если $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in T$, то и $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{n+1}) \in T$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (λ — вещественное число).

Частным случаем лучевого тела является выпуклое тело, содержащее начало координат внутри себя, в частности, центрально-симметричное выпуклое тело с центром в начале координат.

При исследовании лучевых тел рассмотрим сначала случай «конуса» с вершиной в начале координат и «основанием» на гиперплоскости $x_{n+1} = h$, а затем произвольное лучевое тело аппроксимируем такими конусами. Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что $n \geqslant 1$.

2°. Установим следующую терминологию. Назовем конструкцию, применяемую к телу T' при доказательстве теоремы 1 настоящей работы, конструкцией покрытия. В этой конструкции нас будет интересовать оценка сверху $\bar{s}(r)$ при r достаточно больших, где $\bar{s}(r)$ — (n-мерный) объем части «круга» L_1, покрытой хотя бы один раз областями $T''_{1,X}$, если X пробегает все целочисленные точки, удовлетворяющие условию $-h \leqslant x_{n+1} \leqslant h$, $x_{n+1} \neq 0$ (см. доказательство леммы 1 в ([2]) и доказательство теоремы 1 в настоящей работе). Раньше мы вместо $\bar{s}(r)$ рассматривали величину $\bar{s}_1(r)$, равную сумме n-мерных объемов всех проекций $T_{1,X}$ и их частей, попадающих в «круг» L_1. Очевидно, $\bar{s}(r) \leqslant s_1(r)$.

Назовем «конусом» $(n+1)$-мерное тело T, составленное из всех точек лучей, соединяющих точки ограниченного n-мерного тела T_h, лежащего в гиперплоскости $x_{n+1} = h$, с началом координат. При этом предполагаем, что T_h имеет объем по Риману. Тогда, очевидно, T тоже будет иметь $(n+1)$-мерный объем по Риману, и если обозначить n-мерный объем через $T_h - v_h$, а $(n+1)$-мерный — через $T - v$, то

$$v = \frac{v_h \cdot h}{n+1}.$$

При этом на тело T_h, кроме ограничения, что оно имеет объем в смысле Римана, никаких других ограничений не накладывается. Оно может быть и многосвязным.

Проведем теперь конструкцию покрытия для «конуса» T с целым h. Она будет проще, чем для произвольного тела. Прежде всего здесь ока-

жется, что все тела $T''_{1,X}$ будут равны и параллельно расположены в гиперплоскости $x_{n+1}=1$. n-мерный объем любого тела $T_{1,X}$ будет равен

$$v_1 = \frac{v_h}{h^n}.$$

Кроме того, окажется, что если для двух целочисленных точек X и Y, принадлежащих T, будет $X=\lambda Y$, где λ — рациональное число, то тогда $T''_{1,X}$ и $T''_{1,Y}$ совпадают.

Таким образом, если взять на каждом рациональном луче, исходящем из начала координат, первую отличную от начала целочисленную точку X, то другие целочисленные точки, лежащие на этом луче X, дадут проекции T''_{1,X_1}, совпадающие в точности с $T_{1,X}$, и при оценке n-мерного объема $\bar{s}(r)$ их можно не учитывать. Итак, в конструкции покрытия в качестве точек X можно брать уже не все целочисленные точки, удовлетворяющие условию

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant r^2 x_{n+1}^2 \quad (x_{n+1}=1, 2, \ldots, h), \tag{5}$$

а лишь те из этих точек, которые имеют общий наибольший делитель целых координат $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, равный единице. Обозначим число таких точек с $x_{n+1}=i$ через N_i. Сумма n-мерных объемов $T''_{1,X}$, соответствующих этим точкам, будет $v_1 N_i$.

Обозначим сумму объемов вышеуказанных покрывающих тел $T''_{1,X}$ и частей их, лежащих в L_1, через w_i. Тогда

$$w_i = v_1 N_i + O\left((ir)^{n-1}\right)$$

и

$$\bar{s}(r) \leqslant s_2(r) = \sum_{i=1}^{h} w_i = v_1 \sum_{i=1}^{h} N_i + O\left(\omega(h,n)\, r^{n-1}\right), \tag{6}$$

где $\omega(h,n)$ — возрастающая функция от h.

Определим тело («конус») $R(r, h_1)$ при помощи условий

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant r^2 x_{n+1}^2 \quad (0 \leqslant x_{n+1} \leqslant h_1). \tag{7}$$

Тогда $N' = \sum_{i=1}^{h} N_i$ — числу точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, лежащих в теле $R(r,h)$, с целыми координатами и с общим наибольшим делителем координат, равным 1.

Применяя теорему d на стр. 24 книги И. М. Виноградова ([4]), мы получим, что

$$N' = \sum_{d=1}^{h} N\left(r, \frac{h}{d}\right) \mu(d); \tag{8}$$

здесь $N\left(r, \frac{h}{d}\right)$ — число всех целочисленных точек тела $R\left(r, \frac{h}{d}\right)$, $\mu(d)$ — функция Мёбиуса. Формула (9) получается, если в теореме d в ([4]) поло-

жить $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) =$ о. н. д. $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ и $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 1$; точки $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ будут пробегать тогда всю совокупность целых точек $R(r, h)$.

Подсчитаем число целых точек в $R(r, h_1)$. Очевидно,

$$N(r, h_1) = v(r, h_1) + O(s(r_1, h_1)), \tag{9}$$

где $v(r, h_1)$ — $(n+1)$-мерный объем $R(r, h_1)$, а $s(r, h_1)$ — n-мерный объем границы $R(r, h_1)$.

Имеем:

$$v(r, h_1) = \frac{s(r, h_1)\cdot h_1}{n+1} = \frac{r^n \cdot h_1^{n+1}\, s(1)}{n+1},$$

$$s(r, h_1) = 2(1+\varepsilon_r)\cdot s(r, h_1) = 2(1+\varepsilon_r)\, r^n \cdot h_1^n \cdot s(1).$$

В обеих этих формулах $s(r)$ означает n-мерный объем «круга»

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant r^2, \quad x_{n+1} = \text{const},$$

ε_r — положительное число, $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_r = 0$. Отсюда

$$N(r, h_1) = \frac{r^n h_1^{n+1}\, s(1)}{n+1} + O(s(1)\, r^n h_1^n),$$

а потому из (8) получим

$$N' = \frac{s(1)\, r^n}{n+1} \sum_{d=1}^{h} \left(\frac{h}{d}\right)^{n+1} M(d) + O\left(s(1)\, r^n \sum_{d=1}^{h} \left(\frac{h}{d}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{s(1)\, r^n h^{n+1}}{n+1} \sum_{d=1}^{h} \frac{\mu(d)}{d^{n+1}} + O\left(s(1)\, r^n h^n \sum_{d=1}^{h} \frac{1}{d^n}\right);$$

при $n \geqslant 1$

$$\sum_{d=1}^{h} \frac{\mu(d)}{d^{n+1}} = \frac{1}{\xi(n+1)} + O\left(\frac{1}{nh^n}\right),$$

$$\sum_{d=1}^{h} \frac{1}{d^n} = \begin{cases} O(1) & \text{при} \quad n > 1, \\ O(\log h) & \text{при} \quad n = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$N' - \frac{s(1)\, r^n h^{n+1}}{(n+1)\,\xi(n+1)} + O\left(\frac{s(1)\, r^n h}{(n+1)\, n}\right) + O(s(1)\, r^n h^n \log h) =$$

$$= \frac{s(1)\, r^n h^{n+1}}{(n+1)\,\xi(n+1)} + O(s(1)\, r^n h^n \log n) = \frac{s(1)\, r^n h^{n+1}}{n+(1)\,\xi(n+1)}\left(1 + O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right).$$

Тогда

$$s_2(r) = v_1 N^1 + O(\omega(h, n)\, r^{n-1}) =$$

$$= \frac{v_h}{h^n}\cdot\frac{s(1)\, r^n h^{n+1}}{(n+1)\,\xi(n+1)}\left(1 + O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right) + O(\omega(h, n)\, r^{n-1}) =$$

$$= s(1)\, r^n \frac{v_h h}{n+1}\; \frac{1}{\xi(n+1)}\left(1 + O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right) + O(\omega(n, h)\, r^{n-1}),$$

где $s(1)r^n = s(r)$ — n-мерный объем L_1, $\frac{v_h \cdot h}{n+1} = v$ — $(n+1)$-мерный объем исследуемого «конуса»

$$\left|O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right| < C\,\frac{(n+1)\log h}{h},$$

C — абсолютная постоянная. Отсюда имеем:

$$\frac{\overline{s}(r)}{s(r)} \leqslant \frac{s_2(r)}{s(r)} = \frac{v}{\xi(n+1)}\left(1+O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right) + O\left(\frac{\omega(n,h)}{s(1)}\cdot\frac{1}{r}\right),$$

а потому

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\overline{s}(r)}{s(r)} \leqslant \overline{\lim}\,\frac{s_2(r)}{s(r)} \leqslant \frac{v}{\xi(n+1)}\left(1+O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right). \tag{10}$$

Эта формула будет служить основой для дальнейшего исследования.

3°. Отметим, далее, что если мы проведем конструкцию покрытия для лучевого тела T, составленного из конечного числа «конусов» $T_1, T_2, \ldots, T_k$ только что рассмотренного типа, и вычислим площадь части покрытой поверхности L_1 $\overline{s}(r)$ для T и соответственно $\overline{s}_i(r)$ для T_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то очевидно, что

$$\overline{s}(r) \leqslant \overline{s}_1(r) + \overline{s}_2(r) + \cdots + \overline{s}_k(r). \tag{11}$$

Если тела $T_1, T_2, \ldots, T_k$ пересекаются лишь по граничным точкам, то

$$v(T) = v(T_1) + v(T_2) + \cdots + v(T_k)$$

($v(T)$, $v(T_i)$ обозначают $(n+1)$-мерные объемы соответствующих тел). Деля обе части неравенства (11) на $s(r)$ и применяя справа k раз (10), получим в этом случае

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\overline{s}(r)}{s(r)} \leqslant \frac{v(T)}{\xi(n+1)}\left(1+O\left(\frac{(h+1)\log h}{h}\right)\right), \tag{12}$$

где $h = \min\limits_{i=1,2,\ldots,k} |h_i|$, h_i — высота конуса T_i. Здесь снова

$$\left|O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right| < C_1\,\frac{(n+1)\log h}{h},$$

C_1 — абсолютная постоянная.

Если взять тело T, составленное из конечного числа «конусов» $T_1, T_2, \ldots, T_k$ и произвольного тела T_0, имеющего объем по Риману, то оценку $\overline{s}(r)$ для тела T можно проводить комбинированно. Часть покрытия, происходящую от тела T_0, можно оценивать грубо, как при доказательстве теоремы 1. Части же покрытия, происходящие от $T_1, T_2, \ldots, T_k$, можно оценивать, пользуясь формулой (10). Тогда будем иметь

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\overline{s}(r)}{s(r)} \leqslant \sum\nolimits_0 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} v(T_i)}{\xi(n+1)}\left(1+O\left(\frac{(n+1)\log h}{h}\right)\right), \tag{13}$$

где $\sum_0$ — сумма Римана, составленная для объема тела T_0 при сечении тела T_0 плоскостями $x_{n+1} = -H, \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, H$, где $H = \underset{X \in T_0}{\text{т. в. гр.}} |x_{n+1}|$, $h = \min\limits_{i=1, 2, \ldots, k} |h_i|$ (h_i — высота «конуса» T_i).

Пользуясь полученными оценками и введенными понятиями, мы можем теперь доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если в $(n+1)$-мерном пространстве дано ограниченное лучевое тело T, имеющее $(n+1)$-мерный объем в смысле Римана v с центром в начале координат, причем $v < \xi(n+1)$, то найдется унимодулярное линейное преобразование типа (4), переводящее тело T в новое тело T'', не содержащее, кроме начала координат, других точек с целыми координатами.*

Доказательство. Пусть объем тела T $v < \xi(n+1)$,

$$\underset{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in T}{\text{т. н. гр.}} x_{n+1} = -g, \qquad \underset{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})}{\text{т. в. гр.}} x_{n+1} = l, \ g \text{ и } l \geqslant 0.$$

Обозначим через $T(\tau)$ сечение тела T гиперплоскостью $x_{n+1} = \tau$, а через $\sigma(\tau)$ — n-мерный объем этого сечения. Тогда

$$v = \int_{-g}^{l} \sigma(\tau)\, d\tau.$$

Продолжим функцию $\sigma(\tau)$ следующим образом: положим $\sigma(\tau) = 0$, если $\tau < -g$ и $\tau > l$. Обозначим $h = \max\{l, g\}$. Имеем:

$$v = \int_{-h}^{h} \sigma(\tau)\, d\tau.$$

Подвергая тело T унимодулярному преобразованию (2), получим тело T'. Выберем λ настолько большим, чтобы выполнялись три следующих условия:

a) $T'(0)$ не должно содержать целых точек, кроме начала координат. Это будет при $\lambda > \lambda_0$.

Далее, $T'(\tau)$ будет иметь n-мерный объем $\frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)$ и $(n+1)$-мерный объем T' будет равен:

$$\int_{-\lambda h}^{\lambda h} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau = \int_{-\lambda h}^{\lambda h} \sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) = \int_{-h}^{h} \sigma(\tau_1)\, d\tau_1 = v,$$

$$\int_{-\lambda h}^{\lambda h} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau = \int_{[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau + \int_{[\sqrt{\lambda}]}^{\lambda h} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau + \int_{-h\lambda}^{-[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau,$$

$$\int_{-[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau = \int_{-\frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda}}^{\frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda}} \sigma(\tau_1)\, d\tau_1 \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Таким образом, часть объема T', заключенная между гиперплоскостями $x_{n+1} = -[\sqrt{\lambda}]$ и $x_{n+1} = [\sqrt{\lambda}]$, при $\lambda \to \infty$ стремится к 0 и может быть сделана сколь угодно малой, т. е. для числа $\eta > 0$ при λ достаточно большом ($\lambda > \lambda'$) будет

$$\int_{-[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}[} \frac{1}{\lambda} \sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau < \eta.$$

Рассмотрим сумму Римана интеграла $\int_{-[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda} \sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau$ следующего вида:

$$\sum_0' = \sum_{i=-[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda} \sigma\left(\frac{i}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda} \sigma(0);$$

ее можно рассматривать как сумму Римана для интеграла

$$\int_{-\frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda}}^{\frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda}} \sigma(\tau_1)\, d\tau_1$$

с разбиением интервала интегрирования $\left(-\frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda},\ +\frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda}\right)$ на $2[\sqrt{\lambda}]$ одинаковых промежутка.

Возьмем произвольное число $\eta_1 > 0$; тогда найдется такое $\varepsilon(\eta_1) > 0$, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma(\tau_1)\, d\tau_1 < \eta_1.$$

Рассмотрим такую сумму Римана $\sum$ интеграла $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma(\tau_1)\, d\tau_1$, чтобы она содержала в качестве подсуммы сумму $\sum_0$. Это возможно при λ настолько большом, чтобы $\varepsilon > \frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda}$. Для составления такой суммы Римана возьмем разбиение промежутка $(-\varepsilon, \varepsilon)$ точками $\ldots -\frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda},\ -\frac{[\sqrt{\lambda}]-1}{\lambda},\ \ldots$ $\ldots,\ \frac{-2}{\lambda},\ \ldots,\ \frac{1}{\lambda},\ \ldots,\ \frac{[\sqrt{\lambda}]}{\lambda},\ \ldots,$ а значения подинтегральной функции будем задавать в подходящим образом выбранных точках в промежутках разбиения. Тогда, очевидно, будет $\sum_0' \leqslant \sum$, так как интегрируемая функция $\sigma(\tau_1)$ неотрицательная.

При $\lambda \to \infty$

$$\sum \to \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma(\tau_1)\, d\tau_1 < \eta_1.$$

Поэтому $\sum_0' < \eta_1$ при $\lambda > \lambda_1$. Итак, мы показали:

b) Для всякого числа $\eta_1 > 0$ найдется такое число λ_1, что как только $\lambda > \lambda_1$

$$\sum_0' = \sum_{i=[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{i}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}\sigma(0) < \eta_1. \tag{14}$$

Выберем в T' некоторое тело T_λ, составленное из конечного числа «конусов». Именно, возьмем сечение тела T' гиперплоскостью $x_{n+1} = i$ $T'(i)$ и соединим каждую точку $T'(i)$ с началом координат лучом. Совокупность точек всех этих лучей образует «конус» R_i', где i пробегает значения:

$$i = -[\lambda h],\ -[\lambda h]+1, \ldots,\ -[\sqrt{\lambda}]-1,\ [\sqrt{\lambda}]+1,\ [\sqrt{\lambda}]+2, \ldots, [\lambda h]. \tag{15}$$

Высота любого из этих «конусов» $> \sqrt{\lambda}$. Каждый из этих «конусов» принадлежит T'. Обозначим тело, составленное из точек, входящих хотя бы в один из «конусов» R_i', через T_λ.

При $i > 0$ обозначим через R_i множество точек R_i', не являющихся внутренними точками R_{i+1}'. При $i < 0$ R_i будет обозначать множество точек R_i', не являющихся внутренними точками R_{i-1}'. Множества R_i, где i пробегает значения

$$i = -[\lambda h],\ -[\lambda h]+1, \ldots,\ -[\sqrt{\lambda}]-1,\ [\sqrt{\lambda}]+1,\ [\sqrt{\lambda}]+2, \ldots, [\lambda h],$$

тоже будут «конусами», пересекающимися только по граничным точкам и составляющими снова T_λ. Любой из «конусов» R_i' и R_i имеет $(n+1)$-мерный объем по Риману, и сумма объемов R_i равна объему T_λ. Очевидно, что $(n+1)$-мерный объем T_λ не больше объема T', т. е. $\leqslant v$.

Обозначим через R_0 часть тела T', лежащего в полосе $-[\sqrt{\lambda}] \leqslant x_{n+1} \leqslant$ $\leqslant [\sqrt{\lambda}]$ с выброшенными внутренними точками T_λ. Пусть T_λ' — тело, составленное из T_λ и R_0. Очевидно, объем R_0

$$v(R_0) \leqslant \int_{-[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau,$$

и если составить сумму Римана $\sum_0$ для вычисления $v(R_0)$ с точно таким выбором секущих плоскостей, как в сумме Римана $\sum_0'$ в (14) при вычислении $\int_{-[\sqrt{\lambda}]}^{[\sqrt{\lambda}]} \frac{1}{\lambda}\sigma\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau$, то, вследствие построения тела R_0, очевидно, что

$$\sum_0 \leqslant \sum_0'.$$

Таким образом, при выполнении условия b) будет иметь место неравенство:

$$\sum_0 < \eta_1.$$

Наконец, потребуем, чтобы было выполнено условие:

c) Для числа $\eta_2 > 0$ λ выбрано настолько большим ($\lambda > \lambda_2$), что для O в формуле (13) имеет место неравенство:

$$\left| O\left(\frac{(n+1)\log \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right| < \eta_2.$$

Завершим теперь доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что при каждом преобразовании типа (3) преобразованные тела T' и T'_λ будут содержать одинаковые точки с целыми координатами, так как они отличаются частями, лежащими каждая между какими-то последовательными гиперплоскостями $x_{n+1} = i$ и $x_{n+1} = i+1$, а потому эти части не могут содержать точек с целыми координатами. Следовательно, достаточно изучать сдвиги тела T'_λ, состоящего из «конусов» R_i (i пробегает конечное число значений (15)) и тела R_0. Так как, по условию, $v < \zeta(n+1)$, то $\frac{v}{\zeta(n+1)} < 1$, а потому найдутся два таких положительных числа η_1 и η_2, что будет иметь место неравенство

$$\eta_1 + \frac{v}{\zeta(n+1)}(1+\eta_2) < 1. \tag{16}$$

Преобразуем тело T преобразованием (2) в T', где λ выбрано так, чтобы выполнялись условия a), b) и c), если в качестве η_1 и η_2 выбраны η_1 и η_2, удовлетворяющие неравенству (16). Такое λ наверное найдется.

Теперь, как было сказано выше, вместо T' изучаем сдвиг тела T'_λ, составленного из «конусов» R_i (i пробегает ряд чисел (15)) и тела R_0, определенного выше.

Для тела T'_λ действует оценка покрытия (13):

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\bar{s}(r)}{s(r)} \leqslant \sum\nolimits_0 + \frac{\sum\limits_i v(R_i)}{\zeta(n+1)}\left(1 + O\left(\frac{(n+1)\log\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) =$$
$$= \sum\nolimits_0 + \frac{v(T_\lambda)}{\zeta(n+1)}\left(1 + O\left(\frac{(n+1)\log\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum\nolimits_0 + \frac{v}{\zeta(n+1)}\left(1 + O\left(\frac{(n+1)\log\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \leqslant \eta_1 + \frac{v}{\zeta(n+1)}(1+\eta_2) < 1,$$

так как выполнены условия b) и c). А потому при r достаточно больших ($r > r_0$) $\frac{\bar{s}(r)}{s(r)} < 1$ и найдется сдвиг типа (3), наверное переводящий тело T'_λ в тело T''_λ, не содержащее, кроме начала координат, других целых точек. Как было отмечено выше, этот сдвиг переводит также T' в тело T'', не содержащее, кроме начала, целых точек, а так как произведение преобразований (2) и (3) будет преобразованием типа (4), то теорема 2 доказана полностью.

Если тело T центрально-симметричное, то при проведении конструкции покрытия для T'' можно не учитывать части T', у которой $x_{n+1} < 0$, так как она дает покрытие, в точности совпадающее с покрытием части, у которой $x_{n+1} \geqslant 0$. Поэтому здесь теорема 2 усиливается и может быть сформулирована так:

ТЕОРЕМА 3. *Если в $(n+1)$-мерном пространстве ограниченное, лучевое, центрально-симметричное тело T с центром в начале координат*

имеет $(n+1)$-мерный объем в смысле Римана v и $\frac{v}{2} < \zeta(n+1)$, то найдется унимодулярное преобразование типа (4), переводящее тело T в тело T'', не содержащее, кроме начала координат, других целых точек.

Частным случаем этой теоремы является утверждение Минковского ([1]), высказанное им для выпуклых центрально-симметричных тел с центром в начале координат. Формулировка его приводилась в начале статьи.

Наконец, в случае, когда для лучевого тела объем v будет $> \zeta(n+1)$, этими же методами доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Если в $(n+1)$-мерном пространстве ограниченное, лучевое тело имеет $(n+1)$-мерный объем в смысле Римана v и $v < k\zeta(n+1)$, где k — целое число, то найдется унимодулярное линейное преобразование типа (4) такое, что оно переводит тело T в тело T'', которое содержит точки с целыми координатами лишь такие, которые можно расположить не более чем на $k-1$ лучах, выходящих из начала координат. Для центрально-симметричных лучевых тел с центром в начале координат утверждения теоремы 4 верны при условии $\frac{v}{2} < k\zeta(n+1)$.*

Автор не исследовал, в какой мере общи идеи его метода доказательства и метода Э. Хлавка ([3]).

Исследования в этом направлении можно продолжать, более тонко оценивая покрытие проекций $T''_{1,X}$ при конструкции покрытия, проводимой в работе ([2]) и в настоящей работе. Автору кажется, что его метод имеет известную наглядность.

Поступило
15. IX. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Minkowski G., Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, Bull. Sci. math. 17 (1893), 24—29.

[2] Санов И. Н., Функции с целочисленными параметрами, наименее уклоняющиеся от нуля, Ученые записки ЛГУ, № 111 (1949), 32—46.

[3] Hlawka E., Zur Geometrie der Zahlen, Mathem. Zeitschr., t. 49, Nr. 2—3 (1943). 285—312.

[4] Виноградов И. М., Основы теории чисел, М.— Л., 1936.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

16 (1952), 113–146

И. И. ГОРДОН

КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ n-МЕРНОГО КОМПЛЕКСА В n-МЕРНОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе дается гомотопическая классификация непрерывных отображений конечного n-мерного полиэдра в n-мерное вещественное проективное пространство. Особо рассматриваются представляющие специальный интерес отображения многообразий в проективное пространство и замкнутых поверхностей в проективную плоскость.

Большинство результатов, полученных при изучении классификации непрерывных отображений полиэдра K^n в полиэдр P, относятся к тому случаю, когда полиэдр P имеет тривиальную фундаментальную группу [см. (1), введение]. В этой работе рассматривается один из наиболее простых случаев, когда это условие не выполняется. Именно, изучаются отображения полиэдра K^n ($n \geqslant 2$) в действительное проективное пространство той же размерности P^n, фундаментальная группа которого состоит, как известно, из двух элементов. Поводом для выполнения настоящей работы послужила неопубликованная работа Л. С. Понтрягина, в которой для решения задачи о классификации отображений пространства P^n в пространство P^n был применен метод, существенно отличный от метода Борсука [см. (2)]. Излагаемые здесь результаты были уже мной опубликованы [см. (3), (4)]. В 1949 г. М. М. Постников (5) опубликовал независимо полученное им решение более общей задачи, в которой проективное пространство заменено произвольным связным пространством, асферическим в размерностях больших 1 и меньших n. Методы Постникова требуют привлечения более сложного аппарата.

K^n будет обозначать n-мерный связный полиэдр ($n \geqslant 2$), заданный в фиксированном симплициальном разбиении, P^n — n-мерное действительное проективное пространство. Под отображением всегда подразумевается непрерывное отображение. Гомологии, если специально не оговорено противное, рассматриваются только верхние.

Символ $f: P \to Q$ означает непрерывное отображение f полиэдра P в полиэдр Q. Комплекс и определяемый им полиэдр мы будем обозначать одной и той же буквой.

§ 1. Отображения, удовлетворяющие условию стягиваемости

В этом параграфе рассматриваются только такие отображения полиэдра K^n в пространство P^n, которые каждый замкнутый путь полиэдра K^n переводят в путь, гомотопный нулю в P^n. Такие отображения мы будем называть отображениями, удовлетворяющими условию стягиваемости.

Пусть $f: K^n \to P^n$, Σ^n — накрывающая сфера для P^n, φ — естественное отображение («проекция») сферы Σ^n на пространство P^n. Назовем «накрывающим отображением» для f такое $\bar{f}: K^n \to \Sigma^n$, что для всякой точки $x \in K^n$

$$\varphi\bar{f}(x) = f(x).$$

Докажем, что для всякого f, удовлетворяющего условию стягиваемости, существует в точности два накрывающих отображения.

Пусть x_0 — произвольная точка полиэдра K^n, $\xi_0 = f(x_0)$. В сфере Σ^n существуют две точки, проектирующиеся в ξ_0. Выберем одну из них $\bar{\xi}_0$ ($\varphi(\bar{\xi}_0) = \xi_0$) и положим $\bar{f}(x_0) = \bar{\xi}_0$. Пусть x — произвольная точка полиэдра K^n, w — путь, идущий из x_0 в x. Образ пути w в пространстве P^n есть путь ω, идущий из ξ_0 в $\xi = f(x)$. В сфере Σ^n существует единственный путь $\bar{\omega}$, начинающийся в $\bar{\xi}_0$ и накрывающий путь ω. Пусть $\bar{\xi}$ есть конец пути $\bar{\omega}$. Точка $\bar{\xi}$ не зависит от выбора пути w, идущего из x_0 в x. В самом деле, если w_1 — какой-нибудь другой путь, идущий из x_0 в x, а ω_1 — его образ, то, в силу условия стягиваемости, замкнутый путь $\omega\omega_1^{-1}$ гомотопен нулю в пространстве P^n, вследствие чего пути $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_1$ имеют один и тот же конец [см. ([6])].

Положим теперь, что $\bar{f}(x) = \bar{\xi}$. Очевидно, что построенное таким образом отображение $\bar{f}$ является непрерывным и накрывающим для f. Нетрудно видеть также, что всякое накрывающее отображение, переводящее точку x_0 в $\bar{\xi}_0$, совпадает с построенным $\bar{f}$. Таким образом, $\bar{f}$ является единственным накрывающим отображением для f, переводящим x_0 в $\bar{\xi}_0$.

Пусть θ — отображение сферы Σ^n в своем центре. Тогда $\theta\bar{f}$ является накрывающим отображением для f, переводящим x_0 в $\theta(\bar{\xi}_0)$. Ясно, что отображениями $\bar{f}$ и $\theta\bar{f}$ исчерпываются все накрывающие отображения для f.

Существование накрывающих отображений позволяет свести вопрос о гомотопической классификации отображений полиэдра K^n в P^n к вопросу о классификации отображений в сферу Σ^n. В самом деле, пусть f и g — два отображения K^n в P^n, $\bar{f}$ и $\bar{g}$ — соответствующие накрывающие отображения (произвольные, но фиксированные). Если $\bar{f}$ гомотопно $\bar{g}$ или $\theta\bar{g}$, то f гомотопно g (так как $f = \varphi\bar{f}$, $g = \varphi\bar{g} = \varphi\theta\bar{g}$). Пусть, напротив, f гомотопно g и f_t — соединяющая их деформация ($0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_0 = f$, $f_1 = g$). Тогда существует «накрывающая деформация» $\bar{f}_t$ такая, что $\bar{f}_0 = \bar{f}$, а $\varphi\bar{f}_t = f_t$. Поэтому $\bar{f}_1$ есть накрывающее отображение для $f_1 = g$, т. е. $\bar{f}_1$ совпадает либо с $\bar{g}$, либо с $\theta\bar{g}$, и мы приходим к следующему предложению:

А) *f и g гомотопны в том и только в том случае, когда $\bar{f}$ гомотопно по крайней мере одному из отображений $\bar{g}$ и $\theta\bar{g}$.*

В случае n нечетного θ гомотопно тождественному отображению сферы Σ^n (θ является вращением) и $\bar{g}$ гомотопно $\theta\bar{g}$. Поэтому:

B) *В случае, когда n нечетно, отображения f и g гомотопны в том и только в том случае, когда $\bar{f}$ гомотопно $\bar{g}$.*

В силу предложения B), задача о классификации отображений полиэдра K^n в проективное пространство при n нечетном эквивалентна задаче о классификации отображений в сферу. Последняя задача рассматривалась Хопфом и Витни [(7), (8)]; применяя найденные ими результаты, мы непосредственно получаем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. *В случае n нечетного каждому гомотопическому классу удовлетворяющих условию стягиваемости отображений комплекса K^n в P^n может быть естественным образом поставлен в соответствие вполне определенный элемент n-мерной группы ∇-гомологий $B^n_\nabla(K^n)$ полиэдра K^n. При этом соответствие между указанными классами отображений и элементами группы $B^n_\nabla(K^n)$ оказывается взаимно однозначным.*

Рассмотрим теперь случай, когда n четно. Легко видеть, что если при n четном гомотопическому классу отображения $\bar{f}: K^n \to \Sigma^n$ соответствует (в силу теоремы Хопфа) элемент $U \subset B^n_\nabla(K^n)$, то гомотопическому классу отображения θf соответствует элемент $-U$. Принимая во внимание предложение A), мы получаем отсюда следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *В случае n четного каждому гомотопическому классу удовлетворяющих условию стягиваемости отображений комплекса K^n в P^n может быть естественным образом поставлена в соответствие неупорядоченная пара $(U, -U)$ элементов группы $B^n_\nabla(K^n)$. При этом соответствие между указанными классами отображений и неупорядоченными парами $(U, -U)$ оказывается взаимно однозначным.*

Применяя теоремы 1 и 2 к случаю, когда K^n есть замкнутое псевдомногообразие M^n, легко доказать следующие предложения:

ТЕОРЕМА 1'. *Пусть n — нечетное и рассматриваемые отображения удовлетворяют условию стягиваемости. Тогда:*

a) *Если M^n есть ориентируемое псевдомногообразие с выбранной на нем определенной ориентацией, то гомотопический класс отображения $f: M^n \to P^n$ однозначно определяется степенью отображения f, причем степень эта всегда четная. Каково бы ни было четное число γ, существует отображение, степень которого равна γ.*

b) *Если M^n неориентируемо, то существуют два класса отображений.*

ТЕОРЕМА 2'. *Пусть n — четное и выполнены условия стягиваемости. Тогда:*

a) *Если M^n ориентируемо, то гомотопический класс отображения f однозначно определяется абсолютной величиной степени накрывающего отображения $\bar{f}$, причем степени накрывающих отображений могут принимать любые целые значения.*

b) *Если M^n неориентируемо, то существуют два класса отображений.*

§ 2. Условия гомотопности отображений полиэдра K^n в P^n на $(n-1)$-мерном остове K^{n-1}

Во всем дальнейшем изложении мы будем рассматривать только отображения, не удовлетворяющие условию стягиваемости.

Пусть Φ — фундаментальная группа полиэдра K^n, реализованная выбором фиксированного начала O, $f: K^n \to P^n$. Совокупность всех путей полиэдра K^n, образы которых при f гомотопны нулю в P^n, определяет подгруппу $\Phi_0(f)$ группы Φ. Так как f не удовлетворяет условию стягиваемости, а фундаментальная группа пространства P^n состоит из двух элементов, то $\Phi_0(f)$ есть подгруппа индекса 2. Очевидно, что если два отображения f и $g: K^n \to P^n$ гомотопны, то $\Phi_0(f)$ совпадает с $\Phi_0(g)$.

Пусть K^r — r-мерный остов комплекса K^n. Если отображения f и g гомотопны, то определяемые ими отображения любого подкомплекса также, естественно, гомотопны. В частности, f и g гомотопны на любом остове K^r $(r = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Выясним, при каких условиях два отображения полиэдра K^n в P^n гомотопны на остове K^{n-1}. Этот вопрос решается следующим предложением.

ТЕОРЕМА 3. *Два отображения f и $g: K^n \to P^n$ гомотопны на остове K^{n-1} в том и только в том случае, когда соответствующие им подгруппы $\Phi_0(f)$ и $\Phi_0(g)$ совпадают. Какова бы ни была подгруппа Φ_0 индекса 2 группы Φ, существует такое $f: K^n \to P^n$, что подгруппа $\Phi_0(f)$ совпадает с Φ_0.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 3, введем некоторые понятия и обозначения, которыми мы будем в дальнейшем пользоваться. Рассмотрим определяемую отображением f подгруппу $\Phi_0(f)$, которую обозначим просто через Φ_0. Как известно, подгруппа Φ_0 определяет двулистный накрывающий комплекс L^n комплекса K^n. Пусть ψ — естественное отображение («проекция») комплекса L^n на K^n. Назовем «накрывающим отображением» для f отображение $\bar{f}: L^n \to \Sigma^n$, определяемое следующим условием: какова бы ни была точка $x \in L^n$,

$$f\psi(x) = \varphi\bar{f}(x).$$

Применяя рассуждения, аналогичные использованным в начале § 1, можно показать, что для любого отображения f существуют в точности два накрывающих отображения, причем, если одно из них $\bar{f}$, то другое $\theta\bar{f}$ (см. § 1).

Будем считать, что симплициальное разбиение накрывающего L^n соответствует разбиению полиэдра K^n, т. е. для каждого симплекса из K^n существуют в точности два накрывающих его симплекса в L^n. Будем называть две точки (или два симплекса) полиэдра L^n противолежащими, если они проектируются в одну и ту же точку (симплекс) полиэдра K^n.

Будем называть отображение полиэдра L^n в сферу Σ^n специальным, если оно переводит каждые две противолежащие точки полиэдра L^n в диаметрально-противоположные точки сферы Σ^n.

Легко видеть, что накрывающие отображения для f являются специальными.

Если $\bar{h}: L^n \to \Sigma^n$ есть некоторое специальное отображение, то естественным образом однозначно определяется отображение $h: K^n \to P^n$, для которого $\bar{h}$ является накрывающим.

Два специальных отображения $\bar{f}_0$ и $\bar{f}_1$ мы будем называть специально-гомотопными, если существует соединяющая их специальная деформация $\bar{f}_t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ (т. е. такая, что $\bar{f}_t$ является специальным отображением при любом t). Можно говорить о специальных отображениях и специальных деформациях, определенных не на всем полиэдре L^n, а на его остове L^r произвольной размерности r.

Если f и g — два отображения полиэдра K^n в P^n такие, что подгруппы $\Phi_0(f)$ и $\Phi_0(g)$ совпадают, то оба отображения определяют один и тот же накрывающий полиэдр L^n. Пусть $\bar{f}$ и $\bar{g}$ — накрывающие отображения для f и g. Очевидно, что если $\bar{f}$ специально-гомотопно $\bar{g}$, то f гомотопно g.

Доказательство теоремы 3. Необходимость сформулированного в теореме условия ясна. Покажем его достаточность. Пусть

$$\Phi_0(f) = \Phi_0(g) = \Phi_0,$$

а L^n — накрывающий комплекс, определяемый подгруппой Φ_0. Пусть $\bar{f}$ и $\bar{g}$ — два каких-нибудь накрывающих отображения соответственно для f и g. Тогда существует специальная деформация $\bar{f}_t$, определенная на остове L^{n-1} и соединяющая $\bar{f}$ и $\bar{g}$ (т. е. для всякой точки $x \in L^{n-1}$ $\bar{f}_0(x) = \bar{f}(x)$, $\bar{f}_1(x) = \bar{g}(x)$). Это нетрудно показать индуктивно следующим образом. Пусть Q — призма $L^n \times I$ (I есть единичный отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$). Будем считать, что нижнее основание призмы Q отображено в сферу Σ^n посредством $\bar{f}$, а верхнее — посредством $\bar{g}$. Пусть T_i^0 и $T_i'^0$ — две противолежащие вершины комплекса L^n. Рассмотрим отрезок $T_i^0 \times I$. Отображение его граничных точек $T_i^0 \times 0$ и $T_i^0 \times 1$ в сферу Σ^n уже определено. Распространим это отображение на весь отрезок $T_i^0 \times I$ произвольным образом и полученное отображене обозначим через F. Положим

$$F(T_i'^0 \times t) = \theta F(T_i^0 \times t).$$

Поступая аналогично с каждой парой вершин T_i^0, $T_i'^0$, мы получим отображение F, заданное на $L^0 \times I$. Это отображение определяет специальную деформацию остова L^0, соединяющую $\bar{f}$ и $\bar{g}$. Предположим, что F уже определено на $L^{r-1} \times I$ $(r \leqslant n-1)$. Берем два противолежащих симплекса T^r и T'^r. Полагаем, что F совпадает с $\bar{f}$ на нижнем и с $\bar{g}$ на верхнем основании призмы Q. Тогда отображение F определено на границе призмы $T^r \times I$. Распространим его произвольным способом внутрь этой призмы. Пусть x — внутренняя точка симплекса T^r, x' — противолежащая ей точка $(x' \in T'^r)$. Полагая

$$F(x' \times t) = \theta F(x \times t),$$

мы определим F внутри призмы $T'^r \times I$. Поступая аналогично со всеми парами r-мерных симплексов, мы получим отображение F, заданное на $L^r \times I$ и определяющее специальную деформацию, соединяющую $\bar{f}$ и $\bar{g}$ на L^r (при $r = n$ распространение отображения F границы призмы $T^r \times I$ внутрь ее, вообще говоря, невозможно).

Таким образом, $\bar{f}$ и $\bar{g}$ специально-гомотопны на остове L^{n-1}, вследствие чего f и g гомотопны на остове K^{n-1}.

Пусть теперь Φ_0 — произвольная подгруппа индекса 2 фундаментальной группы Φ. Построим накрывающий комплекс L^n, определяемый подгруппой Φ_0, и пусть $\bar{f} : L^n \to \Sigma^n$ есть какое-нибудь специальное отображение (построение $\bar{f}$ легко осуществить способом, аналогичным вышеописанному, определяя $\bar{f}$ сначала на остове L^0, а затем последовательно распространяя его на остовы L^1, $L^2, \ldots, L^n$). Отображение $\bar{f}$ определяет $f : K^n \to P^n$, и легко видеть, что

$$\Phi_0(f) = \Phi_0.$$

Теорема 3 доказана полностью.

З а м е ч а н и е. Условие гомотопности отображений комплекса K^n в пространство P^n на $(n-1)$-мерном остове K^{n-1} можно получить, рассматривая не подгруппы фундаментальной группы, как это делается в теореме 3, а пользуясь одномерными ∇-гомологиями по модулю 2. Положим, что все вершины комплекса K^n переводятся рассматриваемыми отображениями в одну точку пространства P^n. Нетрудно видеть, что два отображения f и $g : K^n \to P^n$ гомотопны на остове K^{n-1} в том и только в том случае, когда они гомотопны на остове K^1. Пусть τ_i^1 $(i = 1, 2, \ldots, \alpha^1)$ — одномерные симплексы комплекса K^n. Полагая $u_f(\tau_i^n)$ равным вычету 0 или 1 по модулю 2 в соответствии с тем, гомотопен ли путь $f(\tau_i^n)$ нулю в пространстве P^n или нет, мы получим одномерную ∇-цепь по модулю 2 u_f^1 комплекса K^n. Нетрудно показать что цепь u_f^1 является ∇-циклом и что отображения f и g гомотопны на остове K^1 в том и только в том случае, когда $u_f^1 \sim u_g^1$. Поэтому, рассматривая классы тех отображений остова K^1 в пространстве P^n, которые могут быть продолжены на весь комплекс K^n, мы можем каждому такому классу поставить в соответствие класс одномерных ∇-гомологий по модулю 2 комплекса K^n. Соответствие оказывается взаимно однозначным, причем отображениям, удовлетворяющим условию стягиваемости, соответствует нулевой класс гомологий.

Сопоставляя этот результат с теоремой 3, мы видим, что существует взаимно однозначное соответствие между ненулевыми элементами группы одномерных ∇-гомологий по модулю 2 и подгруппами фундаментальной группы индекса 2 комплекса K^n. Соответствие это может быть установлено и непосредственно (т. е. без рассмотрения непрерывных отображений комплекса K^n в проективное пространство), как это сделано в дипломной работе Л. И. Смоляра, изучавшего и обобщения на случай простого модуля p.

Наличие указанного соответствия между элементами группы одномерных ∇-гомологий по модулю 2 и подгруппами фундаментальной группы будет использовано в § 7.

§ 3. Специальные ∇-гомологии и классификация отображений

Из теоремы 3 следует, что если определяемые отображениями f и g подгруппы $\Phi_0(f)$ и $\Phi_0(g)$ различны, то сами отображения не гомотопны на остове K^{n-1} и, следовательно, на всем полиэдре $\dot{K}^n$. Задача о классификации отображений сводится, таким образом, к задаче о классификации тех отображений, которые определяют одну и ту же подгруппу фундаментальной группы.

Вследствие этого всюду в дальнейшем в § 3—6 мы будем считать, что Φ_0 есть фиксированная подгруппа индекса 2 группы Φ и будем рассматривать, не оговаривая этого отдельно каждый раз, только такие отображения $f, g, h, \ldots$, для которых подгруппы $\Phi_0(f)$, $\Phi_0(g)$, $\Phi_0(h), \ldots$ совпадают с Φ_0. Мы будем их называть отображениями, связанными с подгруппой Φ_0. Так как все такие отображения гомотопны на K^{n-1}, то мы можем продеформировать их в отображения, совпадающие на K^{n-1}. Пусть P^n представляет собой совокупность отношений $(\xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_n : \xi_{n+1})$. Обозначим через P^k k-мерное проективное пространство, вложенное в P^n и состоящее из тех отношений, для которых $\xi_{k+2} = \xi_{k+3} = \cdots = \xi_{n+1} = 0$. Будем считать, что все рассматриваемые нами отображения, совпадающие на остове K^{n-1}, переводят этот остов в пространство P^{n-1}; очевидно, это можно предполагать без ограничения общности. Пусть пространство P^{n-1} накрывается экватором Σ^{n-1} сферы Σ^n. Тогда все накрывающие отображения переводят остов L^{n-1} в экватор (сферу) Σ^{n-1}.

Введем понятие специальных ∇-цепей, ∇-циклов, ∇-гомологий комплекса L^n. Пусть r-мерные симплексы комплекса K^n суть τ_i^r $(i = 1, 2, \ldots, \alpha^r)$. Для каждого симплекса τ_i^r существуют два накрывающих симплекса T_i^r и $T_i'^r$. Будем считать, что симплексы τ_i^r ориентированы (произвольно, но фиксированно). На симплексы T_i^r и $T_i'^r$ перенесем ориентацию симплекса τ_i^r. ∇-цепь u^r комплекса L^n мы будем называть специальной, если:

1) при n нечетном $u(T_i^r) = u(T_i'^r)$ для всех i,

2) при n четном $u(T_i^r) = -u(T_i'^r)$ для всех i.

Очевидно, что ∇-граница специальной цепи есть тоже специальная цепь. Поэтому можно говорить о специальных ∇-циклах, специальных ∇-гомологиях и группах специальных ∇-гомологий. Именно, мы полагаем, что два специальных ∇-цикла u^r и v^r специально-гомологичны нулю, если их разность есть граница специальной $(r-1)$-мерной цепи a^{r-1}. Мы будем это записывать в виде соотношения

$$u^r \overset{\text{сп}}{\sim} v^r.$$

При n нечетном можно установить взаимно однозначное соответствие между специальными ∇-цепями u^r комплекса L^n и обычными ∇-цепями u_0^r комплекса K^n, полагая

$$u_0^r(\tau_i^r) = u^r(T_i^r) = u^r(T_i'^n).$$

Отсюда сразу следует, что при n нечетном все группы специальных ∇-гомологий комплекса L^n изоморфны соответствующим группам ∇-гомологий комплекса K^n.

При решении вопроса о классификации отображений основную роль будет играть n-мерная группа специальных ∇-гомологий комплекса L^n. Мы будем обозначать ее через Γ.

Пусть $h: K^n \to P^n$. Зафиксируем одно из двух его накрывающих отображений и обозначим его через $\bar{h}$. Под $\bar{f}$, $\bar{g}, \ldots$ будем в дальнейшем понимать то из двух накрывающих отображений соответственно для f, $g, \ldots$, которое совпадает с отображением $\bar{h}$ на остове L^{n-1}. Отображения $\bar{f}$ и $\bar{h}$ совместно определяют n-мерный специальный ∇-цикл $u^n_{\bar{h}, \bar{f}}$. Именно, если T^n есть какой-нибудь ориентированный симплекс комплекса L^n, то мы определяем $u^n_{\bar{h}, \bar{f}}(T^n)$ как степень отображения в сферу Σ^n n-мерной сферы, состоящей из двух экземпляров симплекса T^n, склеенных по их границам, из которых один отображается в сферу Σ^n посредством $\bar{f}$, а другой — посредством $\bar{h}$ (ориентация этой сферы пусть определяется ориентацией первого экземпляра). Из того, что отображения $\bar{f}$ и $\bar{h}$ специальны, сразу следует, что $u^n_{\bar{h}, \bar{f}}$ есть специальный цикл.

ЛЕММА I. *Пусть f и g — два отображения комплекса K^n в пространство P^n, $\bar{f}$ и $\bar{g}$ — накрывающие отображения. Отображения f и g гомотопны в том и только в том случае, если отображение $\bar{f}$ специально-гомотопно по крайней мере одному из отображений $\bar{g}$, $\theta\bar{g}$.*

Доказательство. Достаточность условия леммы очевидна. Необходимость его вытекает из того, что если f_t есть деформация, соединяющая f и g, то существует накрывающая ее специальная деформация $\bar{f}_t$ такая, что отображение $\bar{f}_0$ совпадает с $\bar{f}$. Так как $\bar{f}_1$ является накрывающим отображением для g, то $\bar{f}_1$ совпадает либо с $\bar{g}$, либо с $\theta\bar{g}$.

ЛЕММА II. *Два специальных отображения $\bar{f}$ и $\bar{g}$ комплекса L^n в сферу Σ^n, совпадающие на остове L^{n-1}, специально-гомотопны в том и только в том случае, когда*

$$u^n_{\bar{f}, \bar{g}} \overset{\text{сп}}{\sim} 0.$$

Доказательство a). Пусть $\bar{f}$ и $\bar{g}$ специально-гомотопны. Тогда существует специальное отображение F призмы $Q = L^n \times I$ в сферу Σ^n, совпадающее с отображением $\bar{f}$ на нижнем основании и с отображением $\bar{g}$ на верхнем основании призмы (отображение F призмы Q мы называем специальным, если $F(x', t) = \theta F(x, t)$, где t — любое, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а x и x' — две противолежащие точки комплекса L^n. Специальная деформация определяет специальное отображение призмы Q и наоборот).

Отображение F призмы Q можно продеформировать так, чтобы:

(1) в течение всей деформации оно не менялось на нижнем и верхнем основаниях;

(2) в каждый момент деформации оно оставалось специальным;

(3) в результате деформации получилось отображение F^*, удовлетворяющее условию:

$$\text{если } x \in L^{n-2}, \text{ то } F^*(x, t) = \bar{f}(x) \, [= \bar{g}(x)] \text{ при любом } t$$

(т. е. отображение F^* должно быть специальным отображением, совпадающим с F на основаниях призмы и отображающее $L^{n-2}\times t$ так же, как L^{n-2} отображается посредством $\bar f$ или $\bar g$).

Построение деформации, переводящей F в F^*, не представляет затруднений. Сначала мы строим деформацию на клетках $T_i^0\times I$ призмы Q, стягивая образы каждой из этих клеток в точку $\bar f(T_i^0)=\bar g(T_i^0)$, причем так, чтобы образы точек $T_i^0\times 0$ и $T_i^0\times 1$ в течение всей деформации оставались на месте и чтобы выполнялось условие (2). Получающуюся деформацию, определенную на $L^0\times I$, распространяем на всю призму Q. Так как при распространении деформации мы имеем дело лишь с внутренностями поочередно двумерных, трехмерных и т. д. клеток призмы Q [см. ([9]), глава XIII, § 1, лемма I[a]], то мы можем при этом обеспечить соблюдение условий (1) и (2). В результате мы получаем отображение F_0^* призмы Q.

Деформируя отображение F_0^* аналогичным образом на внутренностях всех клеток вида $T_i^1\times I$ и распространяя деформацию (с соблюдением условий (1) и (2)) на всю призму, мы получим отображение F_1^*. Продолжая таким же образом, мы придем к отображению F_{n-2}^*, которое и принимаем за F^*.

Рассмотрим теперь клетку $T^{n-1}\times I$. Пусть граница симплекса T^{n-1} есть ΔT^{n-1}. Отображение F^* переводит соответствующие друг другу точки симплексов $T^{n-1}\times 0$ и $T^{n-1}\times 1$ в одну и ту же точку сферы Σ^n. Если точка $x\in\Delta T^{n-1}$, то $x\in L^{n-2}$ и

$$F^*(x,\ t)=\bar f(x)=\bar g(x).$$

Поэтому можно говорить о степени отображения F^* клетки $T^{n-1}\times I$ в сферу Σ^n, понимая под этой степенью степень отображения сферы, склеенной из двух экземпляров клетки $T^{n-1}\times I$, из которых один отображается в сферу Σ^n посредством F^*, а другой отображается так, что каждая его точка (x, t) переходит в точку $F^*(x, 0)$ ($x\in T^{n-1}$. Очевидно, $F^*(x, 0)=$

$$=\bar f(x)=\bar g(x)).$$

Обозначим определенную таким образом степень отображения через $a^{n-1}(T^{n-1})$. Нетрудно видеть, что a^{n-1} есть специальная цепь и что

$$u^n_{\bar f,\bar g}=\nabla a^{n-1},$$

т. е.

$$u^n_{\bar f,\bar g}\overset{\text{сп}}{\sim}0.$$

b) Пусть, наоборот,

$$u^n_{\bar f,\bar g}=\nabla a^{n-1},$$

где a^{n-1} есть некоторая специальная цепь. Построим отображение F^* призмы Q в сферу Σ^n следующим образом: положим

$$F^*(x,\ t)=\bar f(x)=\bar g(x)$$

для всех $x \in L^{-n^2}$, а

$$F^*(x, 0) = \bar{f}(x) \text{ и } F^*(x, 1) = \bar{g}(x)$$

для всех $x \in L^n$. Это отображение распространим на внутренность каждой клетки $T^{n-1} \times I$ так, чтобы при этом получилось специальное отображение и чтобы определенная выше степень отображения каждой клетки $T^{n-1} \times I$ равнялась числу $a^{n-1}(T^{n-1})$. Таким образом, мы приходим к отображению, определенному пока на $L^n \times 0$, $L^n \times 1$ и $L^{n-1} \times I$. В силу соотношения

$$u^n_{\bar{f}, \bar{g}} = \nabla a^{n-1},$$

граница каждой клетки $T^n \times I$ отображается при этом в сферу Σ^n со степенью 0. Поэтому построенное отображение можно распространить внутрь каждой из клеток $T^n \times I$, сохраняя попрежнему его свойство быть специальным. В результате получится специальное отображение F^* всей призмы Q, наличие которого доказывает, что отображения $\bar{f}$ и $\bar{g}$ специально-гомотопны. Таким образом, лемма II доказана.

Переходим к вопросу о классификации отображений.

ТЕОРЕМА 4. *При n нечетном два связанных с подгруппой Φ_0 отображения f и g: $K^n \to P^n$ гомотопны в том и только в том случае, когда*

$$u^n_{\bar{h}, \bar{f}} \overset{\text{сп}}{\sim} u^n_{\bar{h}, \bar{g}}$$

(*h — произвольное фиксированное, связанное с подгруппой Φ_0 отображение полиэдра K^n в P^n). Если u^n — какой-нибудь специальный n-мерный ∇-цикл, то существует связанное с подгруппой Φ_0 отображение $f: K^n \to P^n$ такое, что $u^n_{\bar{h}, \bar{f}} = u^n$.*

Теорема 4 устанавливает, что в случае n нечетного классы связанных с подгруппой Φ_0 отображений полиэдра K^n в пространство P^n могут быть (путем выбора произвольного такого отображения h) поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами группы Γ, изоморфной группе $B^n_\nabla(K^n)$.

Доказательство теоремы 4. При n нечетном отображение θ специально-гомотопно тождественному отображению, вследствие чего $\theta\bar{g}$ специально-гомотопно отображению $\bar{g}$. Но тогда из лемм I и II следует, что отображения f и g гомотопны в том и только в том случае, когда $u^n_{\bar{f}, \bar{g}} \overset{\text{сп}}{\sim} 0$. Первое утверждение теоремы 4 получается теперь, если воспользоваться очевидным соотношением:

$$u_{\bar{f}, \bar{g}} = u_{h, \bar{g}} - u_{h, f}.$$

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что если отображение $\bar{h}$ задано, а u^n — произвольный специальный цикл, то всегда можно построить специальное отображение $\bar{f}$, совпадающее с $\bar{h}$ на остове L^{n-1} и такое, что $u^n_{\bar{h}, \bar{f}} = u^n$. Отображение $\bar{f}$ определяет требуемое $f: K^n \to P^n$. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда n четно. Пусть θ' есть вращение сферы Σ^n, оставляющее полюсы неподвижными и переводящее каждую

точку экватора Σ^{n-1} в диаметрально-противоположную. Отображение $\theta\bar{h}$ не совпадает с $\bar{h}$ на L^{n-1}, однако отображение

$$\bar{h}' = \theta'\theta\bar{h}$$

есть специальное отображение, совпадающее с $\bar{h}$ на L^{n-1}. Под $\bar{f}', \bar{g}', \ldots$ мы будем понимать соответствующие отображения для $\bar{f}, \bar{g}, \ldots$.

ТЕОРЕМА 5. *При n четном два связанных с подгруппой Φ_0 отображения f и g: $K^n \to P^n$ гомотопны в том и только в том случае, когда выполняется по крайней мере одно из двух соотношений:*

$$u_{\bar{h}, \bar{g}} \overset{\text{сп}}{\sim} u_{\bar{h}, \bar{f}} \text{ и } u_{\bar{h}, \bar{g}} \overset{\text{сп}}{\sim} -u_{\bar{h}, \bar{f}} + u_{\bar{h}, \bar{h}'}.$$

Если u^n есть какой-нибудь специальный n-мерный ∇-цикл, то существует $f: K^n \to P^n$ такое, что

$$u^n_{\bar{h}, \bar{f}} = u^n.$$

Доказательство. Так как отображения $\theta\bar{g}$ и $\bar{g}'$ специально-гомотопны, то из лемм I и II сразу следует, что отображения f и g гомотопны в том и только в том случае, когда выполняется по крайней мере одно из двух соотношений:

$$u^n_{\bar{f}, \bar{g}} \overset{\text{сп}}{\sim} 0 \text{ и } u^n_{\bar{f}, \bar{g}'} \overset{\text{сп}}{\sim} 0. \tag{1}$$

Из определения цикла $u^n_{\bar{f}, \bar{g}}$ очевидно, что

$$u^n_{\bar{f}, \bar{g}} = u^n_{\bar{h}, \bar{g}} - u^n_{\bar{h}, \bar{f}} \tag{2}$$

и

$$u^n_{\bar{f}, \bar{g}'} = u^n_{\bar{h}, \bar{g}'} - u^n_{\bar{h}, \bar{f}}. \tag{3}$$

Пусть T^n — произвольный n-мерный симплекс комплекса L^n. Из определения числа $u^n_{\bar{h}, \bar{g}'}(T^n)$ следует (если принять во внимание, что $\theta'\theta$ есть отражение сферы Σ^n в своей экваториальной плоскости), что

$$u^n_{\bar{h}, \bar{g}'}(T^n) = -u^n_{\theta'\theta\bar{h}, \theta'\theta\bar{g}'}(T^n).$$

Но $\theta'\theta\bar{h} = \bar{h}'$, $\theta'\theta\bar{g}' = \bar{g}$. Поэтому

$$u^n_{\bar{h}, \bar{g}'} = -u^n_{\bar{h}', \bar{g}},$$

т. е.

$$u^n_{\bar{h}, \bar{g}'} = -u^n_{\bar{h}, \bar{g}} + u^n_{\bar{h}, \bar{h}'}.$$

Подставляя в (3), получаем

$$u^n_{\bar{f}, \bar{g}'} = u^n_{\bar{h}, \bar{h}'} - u^n_{\bar{h}, \bar{g}} - u^n_{\bar{h}, \bar{f}}. \tag{4}$$

Из соотношений (2) и (4) следует, что условия (1) эквивалентны соответственно условиям

$$u^n_{\bar{h}, \bar{g}} \overset{\text{сп}}{\sim} u^n_{\bar{h}, \bar{f}} \text{ и } u^n_{\bar{h}, \bar{g}} \overset{\text{сп}}{\sim} -u^n_{\bar{h}, \bar{f}} + u^n_{\bar{h}, \bar{h}'},$$

т. е. получается первое утверждение теоремы 5. Второе утверждение доказывается так же, как для теоремы 4.

Теорема 5 устанавливает, что в случае n четного каждому классу связанных с подгруппой Φ_0 отображений полиэдра K^n в пространство P^n может быть (путем выбора произвольного такого отображения h) поставлена в соответствие определенная неупорядоченная пара элементов группы Γ, причем соответствие оказывается взаимно однозначным. Элементы пары не обязаны, вообще говоря, быть различными. В § 7 показаны примеры отображений, для которых соответствующие пары состоят из различных элементов, а также примеры отображений, для которых оба элемента соответствующей пары совпадают.

§ 4. Вычисление группы Γ

В связи с теоремой 5 представляется существенным исследование группы Γ при n четном (в случае n нечетного она совпадает с группой $B^n_\nabla(K^n)$). Очевидно, Γ полностью определяется комплексом K^n и подгруппой Φ_0 фундаментальной группы Φ (считая, что Φ реализована выбором начала путей), так как знание этой подгруппы определяет комплекс L^n и разбиение его симплексов на пары противолежащих.

Легко видеть, что Γ есть фактор-группа группы $B^n_\nabla(L^n)$.

В самом деле, пусть γ^n есть некоторый обычный ∇-цикл комплекса L^n. Положим

$$\begin{aligned} u^n(T^n_i) &= \gamma(T^n_i) - \gamma(T'^n_i), \\ u^n(T'^n_i) &= \gamma(T'^n_i) - \gamma(T^n_i). \end{aligned} \tag{1}$$

Мы получаем специальный n-мерный ∇-цикл u^n, который ставим в соответствие циклу γ^n. Положим

$$u^n = \pi(\gamma^n).$$

π представляет собой отображение группы n-мерных циклов комплекса L^n в группу его специальных n-мерных циклов. Простые рассуждения показывают, что π есть гомоморфное отображение на группу специальных ∇-циклов, при котором циклы, гомологичные нулю, переходят в циклы, специально-гомологичные нулю. Поэтому π индуцирует гомоморфное отображение $\hat{\pi}$ группы $B^n_\nabla(L^n)$ на группу Γ, т. е. Γ есть фактор-группа группы $B^n_\nabla(L^n)$.

Группа Γ может быть вычислена, если известна матрица инциденций комплекса L^n для размерностей $n-1$ и n, а также разбиение симплексов этих размерностей на пары противолежащих. Пусть T^n_i, T'^n_i $(i = 1, 2, \ldots, \alpha^n)$ — пары противолежащих n-мерных симплексов комплекса L^n, а S^{n-1}_j, S'^{n-1}_j $(j = 1, 2, \ldots, \alpha^{n-1})$ — пары $(n-1)$-мерных (α^k есть число k-мерных симплексов комплекса K^n. На симплексы комплекса L^n перенесена ориентация с накрываемых ими симплексов комплекса K^n). Пусть граница симплекса T^n_i содержит симплекс S^{n-1}_j с коэффициентом a_{ij} и симплекс S'^{n-1}_j с коэффициентом b_{ij}. Тогда соответствующая матрица инциденций имеет вид:

$$
\begin{array}{c|cccc:cccc}
 & S_1^{n-1} & S_2^{n-1} & \ldots & S_{\alpha^{n-1}}^{n-1} & S_1'^{n-1} & S_2'^{n-1} & \ldots & S'^{n-1}_{\alpha^{n-1}} \\
\hline
T_1^n & & & & & & & & \\
T_2^n & & & & & & & & \\
\vdots & & (a_{ij}) & & & & (b_{ij}) & & \\
T_{\alpha^n}^n & & & & & & & & \\
\hdashline
T_1'^n & & & & & & & & \\
T_2'^n & & & & & & & & \\
\vdots & & (b_{ij}) & & & & (a_{ij}) & & \\
T'^n_{\alpha^n} & & & & & & & &
\end{array}
$$

Пусть задан специальный n-мерный цикл u^n и пусть $\mathfrak{R}$ — решетка (свободная абелева группа) ранга α^n, элементами которой являются строчки $(v_1, v_2, \ldots, v_{\alpha^n})$. Поставим в соответствие каждому специальному циклу u^n элемент решетки $\mathfrak{R}$, для которого $v_i = u^n(T_i^n)$. Мы получим, очевидно, изоморфное отображение группы всех n-мерных специальных циклов на решетку $\mathfrak{R}$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы цикл u^n был специально-гомологичен нулю, является, очевидно, существование таких целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha^{n-1}}$, которые для любого $i = 1, 2, \ldots \alpha^n$ удовлетворяют соотношениям

$$u(T_i^n) = \sum_{j=1}^{\alpha^{n-1}} a_{ij}\lambda_j - \sum_{j=1}^{\alpha^{n-1}} b_{ij}\lambda_j,$$

т. е. соотношениям

$$u(T_i^n) = \sum_{j=1}^{\alpha^{n-1}} (a_{ij} - b_{ij})\lambda_j.$$

Вследствие этого, если считать, что решетка $\mathfrak{R}$ отождествлена с группой всех n-мерных циклов, получаем, что подгруппа $\mathfrak{R}_0$ циклов, специально-гомологичных нулю, состоит из всех элементов $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathfrak{R}$, для которых система уравнений

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{\alpha^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \ldots & a_{1\alpha^{n-1}} - b_{1\alpha^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha^n 1} - b_{\alpha^n 1} & a_{\alpha^n 2} - b_{\alpha^n 2} & \ldots & a_{\alpha^n \alpha^{n-1}} - b_{\alpha^n \alpha^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\alpha^{n-1}} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

имеет решения в целых числах. Группа Γ представляет собой фактор-группу $\mathfrak{R} / \mathfrak{R}_0$.

Пусть P и Q — квадратные целочисленные унимодулярные матрицы соответственно порядков α^n и α^{n-1} такие, что матрица

$$C = P(a_{ij} - b_{ij})Q^{-1}$$

имеет канонический вид

$$\begin{pmatrix} 1_{1_{\ddots_{1}}} & & & 0 \\ & c_{1} c_{2} \ldots c_{\rho} & & \\ 0 & & 0 \ddots 0 & \end{pmatrix}$$

(число единиц на главной диагонали равно числу $r-\rho$, где r — ранг матрицы $(a_{ij}-b_{ij})$).

Положим

$$P\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{\alpha^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_{\alpha^n}' \end{pmatrix}; \quad Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\alpha^{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{\alpha^{n-1}}' \end{pmatrix}.$$

Соотношение (2) эквивалентно соотношению

$$P\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{\alpha^{n-1}} \end{pmatrix} = P(a_{ij}-b_{ij})\,Q^{-1}Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\alpha^{n-1}} \end{pmatrix},$$

т. е. соотношению

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_{\alpha^n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{1_{\ddots_{1}}} & & & 0 \\ & c_{1} c_{2} \ldots c_{\rho} & & \\ 0 & & 0 \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{\alpha^{n-1}}' \end{pmatrix}, \tag{3}$$

и очевидно, что система уравнений (2) имеет целочисленные решения в том и только в том случае, когда их имеет система (3).

Ставя теперь в соответствие каждой строчке $(v_1, v_2, \ldots, v_{\alpha^n})$ строчку $(v_1', v_2', \ldots, v_{\alpha^n}')$, мы получаем изоморфное отображение решетки $\mathfrak{N}$ на себя. При этом элемент $(v_1', v_2', \ldots, v_{\alpha^n}')$ соответствует циклу, специально-гомологичному нулю в том и только в том случае, когда система (3) имеет целочисленные решения. Последнее же, очевидно, может иметь место, когда выполняются условия

$$\begin{aligned} v_i' &= 0 && \text{при } i = r+1,\ r+2, \ldots, \alpha^n, \\ v_i' &\equiv 0 \pmod{c_i} && \text{при } r-\rho+1 \leqslant i \leqslant r. \end{aligned} \tag{*}$$

Поэтому группа Г, как фактор-группа группы всех строчек $(v_1', v_2', \ldots, v_{\alpha^n}')$ по подгруппе ее, состоящей из строчек, удовлетворяющих условию (*), имеет ранг $\alpha^n - r$ и коэффициенты кручения $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$.

Таким образом, мы показали, что группа Г может быть найдена путем приведения к каноническому виду матрицы $(a_{ij}-b_{ij})$, определяемой матрицей инциденций комплекса L^n.

§ 5. Вычисление группы Г для замкнутых псевдомногообразий

В этом параграфе рассматривается случай, когда комплекс K^n есть замкнутое псевдомногообразие. Мы будем обозначать его через M^n. Если

n нечетно, то группа Γ совпадает с $B^n_\nabla(M^n)$, последняя же представляет собой, как известно, бесконечную циклическую группу, если M^n ориентируемо, и состоит из двух элементов, если M^n неориентируемо. Однако группу Γ удается полностью вычислить и при n четном, и здесь получаются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 6. *При n четном, если M^n есть ориентируемое псевдомногообразие, группа Γ содержит два элемента. Точно так же она содержит два элемента, если и M^n и накрытие L^n оба неориентируемы. Если же M^n неориентируемо, а L^n ориентируемо, то Γ представляет собой бесконечную циклическую группу.*

Доказательство. Мы будем пользоваться следующими обозначениями: T^n_i, T'^n_i — n-мерные симплексы комплекса L^n, накрывающие симплекс τ^n_i псевдомногообразия M^n ($i=1, 2, \ldots, \alpha^n$), S^{n-1}_j, S'^{n-1}_j — $(n-1)$-мерные симплексы комплекса L^n, накрывающие симплекс σ^{n-1}_j ($j=1, 2, \ldots, \alpha^{n-1}$).

а) Пусть M^n — ориентируемое псевдомногообразие. Будем считать, что симплексы τ^n_i ориентированы когерентно, а на симплексы T^n_i и T'^n_i перенесем ориентацию симплекса τ^n_i. Тогда симплексы T^n_i и T'^n_i оказываются также ориентированными когерентно. Будем считать, что все симплексы T^n_i составляют сильно-связный кусок $\mathfrak{A}$ псевдомногообразия L^n; а симплексы T'^n_i — сильно-связный кусок $\mathfrak{B}$ (этого всегда можно добиться надлежащим выбором обозначений следующим образом: в качестве T^n_1 берем произвольный симплекс комплекса L^n и обозначаем накрываемый им симплекс через τ^n_1. Пусть τ^n_2 — какой-нибудь симплекс, примыкающий к τ^n_1 по $(n-1)$-мерной грани. Тогда в качестве T^n_2 берем тот из двух симплексов, накрывающих симплекс τ^n_2, который примыкает к симплексу T^n_1, и т. д.).

Пусть γ^n есть n-мерный ∇-цикл комплекса M^n. Полагая

$$u(T^n_i) = \gamma(\tau^n_i) \text{ и } u(T'^n_i) = -\gamma(\tau^n_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha^n),$$

мы получаем специальный цикл u^n. Положим, что $u^n = \pi_1(\gamma^n)$. Очевидно, что

$$\pi_1(\gamma_1 \pm \gamma_2) = \pi_1(\gamma_1) \pm \pi_1(\gamma_2)$$

и что получающееся при этом соответствие между циклами γ и специальными циклами u взаимно однозначно. Таким образом, π_1 представляет собой изоморфное отображение группы n-мерных циклов комплекса M^n на группу специальных n-мерных циклов комплекса L^n. Докажем, что если $\gamma \sim 0$, то $u \overset{\text{сп}}{\sim} 0$. Для доказательства заметим, что если $\gamma \sim 0$, то

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} \gamma(\tau^n_i) = 0,$$

а следовательно, и

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T^n_i) = 0.$$

Пусть S^{n-1}_i, S'^{n-1}_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) — граничные $(n-1)$-мерные симплексы, а R^{n-1}_j ($j = 1, 2, \ldots, q$) — внутренние $(n-1)$-мерные симплексы

куска $\mathfrak{A}$ (очевидно, что граничные $(n-1)$-мерные симплексы у кусков $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одинаковы). Тогда можно построить $(n-1)$-мерную цепь a^{n-1} куска $\mathfrak{A}$ такую, что

$$1)\ a^{n-1}(S_i^{n-1}) = a^{n-1}(S_i'^{n-1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$2)\ u^n = \nabla a^{n-1}.$$

Для построения цепи a^{n-1} поступим следующим образом: рассмотрим произвольный симплекс T_i^n $(i \geqslant 2)$ и какую-нибудь цепочку чередующихся n-мерных и $(n-1)$-мерных симплексов, примыкающих каждый последующий к предыдущему и соединяющих T_i с T_1 (наличие такой цепочки обеспечивается сильной связностью куска $\mathfrak{A}$). Предположим, что для T_i^n эта цепочка есть

$$T_1, R_{i1}, T_{i2}, R_{i2}, \ldots, T_{i\nu_i}, R_{i\nu_i}, T_i.$$

Ориентируем симплексы R_{ij} так, чтобы каждый из них входил в границу следующего за ним симплекса цепочки с коэффициентом $+1$. Определим $(n-1)$-мерную цепь b_i куска $\mathfrak{A}$, полагая, что $b_i = u(T_i)$ на всех симплексах R_{ij}, и $b_i = 0$ на всех граничных $(n-1)$-мерных симплексах куска $\mathfrak{A}$ и на всех внутренних симплексах его, не входящих в цепочку. Тогда

$$\nabla b_i(T_1^n) = -u(T_i^n), \quad \nabla b_i(T_i^n) = u(T_i^n),$$

$$\nabla b_i(T_j^n) = 0 \text{ при } j \neq 1,\ j \neq n.$$

Положим

$$a^{n-1} = \sum_{i=1}^{\alpha^n} b_i\,.$$

Очевидно, что

$$\nabla a^{n-1}(T_i) = u(T_i)$$

для всех $i \neq 1$. При $i = 1$

$$\nabla a^{n-1}(T_1) = \sum_{i=2}^{\alpha^n} -u(T_i^n) = u(T_1^n),$$

в силу соотношения

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T_i^n) = 0.$$

Таким образом, a^{n-1} удовлетворяет поставленным выше условиям.

Принимая во внимание, что граничные симплексы у кусков $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одинаковы и

$$a(S_i^{n-1}) = a(S_i'^{n-1}) = 0$$

и полагая

$$c(R_i) = a(R_i), \quad c(R'_i) = -a(R_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

$$c(S_i) = c(S'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

мы получим специальную $(n-1)$-мерную цепь c^{n-1} комплекса L^n такую, что

$$\nabla c^{n-1} = u^n.$$

Таким образом, если $\gamma \sim 0$, то

$$\pi_1(\gamma) = u \overset{\text{сп}}{\simeq} 0.$$

Вследствие этого π_1 индуцирует гомоморфное отображение $\hat{\pi}_1$ группы $B^n_\nabla(M^n)$ на группу Г.

Определим ядро гомоморфизма $\hat{\pi}_1$. Пусть

$$\pi_1(\gamma) = u \overset{\text{сп}}{\simeq} 0.$$

Рассмотрим цепи

$$A^n = \sum_{i=1}^{\alpha^n} T^n_i \text{ и } B^n = \sum_{i=1}^{\alpha^n} T'^n_i.$$

Предположим, что симплексы S^{n-1}_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ ориентированы таким образом, что они входят в ΔA с коэффициентами $+1$. Тогда симплексы S'^{n-1}_i входят в ΔB также с коэффициентами $+1$, а так как $A + B$ есть Δ-цикл комплекса L^n, то симплексы S'^{n-1}_i входят в ΔA с коэффициентами -1. Симплексы R^{n-1}_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ входят в ΔA с коэффициентами 0, поэтому

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{p} S^{n-1}_i - \sum_{i=1}^{p} S'^{n-1}_i.$$

Пусть

$$\pi_1(\gamma) = u = \nabla c^{n-1},$$

где c^{n-1} — специальная цепь. Тогда, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T^n_i) = \sum_{j=1}^{p} c(S^{n-1}_j) - \sum_{j=1}^{p} c(S'^{n-1}_j). \tag{1}$$

Левая часть соотношения (1) равна $\sum_{i=1}^{\alpha^n} \gamma(\tau^n_i)$, правая же есть четное число, в силу того, что

$$c(S'^{n-1}_j) = -c(S^{n-1}_j).$$

Таким образом, мы доказали, что если

$$u = \pi_1(\gamma) \overset{\text{сп}}{\simeq} 0,$$

то $\sum_{i=1}^{\alpha^n} \gamma(\tau^n_i)$ есть четное число.

Пусть, наоборот, известно, что $\sum_{i=1}^{\alpha^n} \gamma(\tau_i^n)$ есть четное число, например $2l$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T_i^n) = 2l.$$

Пусть c^{n-1} есть специальная цепь такая, что

$$\sum_{i=1}^{p} c(S_i) = l,$$

$$c(S_i') = -c(S_i), \quad c(R_j) = c(R_j') = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

и пусть

$$v^n = \Delta c^{n-1}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} v(T_i^n) = 2l,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} [u(T_i^n) - v(T_i^n)] = 0$$

и, по доказанному выше,

$$u^n \overset{\text{сп}}{\sim} v^n.$$

Но цикл v^n, по определению, специально-гомологичен 0, следовательно, и

$$u^n \overset{\text{сп}}{\sim} 0.$$

Итак, $\pi(\gamma) \overset{\text{сп}}{\sim} 0$ в том и только в том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} \gamma(\tau_i^n)$$

есть четное число.

Поставим теперь в соответствие каждому элементу $\gamma^* \in B_\nabla^n(M^n)$ число

$$\sum_{i=1}^{\alpha_n} \gamma(\tau_i^n),$$

где γ есть произвольный цикл класса гомологий γ^*. Как известно, это соответствие определяет изоморфное отображение группы $B_\nabla^n(M^n)$ на группу целых чисел, и мы можем отождествить элементы группы $B_\nabla^n(M^n)$ с соответствующими им целыми числами. Тогда $\hat{\pi}_1$ можно рассматривать как гомоморфное отображение группы целых чисел по сложению на группу Г. В силу доказанного выше, ядро гомоморфизма $\hat{\pi}_1$ состоит из четных чисел. Поэтому Г состоит из двух элементов.

b) Пусть M^n — неориентируемое многообразие, а накрытие L^n ориентируемо. Воспользуемся обозначениями пункта а) и рассмотрим снова куски $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. В данном случае когерентной ориентации у M^n не существует, однако у L^n она имеется. Мы будем считать, что все n-мерные

симплексы куска $\mathfrak{A}$

$$T_1^n, T_2^n, \ldots, T_{\alpha^n}^n$$

ориентированы когерентно. На симплексы $T_i'^n$ перенесем ориентацию соответствующих симплексов T_i^n. Будем считать, что когерентная ориентация накрытия L^n индуцируется ориентацией куска $\mathfrak{A}$. Тогда все когерентно ориентированные симплексы накрытия L^n суть либо

$$T_1, T_2, \ldots, T_{\alpha^n}, T_1', T_2', \ldots, T_{\alpha^n}',$$

либо

$$T_1, T_2, \ldots, T_{\alpha^n}, -T_1' - T_2', \ldots, -T_{\alpha^n}'.$$

В первом случае цепь $A + B$ является (нижним) циклом, а во втором — цепь $A - B$. Докажем, что первый случай невозможен. Будем считать, что симплексы S_i^{n-1} $(i = 1, 2, \ldots, p)$ ориентированы таким образом, что каждый из них входит в ΔA с коэффициентом 1; на $S_i'^{n-1}$ перенесем ориентацию симплекса S_i^{n-1}. Тогда

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{p} S_i^{n-1} + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i'^{n-1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_i = +1$ или -1, в силу чего

$$\Delta B = \sum_{i=1}^{p} S_i'^{n-1} + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i. \tag{3}$$

Если $\Delta(A + B) = 0$, то все $\varepsilon_i = -1$ и

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{p} S_i^{n-1} - \sum_{i=1}^{p} S_i'^{n-1}. \tag{4}$$

Перенесем на симплексы τ_i^n ориентацию симплексов T_i^n. Рассмотрим два симплекса τ_i^n и τ_k^k, примыкающие по общей грани σ^{n-1}. Если симплекс σ^{n-1} накрывается внутренним симплексом куска $\mathfrak{A}$ (т. е. одним из R_j^{n-1}, $j=1,2,\ldots,q$), то ясно, что τ_i и τ_k индуцируют в σ^{n-1} противоположные ориентации. Однако то же имеет место и в том случае, когда симплекс σ^{n-1} накрывается парой граничных симплексов куска $\mathfrak{A}$. В самом деле, пусть эти накрывающие симплексы будут, например, S_1 и S_1'. Предположим, что

$$\Delta T_i = S_1 + \cdots. \tag{5}$$

Тогда, в силу соотношения (4),

$$\Delta T_k = -S_1' + \cdots. \tag{6}$$

Предполагая, что σ ориентирован в соответствии с ориентацией накрывающих его симплексов S_1 и S_1' и принимая во внимание (5) и (6), мы получаем соотношения

$$\Delta\tau_i = \quad \sigma + \cdots,$$

$$\Delta\tau_k = -\sigma + \cdots.$$

Таким образом, мы показали, что ориентация симплексов $\tau_i^n (i = 1, 2, \ldots, \alpha^n)$ является когерентной, что противоречит неориентируемости псевдомногообразия M^n.

Следовательно, имеет место второй случай, т. е. когерентно ориентированные симплексы накрытия L^n суть

$$T_i^n, \; -T_i'^n \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha^n)$$

и цепь $A - B$ является циклом. Из соотношений (2) и (3) получается тогда, что все $\varepsilon_i = +1$, а

$$\Delta A = \Delta B = \sum_{i=1}^{p} S_i^{n-1} + \sum_{i=1}^{p} S_i'^{n-1}. \tag{7}$$

Поставим теперь в соответствие каждому специальному циклу u этот же самый цикл, рассматриваемый как обычный. Получаем отображение π_2 группы специальных циклов в группу обычных циклов комплекса L^n. Очевидно, что

$$\pi_2 (u \pm v) = \pi_2 (u) \pm \pi_2 (v)$$

и что если $u \overset{\text{сп}}{\sim} 0$, то $\pi_2 (u) \sim 0$. Поэтому π_2 индуцирует гомоморфное отображение $\hat{\pi}_2$ группы Γ в $B_\nabla^n (L^n)$.

Пусть U^* есть элемент группы $B_\nabla^n (L^n)$, u^* — произвольный цикл из U^*. Обозначим символом $W (U^*)$ сумму значений u^* на всех n-мерных симплексах выбранной когерентной ориентации комплекса L^n, т. е. положим

$$W (U^*) = \sum_{i=1}^{\alpha^n} u^* (T_i^n) - \sum_{i=1}^{\alpha^n} u^* (T_i'^n). \tag{8}$$

Как уже было указано, такое соответствие определяет изоморфное отображение группы $B_\nabla^n (L^n)$ на группу целых чисел. Отождествим элементы группы $B_\nabla^n (L^n)$ с соответствующими числами. Тогда $\hat{\pi}_2$ можно рассматривать как гомоморфное отображение группы Γ в группу целых чисел.

Пусть $U \subset \Gamma$, u — произвольный элемент класса специальных гомологий U. Тогда

$$\hat{\pi}_2 (U) = W (u) = \sum_{i=1}^{\alpha^n} u (T_i^n) - \sum_{i=1}^{\alpha^n} u (T_i'^n).$$

Так как u есть специальный цикл, то

$$W (U) = 2 \sum_{i=1}^{\alpha^n} u (T_i^n),$$

т. е. представляет собой четное число. С другой стороны, если $2l$ есть произвольное четное число, то, полагая, например,

$$u (T_1^n) = l, \quad u (T_1'^n) = -l,$$
$$u (T_i^n) = u (T_i'^n) = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, \alpha^n)$$

и обозначая через U класс специальных гомологий, содержащий цикл u, получаем

$$\hat{\pi}_2(U) = 2l.$$

Поэтому $\hat{\pi}_2$ представляет собой гомоморфное отображение группы Γ на подгруппу четных чисел.

Докажем, что ядро гомоморфизма $\hat{\pi}_2$ состоит только из нулевого элемента. Пусть $\hat{\pi}_2(U) = 0$, $u \in U$. Тогда

$$W(U) = 2\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T_i^n) = 0,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T_i^n) = 0. \tag{9}$$

Но тогда, как было показано в п. а), можно построить такую специальную цепь c^{n-1} комплекса L^n, что

$$\nabla c^{n-1} = u^n,$$

т. е. $u^n \overset{\text{сп}}{\sim} 0$, вследствие чего

$$U = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что $\hat{\pi}_2$ есть изоморфное отображение группы Γ на группу четных чисел, т. е. Γ — бесконечная циклическая группа.

с) Предположим теперь, что псевдомногообразия K^n и L^n оба неориентируемы. Будем считать, что все симплексы T_i^n ориентированы (произвольно, но фиксированно), на симплексы $T_i'^n$ перенесем ориентацию T_i^n и аналогично поступим с симплексами S_i^{n-1}, $S_i'^{n-1}$, R_j^{n-1}, $R_j'^{n-1}$ $(i = 1, 2 \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$. Воспользуемся результатами, изложенными в начале § 4. Так как L^n есть неориентируемое псевдомногообразие, то $B_\nabla^n(L^n)$ состоит из двух элементов и каждый не гомологичный нулю n-мерный цикл (обычный) гомологичен циклу γ^n, определяемому соотношениями

$$\gamma(T_1^n) = 1, \quad \gamma(T_1'^n) = \gamma(T_i^n) = \gamma(T_i'^n) = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, \alpha^n)$$

[см. ([10]), гл. IX, 1 : 7].

Рассмотрим специальный цикл $\pi(\gamma^n) = u^n$, определенный в § 4, и докажем, что он не гомологичен нулю специально. По определению (см. § 4),

$$u(T_1^n) = 1, \quad u(T_1'^n) = -1, \quad u(T_i^n) = u(T_i'^n) = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, \alpha^n).$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} u(T_i^n) = 1. \tag{10}$$

Предположим, что $u \overset{\text{сп}}{\sim} 0$, т. е.

$$u^n = \nabla c^{n-1}, \tag{11}$$

где c^{n-1} — специальная цепь. Положим, как и раньше, что

$$A = \sum_{i=1}^{\alpha^n} T_i^n. \tag{12}$$

Тогда

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i S_i^{n-1} + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i' S_i'^{n-1} + \sum_{i=1}^{q} \eta_i R_i^{n-1}, \tag{13}$$

где каждое ε_i и ε_i' равно либо $+1$, либо -1, а каждое η_i равно либо ± 2, либо 0 (так как в куске $\mathfrak{A}$ к каждому симплексу R_i^{n-1} примыкают два n-мерных симплекса). В силу соотношений (11), (12) и (13),

$$\sum_{i=1}^{n} u(T_i^n) = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i c^{n-1}(S_i) + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i' c^{n-1}(S_i'^{n-1}) + \sum_{i=1}^{q} \eta_i c^{n-1}(R_i^{n-1}). \tag{14}$$

Так как c^{n-1} — специальная цепь, то соотношение (14) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} u(T_i^n) = \sum_{i=1}^{p} (\varepsilon_i - \varepsilon_i') c^{n-1}(S_i) + \sum_{i=1}^{q} \eta_i c(R_i^{n-1}). \tag{15}$$

Сразу видно, что правая часть в (15) есть четное число, но тогда (15) противоречит (10).

Таким образом, цикл u не гомологичен специально нулю и, следовательно, Γ состоит из двух элементов (по доказанному в § 4, Γ есть фактор-группа группы второго порядка $B_\nabla^n(L^n)$ и, следовательно, больше двух элементов Γ иметь не может). Теорема 6 доказана полностью.

§ 6. Классификация отображений псевдомногообразий в проективное пространство

В этом параграфе при помощи теорем 4, 5, 6 дается классификация отображений полиэдра K^n в пространство P^n для случая, когда K^n есть замкнутое псевдомногообразие M^n. Мы будем считать попрежнему, что все рассматриваемые отображения удовлетворяют условиям, изложенным в начале § 3, т. е. что все они соответствуют одной и той же подгруппе Φ_0 фундаментальной группы и совпадают на $(n-1)$-мерном остове комплекса M^n.

1) Рассмотрим сначала случай, когда n нечетно.

а) M^n ориентируемо. Будем считать, что n-мерные симплексы M^n ориентированы когерентно, на накрытие L^n перенесем ориентацию псевдомногообразия M^n. Так как P^n при n нечетном ориентируемо, то мы будем считать, что на нем также задана ориентация и перенесем ее на сферу Σ^n.

В § 3 был установлен изоморфизм между группами Γ и $B^n_\nabla(M_n)$. Каждому элементу $U_0 \in B^n_\nabla(M^n)$ взаимно однозначно соответствует целое число

$$W(U_0) = \sum_{i=1}^{\alpha^n} u_0(\tau^n_i),$$

где u_0 — любой цикл класса гомологий U_0. Пусть $U \in \Gamma$ и ему соответствует, в силу указанного изоморфизма (см. § 3), $U_0 \in B^n_\nabla(M^n)$. Относя элементу U число $W(U) = W(U_0)$, мы получаем взаимно однозначное соответствие между элементами группы Γ и целыми числами.

Если u есть специальный цикл, принадлежащий классу гомологий U, то (см. § 3)

$$W(U) = W(U_0) = \sum_{i=1}^{\alpha^n} u_0(\tau^n_i) = \sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T^n_i) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T^n_i) + \sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T'^n_i)\right). \quad (1)$$

В силу формулы (1), классу специальных гомологий цикла $u_{\bar{h}, \bar{f}}$ соответствует число

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{\bar{h}, \bar{f}}(T^n_i) + \sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{\bar{h}, \bar{f}}(T'^n_i)\right).$$

Но сумма в скобках, очевидно, равна

$$A(\bar{f}) - A(\bar{h}),$$

где под $A(\bar{f})$, $A(\bar{h})$, ... мы понимаем степени отображений $\bar{f}, \bar{h}, \ldots$. Отсюда следует, что

$$u_{\bar{h}, \bar{f}} \overset{\text{сп}}{\sim} u_{\bar{h}, \bar{g}}$$

в том и только в том случае, когда

$$\frac{1}{2}\left(A(\bar{f}) - A(\bar{h})\right) = \frac{1}{2}\left(A(\bar{g}) - A(\bar{h})\right),$$

т. е. когда

$$A(\bar{f}) = A(\bar{g}).$$

Так как (см. § 2)

$$f\psi = \varphi\bar{f},$$

а $A(\psi) = A(\varphi) = 2$, то

$$A(\bar{f}) = A(f) \quad (2)$$

и, аналогично,

$$A(\bar{g}) = A(g). \quad (3)$$

Применяя теорему 4, мы видим, что необходимое и достаточное условие гомотопности отображений f и g выражается равенством

$$A(f) = A(g).$$

Так как

$$u_{\bar{h},\bar{f}}(T_i^n) = u_{\bar{h},\bar{f}}(T_i'^n),$$

то

$$A(f) - A(h) = A(\bar{f}) - A(\bar{h}) = 2\sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T_i^n)$$

есть число четное. С другой стороны, при заданном $\bar{h}$ и произвольном целом числе l всегда можно найти $\bar{f}$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{\bar{h},\bar{f}}(T_i^n) = l,$$

т. е.

$$A(f) - A(h) = 2l.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае между гомотопическими классами отображений и их степенями существует взаимно однозначное соответствие, однако совокупность всех степеней отображений может представлять собой либо множество всех четных чисел, либо множество всех нечетных чисел. Простые примеры показывают, что реализуется как первая, так и вторая возможность. Так, например, если M^n есть тоже проективное пространство, то его можно отобразить на P^n со степенью 1 и, следовательно, степени всех соответствующих отображений (т. е. определяемых той же подгруппой Φ_0) будут нечетные. Если M^n есть произведение двумерной сферы на окружность, $S^2 \times S^1$, а f' — топологическое отображение окружности S^1 на проективную прямую $P^1 \subset P^3$, то, полагая

$$f(x \times y) = f'(y) \quad (x \in S^2,\ y \in S^1),$$

мы получаем отображение

$$f: S^2 \times S^1 \to P^3,$$

имеющее, очевидно, степень 0. Следовательно, степени всех соответствующих отображений будут четные.

b) Пусть M^n — неориентируемое псевдомногообразие. Группа $B_\nabla^n(M^n)$, а значит, и изоморфная ей группа Γ, состоит из двух элементов, следовательно, по теореме 4, в этом случае существуют два класса отображений. Отображения h и f гомотопны или негомотопны в зависимости от того, будет ли сумма

$$\sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{\bar{h},\bar{f}}(T_i^n)$$

или, что то же самое, сумма

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{h,f}(\tau_i^n)$$

соответственно четной или нечетной.

2) Перейдем теперь к случаю, когда n четно.

а) Пусть M^n, а следовательно, и L^n, ориентируемы. В этом случае Γ состоит из двух элементов и специальный цикл u специально-гомологичен нулю или нет в соответствии с тем, является ли число

$$W(u) = \sum_{i=1}^{\alpha^n} u(T_i^n)$$

четным или нет. Но тогда из теоремы 5 следует, что два отображения f и g гомотопны в том и только в том случае, когда имеет место по крайней мере одно из двух соотношений:

$$W(u_{\bar{h}, \bar{g}}) \equiv W(u_{\bar{h}, \bar{f}}) \pmod 2, \tag{4}$$

$$W(u_{\bar{h}, \bar{g}}) \equiv -W(u_{\bar{h}, \bar{f}}) + W(u_{\bar{h}, \bar{h}'}) \pmod 2. \tag{5}$$

ЛЕММА.

$$W(u_{\bar{h}, \bar{h}'}) \equiv 0 \pmod 2.$$

Доказательство леммы будет дано ниже. Из леммы вытекает, что условия (4) и (5) эквивалентны, а следовательно, f и g гомотопны в том и только в том случае, когда

$$W(u_{\bar{h}, \bar{f}}) \equiv W(u_{\bar{h}, \bar{g}}) \pmod 2$$

или, что то же, когда

$$W(u_{\bar{f}, \bar{g}}) \equiv 0 \pmod 2.$$

Отсюда сразу следует, что существуют два класса отображений, так как при данном $\bar{f}$ всегда можно построить такое $\bar{g}$, чтобы $W(u_{\bar{f}, \bar{g}})$ было произвольно данным заранее целым числом.

Доказательство леммы. Будем считать, что все рассматриваемые отображения переводят остов K^{n-1} в пространство P^{n-1}, а остов K^{n-2} — в P^{n-2}, причем пространство P^{n-2} накрывается экватором Σ^{n-2} сферы Σ^{n-1} (см. § 3. Очевидно, данное допущение не ограничивает общности рассмотрений).

Пусть f — непрерывное отображение ориентированного симплекса T^k в ориентированную сферу Σ^k, при котором граница симплекса T^k переходит в экватор Σ^{k-1} сферы Σ^k. Тогда естественным образом определяются степени отображения f в верхнюю и в нижнюю полусферы сферы Σ^k. Обозначим эти степени соответственно через γ' и γ''. Число γ' мы будем для краткости называть степенью отображения f наверху и обозначать $A_f^+(T^k)$, а число γ'' — степенью отображения f внизу и обозначать $A_f^-(T^k)$. Будем считать, что в Σ^{k-1} задана ориентация, индуцируемая ориентацией верхней полусферы. Тогда разность

$$\gamma' - \gamma'' = A_f^+ - A_f^-$$

есть степерь отображения f границы симплекса T^k в экватор Σ^{k-1}.

Числа A_f^+ и A_f^- не меняются при деформации отображения, если в течение всего процесса деформации граница ΔT^k симплекса T^k переводится в сферу Σ^{k-1}.

Вычислим $W(u_{\bar{h}, \bar{h}'})$. Пусть

$$A_{\bar{h}}^{+}(T_i^n) = \gamma_i',$$
$$A_{\bar{h}}^{-}(T_i^n) = \gamma_i''.$$

Так как $\bar{h}' = \omega \bar{h}$, где ω есть отражение сферы Σ^n в своей экваториальной плоскости, то

$$A_{\bar{h}'}^{+}(T_i^n) = -\gamma_i'', \quad A_{\bar{h}'}^{-}(T_i^n) = -\gamma_i'$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \alpha^n)$$
$$u_{\bar{h}, \bar{h}'}(T_i^n) = -\gamma_i'' - \gamma_i' = \gamma_i' - \gamma_i'' - 2\gamma_i'.$$

Так как $\gamma_i' - \gamma_i''$ есть степень отображения $\bar{h}: \Delta T_i^n \to \Sigma^{n-1}$, которую мы будем обозначать через δ_i, то последнее соотношение можно записать в виде

$$u_{\bar{h}, \bar{h}'}(T_i^n) = \delta_i - 2\gamma_i'.$$

Суммируя по i, мы получаем

$$W(u_{\bar{h}, \bar{h}'}) \equiv \sum_{i=1}^{\alpha^n} \delta_i \pmod 2. \tag{6}$$

Так как

$$A = \sum_{i=1}^{\alpha^n} T_i^n, \quad \Delta A = \sum_{i=1}^{\alpha^n} \Delta T_i^n,$$

то, очевидно, правая часть соотношения (6) равна степени δ^* отображения $\bar{h}: \Delta A \to \Sigma^{n-1}$. Напомним, что

$$\Delta A = \sum_{j=1}^{p} S_j^{n-1} - \sum_{j=1}^{p} S_j'^{\,n-1} \tag{7}$$

(см. § 5) и подсчитаем δ^* следующим образом: пусть

$$A_{\bar{h}}^{+}(S_j^{n-1}) = \mu_j', \quad A_{\bar{h}}^{-}(S_j^{n-1}) = \mu_j''. \tag{8}$$

Так как $n-1$ нечетно, а отображение $\bar{h}$ специально, то очевидно, что

$$A_{\bar{h}}^{+}(S_j'^{\,n-1}) = \mu_j'',$$
$$A_{\bar{h}}^{-}(S_j'^{\,n-1}) = \mu_i'. \tag{9}$$

Степень δ^* отображения $\bar{h}: \Delta A \to \Sigma^{n-1}$ равна числу накрытий произвольного $(n-1)$-мерного симплекса E^{n-1} сферы Σ^{n-1} образами $(n-1)$-мерных симплексов цикла ΔA при каком-нибудь симплициальном приближении отображения $\bar{h}$. Из соотношений (7), (8), (9) видно, что если в качестве симплекса E^{n-1} взять симплекс из верхней полусферы сферы Σ^{n-1}, то

$$\delta^* = \sum_{=1}^{p} (\mu_j' - \mu_j''),$$

а если взять симплекс нижней полусферы, то

$$\delta^* = \sum_{j=1}^{p} (\mu_j'' - \mu_j').$$

Следовательно, $\delta^* = 0$ и соотношение (6) дает

$$W(u_{\bar{h}, \bar{h}'}) \equiv 0 \pmod 2.$$

Лемма доказана.

b) M^n — неориентируемое псевдомногообразие, а накрытие L^n ориентируемо. Из результатов п. b) § 6 следует, что класс специальных гомологий цикла $u_{\bar{h}, \bar{f}}$ определяется четным числом

$$W(u_{\bar{h}, \bar{f}}) = \sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{\bar{h}, \bar{f}'}(T_i^n) - \sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{\bar{h}, \bar{f}}(T_i'^n) = 2 \sum_{i=1}^{\alpha^n} u_{\bar{h}, \bar{f}}(T_i^n). \tag{10}$$

Принимая во внимание геометрическое значение числа $u_{\bar{h}, \bar{f}}$, а также то обстоятельство, что симплексы T_i^n, $-T_i'^n$ являются симплексами когерентной ориентации псевдомногообразия L^n, мы заключаем, на основании (10), что $W(u_{\bar{h}, \bar{f}})$ есть разность степеней отображений $\bar{f}$ и $\bar{h} : L^n \to \Sigma^n$, т. е.

$$W(u_{\bar{h}, \bar{f}}) = A(\bar{f}) - A(\bar{h}). \tag{11}$$

Так как $\bar{h}'$ есть произведение отображения $\bar{h}$ на отражение сферы Σ^n в своей экваториальной плоскости, то $A(\bar{h}') = -A(\bar{h})$. Применяя теорему 5 и пользуясь соотношением (11), мы видим, что f и g гомотопны в том и только в том случае, когда выполняется по крайней мере одно из двух соотношений:

$$A(\bar{g}) - A(\bar{h}) = A(\bar{f}) - A(\bar{h})$$

и (12)

$$A(\bar{g}) - A(\bar{h}) = -A(\bar{f}) + A(\bar{h}) + A(\bar{h}') - A(\bar{h});$$

эти соотношения равносильны соответственно соотношениям

$$A(\bar{g}) = A(\bar{f})$$

и

$$A(\bar{g}) = -A(\bar{f}).$$

Таким образом, гомотопический класс отображения M^n в P^n определяется в этом случае абсолютной величиной степени накрывающего отображения накрытия L^n в Σ^n.

Из соотношений (10) и (11) следует, что степени накрывающих отображений сравнимы друг с другом по модулю 2. Легко видеть, что совокупность всех степеней накрывающих отображений совпадает либо со множеством всех четных чисел, либо со множеством всех нечетных чисел. Примеры показывают, что обе возможности реализуются. Так,

например, если M^n есть проективное пространство, то существует специальное отображение накрытия L^n в сферу Σ^n, имеющую степень 1 (тождественное), и, следовательно, в этом случае степень специального отображения может быть только нечетным числом и притом любым. В § 7 будут приведены примеры специальных отображений накрытия L^n в сферу Σ^n, имеющих четную степень.

c) M^n неориентируемое, L^n неориентируемое. По теореме 6, в этом случае группа Γ состоит из двух элементов, поэтому все специальные циклы, специально не гомологичные нулю, специально-гомологичны друг другу. Применяя теорему 5, мы сразу видим, что число классов отображений в этом случае не может превышать двух. Пусть h — произвольное фиксированное отображение. Полагая в условиях теоремы 5, что g совпадает с h, мы видим, что f гомотопно h в том и только в том случае, когда выполняется по крайней мере одно из соотношений:

$$u_{\bar h, \bar f} \overset{\text{сп}}{\sim} 0, \tag{13}$$

$$u_{\bar h, f} \overset{\text{сп}}{\sim} u_{\bar h, h'}. \tag{14}$$

Если $u_{\bar h, h'} \overset{\text{сп}}{\sim} 0$, а f — отображение, не удовлетворяющее соотношению (13) (такое f всегда существует), то оно не удовлетворяет и соотношению (14) и, следовательно, в этом случае f не гомотопно h и существуют два класса отображений. Если же цикл $u_{\bar h, h'}$ специально не гомологичен 0, то одно из соотношений (13), (14) выполняется всегда, и, следовательно, f гомотопно g. В этом случае существует один класс отображений. В § 7 приведены примеры, показывающие, что даже для одного и того же псевдомногообразия M^n цикл $u_{h, h'}$ может быть специально-гомологичным 0 для накрывающих L^n, соответствующих одним подгруппам Φ_0, и не быть специально-гомологичным 0 для накрывающих, соответствующих другим подгруппам.

Собирая вместе полученные результаты, мы приходим к следующему предложению.

ТЕОРЕМА 7*. 1) *n нечетное. Два отображения ориентируемого псевдомногообразия M^n в проективное пространство P^n гомотопны в том и только в том случае, когда степени отображений равны. При этом совокупность степеней всех отображений представляет собой либо совокупность всех четных чисел, либо совокупность всех нечетных чисел.*

Если M^n неориентируемо, то существуют два класса отображений M^n в P^n.

2) *n четное. Если M^n ориентируемо, то существуют два класса отображений. Если M^n и L^n оба неориентируемы, то число классов отображений равно либо 1, либо 2. Если же M^n неориентируемо, а L^n ориен-*

---

* Предполагается, конечно, что все отображения, рассматриваемые в теореме 7, связаны с подгруппой Φ_0.

тируемо, то два отображения M^n в P^n гомотопны в том и только в том случае, когда степени накрывающих отображений равны по абсолютной величине. При этом совокупность степеней всех отображений представляет собой либо совокупность всех четных чисел, либо совокупность всех нечетных чисел *.

Из теоремы 7 получается, как частный случай, теорема Борсука об отображениях сферы [(2), теорема 1].

§ 7. Отображения замкнутых поверхностей

В качестве приложения мы рассмотрим здесь вопрос о классификации отображений замкнутых поверхностей в проективную плоскость, изучавшийся другими методами в работе Хсян-Лин Ши (11).

А. Пусть M^2 — замкнутая поверхность, Φ — ее фундаментальная группа, P^2 — проективная плоскость. В силу теоремы 3, для решения задачи о классификации отображений поверхности M^2 в P^2 необходимо прежде всего найти все подгруппы индекса 2 группы Φ. Это нетрудно сделать, пользуясь замечанием, сделанным в конце § 3, в силу которого число подгрупп фундаментальной группы индекса 2 любого комплекса K^n равно числу ненулевых элементов группы одномерных гомологий по модулю 2 этого комплекса. Если M^2 есть замкнутая неориентируемая поверхность рода p (сфера с p пленками Мебиуса, $p \geqslant 1$), то ее можно задать при помощи канонического многоугольника V типа

$$c_1 c_1' c_2 c_2' \dots c_p c_p'$$

[см. (6), глава 6. c_i, c_i' представляют собой граничные ребра многоугольника V, ориентированные в соответствии с выбранным направлением обхода контура многоугольника. Поверхность M^2 получается отождествлением ребер c_i и c_i']. Фундаментальная группа такой поверхности есть группа с p образующими $C_1, C_2, \dots, C_p$ (соответствующими парам сторон многоугольника), связанными одним соотношением:

$$C_1^2 C_2^2 \dots C_p^2 = 1. \tag{1}$$

Одномерное число Бетти по модулю 2 такой поверхности равно, как известно, p. Следовательно, ее одномерная группа ∇-гомологий по модулю 2, совпадающая с группой Δ-гомологий по модулю 2, содержит 2^p элементов, и число подгрупп индекса 2 фундаментальной группы Φ равно $2^p - 1$. Зная их число, нетрудно все эти подгруппы найти. Пусть $i_1, i_2, \dots, i_l$ — l различных чисел из совокупности $1, 2, \dots, p$ $(1 \leqslant l \leqslant p$; порядок, в котором берутся эти l чисел, нас не интересует). Рассмотрим совокупность $\Phi_0(i_1, i_2, \dots, i_l)$ всех элементов группы Φ, записываемых в виде слов, составленных из образующих $C_1, C_2, \dots, C_p$, в которых сумма

* Для одного и того же многообразия степень накрывающего отображения может быть как четной, так и нечетной, в зависимости от подгруппы Φ_0 (см. теорему 8).

показателей при образующих $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_l}$ есть четное число. Нетрудно видеть, что $\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ представляет собой подгруппу индекса 2 группы Φ. При фиксированном l число таких подгрупп равно C_p^l, следовательно, общее их число $= \sum_{l=1}^{p} C_p^l = 2^l - 1$. Очевидно, все эти подгруппы различны и, таким образом, представляют собой все подгруппы индекса 2.

В случае, когда M^2 есть ориентируемая поверхность рода p (сфера с p ручками, $p \geqslant 0$), все подгруппы индекса 2 фундаментальной группы могут быть найдены аналогично. Однако в этом случае сами подгруппы нас не интересуют, число же их равно, очевидно, $2^{2p} - 1$.

Б. Определим теперь все двулистные накрытия L^2 неориентируемой поверхности рода p. Рассмотрим два многоугольника V_1 с границей $a_1 a_1' a_2 a_2' \ldots a_p a_p'$ и V_2 с границей $b_1 b_1' b_2 b_2' \ldots b_p b_p'$, конгруэнтных многоугольнику V (при этом мы считаем, что при естественном отображении, определяемом конгруэнтностью, ребра a_i и b_i соответствуют ребру c_i, а ребра a_i' и b_i' — ребру c_i'). Произведем следующие отождествления: отождествим a_j с a_j' и b_j с b_j' для всех j, не равных ни одному из чисел $i_1, i_2, \ldots, i_l$. Ребро a_{i_s} отождествим с b_{i_s}', а ребро a_{i_s}' отождествим с b_{i_s} $(s = 1, 2, \ldots, l)$. В результате такого отождествления получается полиэдр L^2. Естественные отображения многоугольников V_1 и V_2 на многоугольник V индуцируют отображение ψ полиэдра L^2 на M^2. Нетрудно убедиться, что прообраз каждой точки поверхности M^2 при отображении ψ состоит из двух точек и что отображение ψ является локально-гомеоморфным. Поэтому L^2 представляет собой двулистное накрытие поверхности M^2. Если $l < p$, то L^2 есть неориентируемая поверхность рода $2p - 2$. Если же $l = p$, то L^2 есть ориентируемая поверхность рода $p - 1$.

Как известно, между двулистными накрытиями полиэдра и подгруппами индекса 2 его фундаментальной группы существует естественное взаимно однозначное соответствие. Покажем, что построенному нами накрытию L^2 соответствует при этом подгруппа $\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$, определенная в А. Примем за начало путей поверхности M^2 точку O, получающуюся отождествлением всех вершин канонического многоугольника V^2. Точке O соответствуют на поверхности L^2 две точки O_1 и O_2, причем мы будем считать, что O_1 есть точка, получающаяся в результате отождествления тех вершин многоугольника V_1, по которым примыкают друг к другу пары его сторон a_{i_s} и a_{i_s}' $(s = 1, 2, \ldots, l)$, и тех вершин многоугольника V_2, по которым не примыкают друг к другу пары b_{i_s} и b_{i_s}' $(s = 1, 2, \ldots, l)$. Примем O_1 за начало путей на поверхности L^2. Для того чтобы определить, какой подгруппе соответствует накрытие L^2, нужно найти, в какие пути поверхности M^2 отображаются все замкнутые пути поверхности L^2, выходящие из точки O_1. При этом можно ограничиться лишь рассмотрением замкнутых путей, составленных из ребер a_t, a_t', b_t, b_t'. Но всякий путь, выходящий из точки O_1 и составленный из ребер, является замкнутым в том и только в том случае, когда он содержит четное число ребер a_{i_s} (совпадающих с b_{i_s}') и a_{i_s}' (совпадающих с b_{i_s}), так как каждое такое ребро имеет своими концами обе точки O_1 и O_2, в то время как оба конца каждого из остальных ребер совпа-

дают. Следовательно, ψ отображает все замкнутые реберные пути накрытия L^2, выходящие из точки O_1 в такие пути поверхности M^2, выходящие из точки O и составленные из ребер c_j (совпадающих с c'_j), которые содержат четное число ребер $c_{i_s} = c'_{i_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, l)$. Но все такие пути определяют подгруппу $\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ группы Φ. Следовательно, построенное нами накрытие L^2 соответствует именно данной группе.

B. Переходим теперь к вопросу о классификации отображений замкнутых поверхностей в проективную плоскость. Случай отображений, удовлетворяющих условию стягиваемости, исчерпывается теоремой 2. Случай, когда M^2 есть ориентируемая поверхность, исчерпывается теоремами 3 и 7 и результатом, сформулированным в последнем абзаце п. А настоящего параграфа. Поэтому мы рассмотрим здесь не удовлетворяющие условию стягиваемости отображения неориентируемых поверхностей M^2.

Произведем триангуляцию канонического многоугольника V, задающего поверхность M^2, так, чтобы после отождествления надлежащих его сторон получился комплекс. Треугольникам полученной триангуляции придадим когерентную ориентацию. На многоугольники V_1 и V_2 перенесем триангуляцию и ориентацию с V. Если теперь в многоугольнике V_1 отождествлять все пары ребер a_j и a'_j, для которых $j \neq i_s$ $(s = 1, 2, \ldots, l)$, а также соответствующие вершины его, то мы получим кусок $\mathfrak{A}$ поверхности L^2 (см. § 5, доказательство теоремы 6). Аналогично, многоугольник V_2 даст нам кусок $\mathfrak{B}$.

1) $l = p$. L^2 в этом случае есть ориентируемая поверхность. В силу теоремы 7, гомотопический класс отображения определяется абсолютной величиной степени накрывающего отображения, причем совокупность всех степеней отображения состоит либо из всех четных чисел, либо из всех нечетных. Выясним, что именно имеет место в рассматриваемом случае. Пусть двумерные симплексы куска $\mathfrak{A}$ суть T_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, \alpha^2)$, двумерные симплексы куска $\mathfrak{B}$ суть $T_i'^2$, а $\bar{h}$ — специальное отображение накрытия L^2 в сферу Σ^2. Тогда надо рассмотреть (см. § 6) степень отображения $\bar{h}$ цикла

$$A - B = \sum_{i=1}^{\alpha^2} T_i^2 - \sum_{i=1}^{\alpha^2} T_i'^2$$

в сферу Σ^2. Предполагая, что границы всех двумерных симплексов отображаются посредством $\bar{h}$ в экватор Σ^1 сферы Σ^2, положим, что

$$A_{\bar{h}}^{+}(T_i^2) = \gamma'_i, \quad A_{\bar{h}}^{-}(T_i^2) = \gamma''_i,$$

$\gamma'_i - \gamma''_i = \delta_i$ есть степень отображения границы ΔT_i^2 в Σ^1. Легко видеть, что

$$A_{\bar{h}}^{+}(T_i'^2) = -\gamma''_i, \quad A_{\bar{h}}^{-}(T_i'^2) = -\gamma'_i.$$

Поэтому степень отображения $\bar{h}$ цикла $A - B$ в сферу Σ^2

$$A(\bar{h}) = \sum_{i=1}^{\alpha^2} (\gamma'_i + \gamma''_i) = \sum_{i=1}^{\alpha^2} (\gamma'_i - \gamma''_i) + 2\sum_{i=1}^{\alpha^2} \gamma''_i \equiv \sum_{i=1}^{\alpha^2} \delta_i \pmod 2.$$

Остается подсчитать $\sum_{i=1}^{\alpha^2} \delta_i$. Эта величина равна степени отображения $\overline{h}$ границы цепи A в окружность Σ^1. Так как вершины многоугольника V^1 надлежащим образом отождествлены, то граница цепи A представляет собою p окружностей $\overline{\Sigma}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, каждая из которых состоит из двух полуокружностей a_i и a'_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$. $\overline{h}$ является специальным отображением, поэтому оно переводит диаметрально противоположные точки окружности $\overline{\Sigma}_i^1$ в диаметрально противоположные точки окружности Σ^1. Но тогда степень отображения $\overline{h}$ каждой из окружностей $\overline{\Sigma}_i^1$ есть нечетное число — это может быть доказано непосредственно при помощи угловой функции [см. ([10]), стр. 184], а также следует из замечания, сделанного в конце п. а) части 1) § 6. Таким образом, четность числа $A(\overline{h})$ совпадает с четностью числа p.

2) $l < p$. Пусть $\overline{h}$ — специальное отображение комплекса L^2 в сферу Σ^2. Необходимо выяснить, в каком случае цикл $u_{\overline{h}, \overline{h}'}$ специально-гомологичен нулю и в каком случае нет [см. § 6, раздел 2), с)]. Для этого достаточно определить четность числа

$$W = \sum_{j=1}^{\alpha^2} u_{\overline{h}, \overline{h}'}(T_j^2)$$

(см. начало § 4 и § 5, п. с) доказательства теоремы 6).

Полагая, как и в п. 1), что

$$A_{\overline{h}}^{+}(T_i^2) = \gamma_i', \quad A_{\overline{h}}^{-}(T_i^2) = \gamma_i'',$$

легко убедиться, что

$$u_{\overline{h}, \overline{h}'}(T_i^2) = -\gamma_i'' - \gamma_i' = \gamma_i' - \gamma_i'' - 2\gamma_i'' = \delta_i - 2\gamma_i''.$$

Поэтому

$$W \equiv \sum_{i=1}^{\alpha^2} \delta_i \pmod 2.$$

Последняя сумма представляет собой степень отображения $\overline{h}$ границы ΔA цепи A в окружность Σ^1. Эта граница состоит из окружностей, получающихся из ребер a_j и a'_j $(j \neq i_s)$, и из окружностей, получающихся из пар ребер a_{i_s}, a'_{i_s} $(s = 1, 2, \ldots, l)$. Первых окружностей четное число (так как ребрам a_j и a'_j соответствует одна и та же окружность, входящая в ΔA дважды с одинаковой ориентацией). К остальным же окружностям применимы рассуждения п. 2) и степень отображения каждой из них нечетна. Поэтому четность числа W совпадает с четностью числа l, и цикл $u_{\overline{h}, \overline{h}'}$ специально-гомологичен нулю в том и только в том случае, когда l четно. Но тогда из § 6, 2), с) вытекает, что при l четном существуют два класса отображений, а при l нечетном — один.

Собирая вместе все результаты, относящиеся к отображениям замкнутых поверхностей в проективную плоскость, мы получаем следующую

теорему, дающую исчерпывающую гомотопическую классификацию этих отображений.

ТЕОРЕМА 8. 1) *Пусть M^2 — ориентируемая поверхность рода p ($p \geqslant 0$).*

a) *Существует счетное множество гомотопических классов отображений M^2 в P^2, удовлетворяющих условию стягиваемости. Каждый такой класс однозначно определяется абсолютной величиной степени накрывающего отображения, причем совокупность всех этих степеней совпадает с совокупностью всех целых чисел.*

b) *Существуют два класса отображений, соответствующих подгруппе Φ_0 индекса 2 фундаментальной группы Φ. Так как таких подгрупп имеется $2^{2p}-1$, то общее число классов отображений, не удовлетворяющих условию стягиваемости, равно $2^{2p+1}-2$.*

2) *Пусть M^2 — неориентируемая поверхность рода p ($p \geqslant 1$).*

a) *Существуют два класса отображений, удовлетворяющих условию стягиваемости.*

b) *Если $\Phi_0 = \Phi_0(1, 2, \ldots, p)$, т. е. накрывающая L^2 ориентируема, то существует счетное множество классов отображений, соответствующих подгруппе Φ_0. Каждый такой класс однозначно определяется абсолютной величиной степени накрывающего отображения. При этом совокупность всех степеней накрывающих отображений совпадает с совокупностью четных чисел при p четном и с совокупностью нечетных чисел при p нечетном.*

c) *Если $\Phi_0 = \Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ и $l < p$, т. е. накрывающая L^2 неориентируема, то при l нечетном существует один класс отображений, соответствующих подгруппе Φ_0, а при n четном — два класса. Общее число всех таких классов равно поэтому*

$$C_p^1 + 2C_p^2 + C_p^3 + 2C_p^4 + \ldots + \frac{3+(-1)^{n-1}}{2} C_p^{p-1},$$

т. е. равно $3(2^{p-1}-1)$ при p нечетном и $3(2^{p-1}-1)-1$ при p четном.

Поступило
16. IV. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Классификация отображений $(n+1)$-мерной сферы в полиэдр K_n, фундаментальная группа которого и группы Бетти размерностей 2, 3, ..., $n-1$ тривиальны, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 14 (1950), 7—44.

[2] Borsuk K., Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre, Fund. Math., 20 (1933), 177—190.

[3] Гордон И. И., Классификация отображений комплекса в проективное пространство, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXV, № 4 (1949), 441—444.

[4] Гордон И. И., Классификация отображений замкнутых поверхностей в проективную плоскость, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXXVIII, № 4 (1951), 625—627.

[5] Постников М. М., Классификация непрерывных отображений произвольного n-мерного полиэдра в связное топологическое пространство, асферичное в раз-

мерностях, бо́льших единицы и меньших n, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXVII, № 3 (1949), 427—430.
[6] Зейферт Г. и Трельфалл В., Топология, М.—Л., ГОНТИ, 1938.
[7] Hopf H., Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre, Comm. Math. Helv., 5 (1933), 39—54.
[8] Whitney H., The maps of an n-complex into an n-sphere, Duke Math. J., 3 (1937), 51—55.
[9] Alexandroff P. und Hopf H., Topologie, Berlin, 1935.
[10] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947.
[11] Hsiang-Lin Shin, Mappings of 2-manifolds into a space, Duke Math. J., 10 (1943), 179—207.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 147—156

Ф. Д. ГАХОВ

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМ n ПАР ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

Рассматриваются случаи, когда элементы матрицы коэффициентов краевой задачи могут обращаться в бесконечность или определитель ее обращается в нуль. Как общая тенденция устанавливается, что наличие полюсов элементов матрицы уменьшает число линейно независимых решений или увеличивает число условий разрешимости задачи, а наличие нулей определителя не изменяет этих величин. В простейших случаях изменение числа линейно независимых решений устанавливается точно.

§ 1. Пусть L — контур, состоящий из некоторого числа простых замкнутых гладких кривых, ограничивающих связную область D^+ и дополнительную к ней область D^-, содержащую бесконечно удаленную точку. Требуется определить векторы

$$\varphi^+(z) = \{\varphi_1^+(z), \ldots, \varphi_n^+(z)\}; \qquad \varphi(z) = \{\varphi_1^-(z), \ldots, \varphi_n^-(z)\},$$

голоморфные соответственно в областях D^+, D^- и удовлетворяющие на контуре n линейным соотношениям, которые можно записать в виде одного векторного уравнения:

$$\varphi^+(t) = C(t)\,\varphi^-(t) + b(t), \tag{1}$$

где $C(t)$ — матрица, элементы которой — заданные функции точек контура, а $b(t)$ — заданный на контуре вектор.

В общей теории предполагается, что элементы $C(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, причем определитель матрицы $C(t)$ нигде не обращается в нуль. В настоящей работе рассмотрены исключительные случаи, когда определитель $C(t)$ может иметь нули в некотором конечном числе точек $t_1, \ldots, t_m$ контура и элементы $C(t)$ могут обращаться в бесконечность целого порядка в конечном числе точек $t_1', \ldots, t_p'$.

Основная цель настоящего исследования заключается в решении вопроса, как меняется число линейно независимых решений и число условий разрешимости от наличия нулей определителя и полюсов * элементов. В моей работе ([1]) дано полное решение этого вопроса для $n = 1$. В этом случае получается вполне определенный результат, именно, наличие нулей коэффициента $C(t)$ не меняет числа линейно независимых решений, а наличие полюсов уменьшает это число на порядок полюса. В рас-

* Здесь мы для краткости условно называем полюсом функции (неаналитической) точку, где функция обращается в бесконечность целого порядка.

сматриваемой здесь краевой задаче для системы n пар функций дело обстоит сложнее, и окончательный результат в общем случае не может быть выражен в такой простой и отчетливой форме. Но тенденция числа решений не изменяться от наличия нулей определителя и уменьшаться от наличия полюсов остается и здесь.

Способ исследования заключается в разложении матрицы коэффициентов на произведение двух матриц, из которых одна имеет нормальный вид, рассматриваемый в общей теории, т. е. элементы ее конечны и определитель не обращается в нуль, а другая составлена из рациональных функций и, следовательно, аналитически продолжима в области D^+ и D^-. Основная трудность заключается в определении того, каким множителем (левым или правым) выделить соответствующую матрицу; как показывает исследование, в различных случаях это приходится делать по-разному. Следует отметить, что трудности эти не принципиального характера, и в конечном счете во всех случаях задачу можно было бы решать единообразно, но при неудачном выборе матричных множителей произвольные постоянные, входящие в решения, могут оказаться зависимыми, что затрудняет в дальнейшем подсчет числа независимых условий, которым они удовлетворяют. Для каждого случая имеется один простейший путь получения решения, который и приводится.

Разложение матрицы в произведение достигается при помощи линейных преобразований, аналогичных тем, которые производятся для приведения базиса алгебраического поля к нормальной форме. Способ этот довольно подробно изложен в моих работах (2), (3), поэтому здесь я ограничусь только определением основных понятий и формулировкой нужных результатов.

Мы говорим, что функция $C_{ik}(t)$ имеет в точке t_0 порядок α, если отношение $\frac{C_{ik}(t)}{(t-t_0)^{\alpha}}$ в точке t_0 конечно и не обращается в нуль. Очевидно, нулю соответствует положительный порядок, полюсу — отрицательный. Порядком α_j столбца (строки) матрицы будем называть наинизший порядок элементов столбца (строки). В этом случае бином $(t-t_0)^{\alpha_j}$ называется делителем столбца (строки). Порядок функции и столбца (строки) в бесконечно удаленной точке мы получим из предыдущего, если заменим в наших определениях бином $(t-t_0)$ на $\frac{1}{t}$ *.

Говорят, что матрица в точке t_0 имеет нормальную форму по столбцам (строкам), если сумма порядков столбцов (строк) матрицы в этой точке равна порядку ее определителя.

Имеет место

ТЕОРЕМА. *Матрицу можно привести к нормальной форме по столбцам (строкам) при помощи элементарных преобразований ее столбцов (строк).*

Этой теореме можно придать еще следующую эквивалентную формулировку:

---

* Порядок на бесконечности в нашем определении обратен по знаку порядку, принятому в работах Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа.

Матрицу можно привести к нормальной форме по столбцам (строкам) умножением справа (слева) на матрицу с постоянным определителем, элементы которой суть полиномы, если элементы данной матрицы имеют положительный порядок, и рациональные функции, если среди элементов данной матрицы есть имеющие отрицательный порядок.

Формулируем еще некоторые, нужные нам в дальнейшем, понятия из общей теории краевой задачи Римана.

Канонической матрицей решений краевой задачи (1) называется матрица из n решений однородной задачи ($b(t) \equiv 0$), голоморфных в конечной части плоскости и имеющих конечный порядок на бесконечности, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) определитель ее не имеет нулей нигде в конечной части плоскости;

2) матрица имеет нормальную форму в бесконечно удаленной точке.

Имеет место

ТЕОРЕМА. *Для всякой однородной краевой задачи в случае, если элементы матрицы $C(t)$ ограничены и определитель не обращается в нуль, можно построить каноническую матрицу решений.*

Порядки $\varkappa_j$ решений (столбцов канонической матрицы) на бесконечности называются частными индексами задачи. Сумма $\varkappa$ частных индексов, $\varkappa = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j$, равная индексу определителя канонической матрицы, называется суммарным индексом задачи.

Если обозначить сумму положительных частных индексов через λ, а сумму отрицательных — через μ ($\varkappa = \lambda - \mu$), то λ будет равно числу произвольных постоянных, входящих в решение однородной и неоднородной задач, а μ будет равно числу условий разрешимости неоднородной задачи. Последнее вытекает из условия голоморфности решения в бесконечности. Входящие в решение произвольные постоянные не могут быть использованы для удовлетворения условий разрешимости, последним должен удовлетворять свободный член $b(t)$ для того, чтобы решение существовало.

Перейдем теперь к решению поставленной задачи.

§ 2. Рассмотрим сначала простейший случай, когда элементы матрицы $C(t)$ ограничены, а определитель обращается в нуль в точках $t_1, t_2, \ldots, t_m$ порядков $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (α_k — целые числа > 0).

Однородная задача: $\varphi^+(t) = C(t)\varphi^-(t)$

Пусть t_k — какой-нибудь нуль определителя $C(t)$. Будем предполагать, что элементы матрицы дифференцируемы в этой точке столько раз, сколько необходимо для того, чтобы обеспечить разложение элементов матрицы по формуле Тейлора. Приведем матрицу $C(t)$ в точке t_k к нормальной форме по строкам, и пусть T_k — полиномная матрица с постоянным определителем, умножение на которую слева равносильно приведению матрицы $C(t)$ к нормальной форме. Если $\alpha_k^{(j)}$ — порядки строк матрицы $C(t)$ после приведения ее к нормальной форме $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_k^{(j)} = \alpha_k\right)$, то

будем иметь

$$C(t) = T_k^{-1} T_k C(t) = T_k^{-1} \left\| (t - t_k)^{\alpha_k^{(j)}} \right\| \cdot C'(t),$$

где $C'(t)$ — матрица, определитель которой не обращается в нуль в точке t_k. Поступая так же со всеми остальными нулями определителя, мы приведем краевое условие к виду

$$\varphi^+(t) = Q(t) C_1(t) \varphi^-(t),$$

где $Q(t)$ — полиномная матрица, нули определителя которой совпадают с нулями определителя $C(t)$, а $C_1(t)$ — матрица с определителем, не обращающимся в нуль.

Пусть $X_1(z)$ — каноническая матрица краевой задачи:

$$\varphi_1^+(t) = C_1(t) \varphi_1^-(t),$$

так что имеем

$$C_1(t) = X_1^+(t) \cdot [X_1^-(t)]^{-1}.$$

Краевое условие задачи можно представить в виде:

$$[X_1^+(t)]^{-1} \cdot Q^{-1}(t) \varphi^+(t) = [X_1^{-1}(t)]^{-1} \cdot \varphi^-(t).$$

Последнее краевое условие можно рассматривать как условие аналитической продолжимости функции через контур на всю плоскость. Левая часть может иметь полюсы в точках $t_1, \ldots, t_m$ контура, но так как правая часть в этих точках ограничена, то отсюда следует, что в точках $t_1, \ldots, t_m$ будут устранимые особенности; следовательно, единственной возможной особенностью аналитической во всей плоскости функции будут полюсы в бесконечно удаленной точке. Таким образом, по обобщенной теоремы Лиувилля,

$$\varphi^+(z) = Q(z) X_1^+(z) P(z); \qquad \varphi^-(z) = X_1^-(z) P(z),$$

где $P(z)$ — вектор из многочленов с произвольными коэффициентами. Так как степень полиномного вектора зависит лишь от порядков решений канонической матрицы $X_1(z)$ на бесконечности, то отсюда следует основной результат:

Число линейно независимых решений однородной краевой задачи не зависит от наличия нулей определителя матрицы коэффициентов $C(t)$ и будет таким же, как и в случае отсутствия нулей ($Q(t) \equiv 1$).

Заметим, что можно было бы решить задачу и путем приведения к нормальному виду по столбцам и выделения правого матричного множителя $C(t) = C_1(t) \cdot R(t)$. Тогда мы получили бы краевое условие в виде

$$[X_1^+(t)]^{-1} \varphi^+(t) = [X^{-1}(t)] \cdot R(t) \varphi^-(t),$$

а решение выражалось бы формулами

$$\varphi^+(z) = X_1^+(z) P(z); \qquad \varphi^-(z) = X_1^-(z) R^{-1}(z) P(z).$$

Здесь степени $P(z)$ зависят и от порядков матрицы $R(z)$ на бесконечности, а функция $\varphi^-(z)$ имеет полюсы в точках $t_1, \ldots, t_m$ контура. Подбирая коэффициенты многочленов так, чтобы эти полюсы устранились, мы определили бы часть произвольных коэффициентов и в конце концов пришли бы к тому же результату, но более сложным путем.

Неоднородная задача: $\varphi^+(t) = C(t)\varphi^-(t) + b(t)$.

В данном случае перебрасывать матрицу $Q(t)$, устраняющую нули определителя, в левую сторону нельзя, так как вектор $b(t)$ будет умножаться на матрицу $Q^{-1}(t)$ и станет после этого умножения иметь в точках $t_1, \ldots, t_m$ особенности неинтегрируемого порядка.

Будем приводить матрицу $C(t)$ к нормальному виду в точках $t_1, \ldots, t_m$ по столбцам. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что матрицу $C(t)$ можно представить в виде произведения

$$C(t) = C_1(t) \cdot Q(t),$$

где $C_1(t)$ — матрица, определитель которой не обращается в нуль, а $Q(t)$ — полиномная матрица, нули определителя которой совпадают с нулями определителя $C(t)$.

Вводя, аналогично предыдущему, $X_1(z)$ — каноническую матрицу краевой задачи $\varphi_1^+(t) = C_1(t)\varphi_1^-(t)$, мы представим краевое условие в виде

$$[X_1^+(t)]^{-1}\varphi^+(t) = [X_1^-(t)]^{-1} \cdot Q(t)\varphi^-(t) + [X_1^+(t)]^{-1} \cdot b(t).$$

Вводя кусочно-голоморфный вектор

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{[X_1^+(\tau)]^{-1} \cdot b(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

и пользуясь формулами Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши, мы получим краевое условие в форме:

$$[X_1^+(t)]^{-1}\varphi^+(t) - \Phi^+(t) = [X_1^-(t)]^{-1} \cdot Q(t)\varphi^-(t) - \Phi^-(t).$$

На основании теоремы об аналитическом продолжении и обобщенной теоремы Лиувилля, найдем решение задачи:

$$\varphi^+(z) = X_1^+(z)[P(z) + \Phi^+(z)],$$
$$\varphi^-(z) = Q^{-1}(z)X_1^-(z)[P(z) + \Phi^-(z)],$$

где $P(z)$, как и ранее, — полиномный вектор.

В последних формулах $\varphi^-(z)$ может обращаться в бесконечность в точках $t_1, \ldots, t_m$. Для того чтобы решение оставалось конечным на контуре, нужно потребовать, чтобы выражение

$$X_1^-(z)[P(z) + \Phi^-(z)]$$

имело нули соответствующего порядка в точках $t_1, \ldots, t_m$ контура. Это дает новые условия разрешимости задачи. Части из них можно удовлетворить путем подбора произвольных коэффициентов полиномного вектора $P(z)$, часть останется в качестве дополнительных условий, которым должен удовлетворять свободный член краевого условия для того, чтобы задача имела решение. Их нужно будет присоединять к условиям разрешимости, возникающим при наличии отрицательных частных индексов краевой задачи

$$\varphi_1^+ = C_1(t)\varphi^-(t),$$

как условие конечности решения в бесконечно удаленной точке.

При помощи рассуждений, совпадающих с рассуждениями, данными в моей работе ([3]) (стр. 556), можно показать, что число независимых условий,

вытекающих из конечности решений на контуре, в точности равно сумме порядков всех нулей определителя матрицы $C(t)$ на контуре.

Повторяя дальнейшие рассуждения той же работы ([3]), получим окончательный вывод:

Наличие нулей определителя матрицы коэффициентов на контуре не влияет на число линейно независимых решений и на число условий разрешимости задачи. Число произвольных постоянных, а также число условий разрешимости задачи, такие же как и в случае отсутствия нулей.

Условия разрешимости, вообще говоря, меняют свой вид. В частности, для их выполнимости недостаточно, чтобы коэффициенты просто удовлетворяли условию Гельдера; нужно потребовать, чтобы в точках нулей определителя коэффициенты имели производные соответствующего порядка.

§ 3. Рассмотрим теперь самый общий случай, когда элементы матрицы $C(t)$ могут обращаться в бесконечность и определитель ее может обращаться в нуль.

Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — точки, где некоторые элементы $C(t)$ обращаются в бесконечность целого порядка, и $t_1', \ldots, t_p'$ — точки, где определитель $C(t)$ обращается в нуль. Некоторые из точек t_k' могут совпадать с точками t_i.

Однородная задача: $\varphi^+(t) = C(t)\varphi^-(t)$.

Пусть t_1 — точка, где элементы имеют полюсы. Приведем матрицу $C(t)$ в этой точке к нормальной форме по столбцам путем умножения справа на матрицу L с постоянным определителем, элементы которой — полиномы относительно $\frac{1}{t-t_1}$:

$$C(t) = C(t)\cdot L\cdot L^{-1} = C'(t)\cdot L^{-1}.$$

Порядки столбцов матрицы $C'(t)$ в точке t_i могут быть отрицательными, нулевыми или положительными. Вынесем из $C'(t)$ диагональную матрицу слева, составленную из отрицательных или нулевых степеней бинома $(t-t_i)$ так, чтобы столбцы матрицы $C'(t)$, имеющие положительный или нулевой порядок, остались без изменения, а столбцы, имеющие отрицательный порядок, стали бы иметь нулевой. Будем иметь

$$C(t) = C''(t)\cdot R_1(t),$$

где $C''(t)$ — матрица, элементы которой конечны в точке t_i, $R_1(t)$ — матрица, элементы которой — полиномы $\frac{1}{t-t_i}$, а определитель равен const. $(t-t_i)^{-\alpha_i}$, где α_i — целое положительное число.

Проделав подобные преобразования для всех точек t_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, получим, что матрицу $C(t)$ можно представить в виде произведения

$$C(t) = C'''(t)\cdot R(t),$$

где $C'''(t)$ — матрица со всюду ограниченными элементами, а $R(t)$ — матрица, элементы которой — рациональные функции.

Пусть $t_1', \ldots, t_q'$ $(q \geqslant p)$ — точки, где определитель матрицы $C'''(t)$ обращается в нуль. Эти точки включают в себя p точек, где обращается в

нуль определитель матрицы $C(t)$, а также, может быть, некоторые из точек t_i, где элементы обращаются в бесконечность.

Рассуждая как в § 2, получим представление матрицы $C'''(t)$ в виде произведения:

$$C'''(t) = Q(t) \cdot C_1(t),$$

где $Q(t)$ — матрица с полиномными элементами, а $C_1(t)$ — матрица со всюду конечными элементами и определителем, не обращающимся в нуль.

Краевое условие запишется в виде:

$$\varphi^+(t) = Q(t) C_1(t) \cdot R(t) \varphi^-(t).$$

Пусть $X_1(z)$ — каноническая матрица краевой задачи

$$\varphi_1^+(t) = C_1(t) \varphi_1^-(t);$$

тогда, заменяя $C_1(t)$ на $X_1^+(t) \cdot [X_1^-(t)]^{-1}$, придадим краевому условию вид

$$\varphi^+(t) = Q(t) X_1^+(t) [X_1^-(t)]^{-1} \cdot R(t) \varphi^-(t).$$

Приведем матрицу $[X_1^-(t)]^{-1} R(t)$ к нормальной форме по строкам в бесконечно удаленной точке, и пусть матрица $M(t)$ с полиномными элементами и постоянным определителем такова, что умножение на нее слева равносильно этому приведению. Тогда краевое условие можно записать в виде

$$M(t) [X_1^+(t)]^{-1} Q^{-1}(t) \varphi^+(t) = M(t) [X_1^-(t)]^{-1} R(t) \varphi^-(t).$$

Далее, мы, как всегда, получим решение, применяя обобщенную теорему Лиувилля. При этом с первого взгляда может показаться, что особенность (полюсы) могут дать и те точки t_k', где одновременно определитель $Q(t)$ обращается в нуль, а определитель $R(t)$ — в бесконечность. Но внимательное рассмотрение показывает, что по самому способу образования матрицы $R(t)$ матрицы $Q^{-1}(t)$ и $R(t)$ имеют отрицательные порядки в различных столбцах; поэтому, если написать последнее векторное уравнение в виде n простых уравнений, то в каждом из них одна сторона равенства будет ограниченной, а следовательно, эти точки будут также точками устранимой особенности, и решение будет представляться формулами:

$$\varphi^+(z) = Q(z) X_1^+(z) M^{-1}(z) P(z),$$

$$\varphi^-(z) = R^{-1}(z) X_1^-(z) M^{-1}(z) P(z).$$

Степень полинома $P(z)$, а следовательно, и число линейно независимых решений, как было показано ранее, не зависит от матрицы $Q(t)$, но зависит от порядков на бесконечности матрицы $R(t)$. Так как эти порядки неотрицательны, то, следовательно, частные индексы могут только уменьшаться, так же как и число линейно независимых решений.

Если обозначить суммарный индекс задачи $\varphi_1^+(t) = C_1(t) \varphi_1^-(t)$ через $\varkappa^*$,

а порядок на бесконечности определителя матрицы $R(t)$ (суммарный порядок полюсов) — через σ, то суммарный индекс данной задачи будет

$$\varkappa = \varkappa^* - \sigma.$$

Таким образом, суммарный индекс задачи уменьшается на суммарный порядок полюсов σ. Число линейно независимых решений уменьшается не обязательно на это число, но, может быть, и на меньшее. Если положительные порядки матрицы R повышают порядки столбцов матрицы $[X_1^+(t)]^{-1}$, которые (порядки) ранее были отрицательными, то это уменьшает число линейно независимых решений; если же они повышают порядки, которые и до того были положительными, то, так как соответствующий полином здесь берется равным тождественно нулю, число решений не изменяется.

Окончательный результат можно формулировать в следующем виде:

Если матрица коэффициентов $C(t)$ имеет полюсы и определитель может обращаться в нуль, то число линейно независимых решений однородной задачи не зависит от наличия нулей определителя и уменьшается от наличия полюсов на число, не большее, чем суммарный порядок полюсов матрицы $R(t)$.

Неоднородная задача: $\varphi^+(t) = C(t)\varphi^-(t) + b(t)$.

Здесь по тем же причинам, что и в § 2, нельзя матрицу $Q(t)$ перебрасывать в левую сторону. Пусть $t_1, \ldots, t_q$ — точки, где элементы $C(t)$ могут обращаться в бесконечность или определитель обращается в нуль, иначе говоря, такие точки, где матрица после приведения к нормальной форме имеет столбцы с ненулевыми порядками. Приводя матрицу $C(t)$ к нормальной форме по столбцам и вынося правыми множителями диагональные матрицы из степеней биномов $(t - t_i)$ так, чтобы оставшаяся матрица имела только нулевые порядки столбцов, приведем матрицу коэффициентов краевого условия к виду:

$$C(t) = C_1(t) \cdot R(t),$$

где $C_1(t)$ — матрица со всюду конечными элементами и определителем, не обращающимся в нуль, а $R(t)$ — матрица, элементы которой — рациональные функции.

Вводя $X_1(z)$ — каноническую матрицу краевой задачи $\varphi_1^+(t) = C_1(t)\varphi_1^-(t)$, кусочно-голоморфный вектор

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{[X^+(\tau)]^{-1} b(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

и матрицу M, приводящую матрицу $[X_1^-(t)]^{-1} R(t)$ к нормальной форме в бесконечно удаленной точке, и поступая аналогично тому, как в § 2, получим решение в виде:

$$\varphi^+(z) = X_1^+(z)\, M^{-1}(z)\, [P(z) + \Phi^+(z)],$$

$$\varphi^-(z) = R^{-1}(z)\, X^-(z)\, M^{-1}\, [P(z) + \Phi^-(z)].$$

Подсчитаем теперь число линейно независимых решений и число условий разрешимости задачи.

Пусть $\varkappa^*$ — суммарный индекс задачи $\varphi_1^+(t) = C_1(t)\varphi_1^-(z)$. Обозначим через δ сумму порядков тех столбцов матрицы $R(t)$, которые после приведения к нормальной форме имеют положительные порядки (нули определителя), а через σ — сумму абсолютных величин порядков тех столбцов, которые имеют отрицательный порядок. Тогда, очевидно, порядок определителя матрицы $R(z)$ в бесконечно удаленной точке будет равен $\sigma - \delta$ (наивысшая степень в разложении этого определителя по степеням $\frac{1}{z}$). Итак, суммарный индекс данной задачи будет равен

$$\varkappa = \varkappa^* + \delta - \sigma.$$

Пусть λ есть сумма положительных, а $-\mu$ — сумма отрицательных частных индексов данной задачи. Тогда

$$\varkappa = \varkappa^* + \delta - \sigma = \lambda - \mu.$$

Как известно из общей теории, λ есть число произвольных коэффициентов, входящих в полиномный вектор P, а μ — число условий разрешимости, вытекающих из конечности решения в бесконечно удаленной точке.

Далее, функция $\varphi^-(z)$ нашего решения обращается на контуре в бесконечность во всех точках контура, где $\det R(t) = 0$. Для конечности решения в этих точках на функцию

$$X^-(z)\, M^{-1}(z)\, [P(z) + \Phi^-(z)]$$

нужно наложить условия, среди которых число линейно назависимых будет равно δ, что можно доказать рассуждениями, аналогичными проведенным в ([3]) (стр. 556).

Таким образом, решение задачи содержит λ произвольных постоянных и должно удовлетворять $\mu + \delta$ условиям. Их разность

$$\lambda - (\mu + \delta) = \varkappa^* - \sigma.$$

Отсюда можно сделать вывод:

В случае, если порядки столбцов матрицы коэффициентов $C(t)$ после приведения последней к нормальной форме оказываются разных знаков (полюсы элементов и нули определителя), то разность числа линейно независимых решений и числа условий разрешимости неоднородной задачи не зависит от порядков тех столбцов, которые имеют положительный знак, и уменьшается на число, равное сумме абсолютных величин порядков, имеющих отрицательный знак.

Итак, как общий результат всего исследования, можно указать, что во всех случаях сохраняется общая тенденция числа решений не изменяться от наличия нулей определителя матрицы коэффициентов и уменьшаться от наличия полюсов. Точная количественная характеристика этой тенденции, как показывает исследование, не всегда может быть выражена простым образом.

Пользуясь результатами, полученными здесь для краевой задачи, можно без больших затруднений исследовать систему сингулярных интегральных уравнений вида

$$A(t)\,\omega(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int K(t, \tau)\, \omega(\tau)\, d\tau = g(t)$$

в особом случае, когда определители матриц $A(t) \pm B(t)$ могут обращаться в нуль. Здесь я на этом не останавливаюсь.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
14.VIII.1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гахов Ф. Д., Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Известия Казанского физ.-мат. об-ва, т. XIV, сер. 3 (1949), 75—160.

[2] Гахов Ф. Д., О краевой задаче для системы n пар функций, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXVII, № 4 (1949), 601—604.

[3] Гахов Ф. Д., Один случай краевой задачи Римана для системы n пар функций, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 549—568.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 157—180

Н. П. ВЕКУА

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* Н. И. Мусхелишвили)

Статья посвящена решению двух граничных задач теории функций комплексного переменного. Одна из этих задач является обобщением на случай нескольких неизвестных функций задачи, поставленной Карлеманом. Другая задача является обобщением задачи Римана для системы функций.

§ 1. Введение. Пусть L — замкнутый, гладкий контур, ограничивающий некоторую конечную область D^+ на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. За положительное направление на L мы принимаем то, которое оставляет область D^+ слева. Обозначим через D^- область, дополняющую $D^+ + L$ до всей плоскости, и будем считать, что начало координат находится в D^+. Положим далее, что угол, составляемый касательной к L с постоянным направлением, удовлетворяет условию H (Гельдера).

Пусть $\alpha(t)$ — заданная на контуре L функция, имеющая отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию H, и пусть $\alpha(t)$ взаимно однозначно переводит контур L в самого себя, изменяя направление L на обратное. Наконец, функцию, обратную по отношению к $\alpha(t)$, обозначим через $\beta(t)$.

Функцию $\varphi(z)$ мы будем называть мероморфной в области D^+ (в D^-), если:

1) она голоморфна всюду в D^+ (в D^-), кроме, быть может, конечного числа точек, являющихся ее полюсами,

2) она непрерывно продолжима всюду на L.

В настоящей работе рассматривается следующая граничная задача: *найти два вектора*

$$\varphi_1(z) = [\varphi_{11}(z), \varphi_{12}(z), \ldots, \varphi_{1n}(z)], \quad \varphi_2(z) = [\varphi_{21}(z), \ldots, \varphi_{2n}(z)],$$

мероморфные в области D^+, *по граничному условию*

$$\varphi_1^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\varphi_2^+(t_0) + g(t_0) \quad (\text{на } L), \tag{1.1}$$

где $G(t_0) = \| G_{kj} \|$ $(k, j = 1, 2, \ldots, n)$ — *заданная матрица, удовлетворяющая условию* H, $g(t_0) = [g_1(t_0), g_2(t_0), \ldots, g_n(t_0)]$ — *заданный вектор,*

также удовлетворяющий условию H; $\varphi_1^+(t)$ *и* $\varphi_2^+(t)$ *обозначают граничные значения* $\varphi_1(z)$ *и* $\varphi_2(z)$ *на* L. Мы будем считать, что $\det G(t)$ отличен от нуля всюду на L.

Если мы будем требовать, чтобы $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$, то получим так называемую граничную задачу Карлемана для нескольких неизвестных функций *:

$$\varphi^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\varphi^+(t_0) + g(t_0). \tag{1.2}$$

Задачи (1.1) и (1.2) в случае $n=1$ решены Д. А. Квеселава ([2]), но его метод применим в основном лишь в случае $n=1$ **.

В настоящей работе, обобщая один метод, изложенный в работе Племеля ([3]), и применяя результаты, полученные Д. А. Квеселава в названной выше работе ([2]), мы даем решение приведенных выше задач, причем при решении задачи (1.2) применяется теория системы сингулярных интегральных уравнений. Наконец, задачу Карлемана мы рассматриваем и для случая разрывных коэффициентов.

§ 1a. Некоторые вспомогательные предложения. Приведем некоторые предложения, доказанные Д. А. Квеселава ([2]), которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

1°. Если голоморфные в области D^+ функции $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ непрерывно продолжимы на L и удовлетворяют граничному условию:

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = \Phi_2^+(t) \quad (\text{на } L), \tag{1a.1}$$

то

$$\Phi_1(z) = \Phi_2(z) = \text{const в области } D^+.$$

2°. Все мероморфные в области D^+ решения граничной задачи (1a.1) даются формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= C + P_1(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho[\beta(t)]\,dt}{t-z}, \\ \Phi_2(z) &= C + P_2(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t-z}, \end{aligned} \tag{1a.2}$$

где C — произвольная постоянная, $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — произвольные главные части, соответственно, искомых функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, $\rho(t)$ — решение интегрального уравнения

$$T\rho \equiv \rho(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{t-t_0} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\right]\rho(t)\,dt = P_2(t_0) - P_1[\alpha(t_0)],$$

причем однородное уравнение $T\rho = 0$ не имеет нетривиального решения (справедливость приведенного предложения проверяется непосредственно).

---

* Карлеман в работе ([1]) рассматривал однородную граничную задачу в случае $n=1$ и $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$, но не дал сколько-нибудь полного решения этой задачи.

** В случае задачи (1.2) Д. А. Квеселава, как и Карлеман, предполагает, что $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$.

3°. Рассмотрим граничную задачу:

$$\Phi_1^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\,\Phi_2^+(t_0), \tag{1a.3}$$

где $G(t_0)$ — заданная функция, отличная от нуля всюду на L и удовлетворяющая условию Н. Обозначим через ν индекс Коши функции $G(t)$, т. е.

$$\nu = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L.$$

Введем функцию

$$G_0(t_0) = t_0^{-\nu+\nu'}\alpha^{\nu'}(t_0)\,G(t_0),$$

где ν' — произвольное целое число.

Легко видеть, что функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= z^{-\nu'} e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu[\beta(t)]\,dt}{t-z}}, \\ \Phi_2(z) &= z^{\nu'-\nu} e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}}, \end{aligned} \tag{1a.4}$$

где $\mu(t)$ — решение интегрального уравнения

$$T\mu = \ln G_0(t_0),$$

дают некоторое решение (каноническое решение) задачи (1a.3).

4°. Рассмотрим, наконец, неоднородную задачу

$$\Phi_1^+[\alpha(t_0)] = \Phi_2^+(t_0) + g(t_0), \tag{1a.5}$$

где $g(t_0)$ — заданная на L функция, удовлетворяющая условию Н. Можно показать, что все решения задачи (1a.5) даются формулами (1a.2), если $\rho(t)$ обозначает решение интегрального уравнения

$$T\rho = g(t_0) + P_2(t_0) - P_1[\alpha(t_0)].$$

§ 2. Решение однородной задачи. Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (1.1):

$$\varphi_1^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\,\varphi_2^+(t_0), \tag{I}$$

и будем пока считать, что вектор $\varphi_1(z)$ является голоморфным всюду в D^+, а $\varphi_2(z)$ может иметь полюс в начале координат. Кроме того, будем пока предполагать, что $\varphi_1^+(t_0)$ и $\varphi_2^+(t_0)$ удовлетворяют условию Н всюду на L. Обозначим через $\gamma(z)$ главную часть вектора $\varphi_2(z)$ в точке $z=0$. Очевидно, компоненты вектора $\gamma(z)$ имеют вид

$$\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_m}{z^m},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — постоянные. Будем считать вектор $\gamma(z)$ заданным. При таких условиях, как легко видеть, граничная задача (I) эквивалентна следующим двум уравнениям:

$$\frac{\varphi_2^+(t_0)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_2^+(t)\,dt}{t-t_0} = \gamma(t_0), \tag{2.1}$$

$$\frac{\varphi_2^+(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G^{-1}(t_0)\,G(t)\,\alpha'(t)\,\varphi_2^+(t)\,dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} = 0, \tag{2.2}$$

где $\alpha'(t)$ обозначает производную функции $\alpha(t)$.

Складывая эти уравнения, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода *

$$\varphi_2^+(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left[\frac{G^{-1}(t_0)\,G(t)\,\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} - \frac{E}{t-t_0}\right]\varphi_2^+(t)\,dt = \gamma(t_0), \tag{2.3}$$

аналогичное уравнению Племеля ([3]) [см. ([4]), § 126, формула 126,5].

Из приведенных выше рассуждений следует, что если задача (I) имеет решение $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, то $\varphi_2^+(t_0)$ удовлетворяет уравнению Фредгольма (2.3).

Пусть теперь $\varphi_2^+(t_0)$ — решение интегрального уравнения (2.3). Рассмотрим векторы

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G[\beta(t)]\,\varphi_2^+[\beta(t)]\,dt}{t-z} \qquad (z\in D^-),$$

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_2^+(t)\,dt}{t-z} - \gamma(z) \qquad (z\in D^-),$$

определенные в области D^- и исчезающие на бесконечности. При этих обозначениях уравнение (2.3) можно записать так:

$$\Phi_1^-[\alpha(t_0)] = G(t_0)\,\Phi_2^-(t_0), \tag{II}$$

уравнения же (2.1) и (2.2) могут быть записаны в виде:

$$\Phi_1^-(t_0) = 0, \qquad \Phi_2^-(t_0) = 0,$$

т. е.

$$\Phi_1(z) = \Phi_2(z) \equiv 0 \qquad \text{при} \qquad z\in D^-.$$

Задачу (II) будем называть задачей, *сопутствующей* задаче (I).

На основе приведенных выше рассуждений заключаем, что *если сопутствующая задача* (II) *не имеет отличных от нуля решений, исчезающих на бесконечности, то решение интегрального уравнения* (2.3) *дает решение граничной задачи* (I). Если искать решения задачи (II), исчезающие на бесконечности, то интегральное уравнение Фредгольма, составленное для этой задачи так же, как было составлено уравнение (2.3) для задачи (I), будет иметь вид:

$$\Phi_2^-(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left[\frac{G^{-1}(t_0)\,G(t)\,\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} - \frac{E}{t-t_0}\right]\Phi_2^-(t)\,dt = 0. \tag{2.4}$$

* На основе принятых выше условий нетрудно показать, что ядро этого уравнения может иметь при $t = t_0$ разрыв порядка ниже 1.

Нетрудно показать, что если задача (I) не имеет голоморфных решений, то каждое решение уравнения (2.4) дает исчезающее на бесконечности решение сопутствующей задачи (II).

Рассмотрим теперь задачу

$$\Omega_1^+[\alpha(t_0)] = G'^{-1}(t_0)\frac{1}{\alpha'(t_0)}\Omega_2^+(t_0), \tag{I'}$$

где G' — матрица, транспонированная по отношению к G Эту задачу мы будем называть *союзной* с исходной задачей (I).

Если мы будем искать голоморфные решения задачи (I), то интегральное уравнение Фредгольма, составленное для этой задачи так же, как было составлено уравнение (2.3) для задачи (I), будет иметь вид

$$\Omega_2^+(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left[\frac{G'(t_0)\,\alpha'(t_0)\,G'^{-1}(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} - \frac{E}{t-t_0}\right]\Omega_2^+(t)\,dt = 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим еще задачу, сопутствующую задаче (I′):

$$\Omega_1'^-[\alpha(t_0)] = G'^{-1}(t_0)\frac{1}{\alpha'(t_0)}\Omega_2^{-1}(t_0)$$

и будем искать решения этой задачи, исчезающие на бесконечности. Интегральное уравнение Фредгольма, составленное для этой задачи так же, как было составлено уравнение (2.4) для задачи (II), будет иметь вид

$$\Omega_2'^-(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left[\frac{G'(t_0)\,\alpha'(t_0)\,G'^{-1}(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} - \frac{E}{t-t_0}\right]\Omega_2'^-(t)\,dt = 0. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) представляет собою союзное с (2.3) однородное уравнение.

На основании приведенных выше рассуждений нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Если задача* (I) *такова, что сопутствующая ей задача* (II) *не имеет исчезающих на бесконечности решений и союзная с ней задача* (I′) *не имеет в* D^+ *голоморфных решений, то уравнение Фредгольма* (2.3) *разрешимо при всякой правой части* $\gamma(t_0)$ (*компоненты которой имеют указанный выше вид*) *и всякое решение этого уравнения дает решение граничной задачи* (I).

В дальнейшем совокупность двух мероморфных векторов $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, взятых в определенном порядке, мы будем называть *бивектором* и обозначать символом $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2).$$

Будем далее говорить, что бивектор $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ является решением граничной задачи (I), если $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, представляющие собой мероморфные векторы, удовлетворяют граничному условию (I), т. е.

$$\varphi_1^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\,\varphi_2^+(t_0).$$

Далее мы будем говорить, что бивектор $\varphi(z)$ имеет *порядок* r в начале координат, если $\varphi_2(z)$ имеет этот порядок в начале координат. Таким образом, порядком бивектора $\varphi(z)$ мы называем порядок вектора $\varphi_2(z)$, независимо от порядка вектора $\varphi_1(z)$.

Допустим временно, что условия леммы 1 соблюдены, и в качестве вектора γ возьмем последовательно n векторов:

$$\overset{1}{\gamma}(z)=\left(\frac{1}{z},\ 0,\ldots,0\right),\ \overset{2}{\gamma}(z)=\left(0,\frac{1}{z},0,\ \ldots,0\right),\ldots,\ \ \overset{n}{\gamma}(z)=\left(0,\ldots,0,\frac{1}{z}\right).$$

Каждому из этих векторов соответствует некоторое решение уравнения (2.3) и, следовательно, решение самой граничной задачи (I). Эти решения граничной задачи (I) обозначим через $\overset{1}{\varphi}(z),\ \overset{2}{\varphi}(z),\ldots,\overset{n}{\varphi}(z)$, причем $\overset{k}{\varphi}(z)$ представляет собой бивектор

$$\overset{k}{\varphi}(z)=\left(\overset{k}{\varphi}_1(z),\ \overset{k}{\varphi}_2(z)\right)\quad(k=1,\ 2,\ldots,n), \tag{2.7}$$

имеющий полюс первого порядка в начале координат (главная часть вектора $\overset{k}{\varphi}_2(z)$ в начале координат есть $\overset{k}{\gamma}(z)$).

На основании приведенных выше рассуждений заключаем, что имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если условия леммы* 1 *соблюдены, то всякое решение задачи* (I), *имеющее в начале координат порядок не ниже* -1, *представимо в виде*

$$\varphi(z)=\gamma_1\overset{1}{\varphi}(z)+\cdots+\gamma_n\overset{n}{\varphi}(z)+\gamma_{n+1}\overset{n+1}{\varphi}(z)+\cdots+\gamma_m\overset{m}{\varphi}(z),$$

где $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ — *произвольные постоянные,* $\overset{1}{\varphi}(z),\ldots,\overset{n}{\varphi}(z)$ — *рассмотренные выше бивекторы,* $\overset{n+1}{\varphi},\ldots,\overset{m}{\varphi}$ — *голоморфные решения задачи* (I), *соответствующие решениям однородного интегрального уравнения, полученного из уравнения* (2.3) *при* $\gamma(t_0)=0$; *произведение числа* γ *и бивектора* φ *понимается в следующем смысле:*

$$\gamma\varphi(z)=(\gamma\varphi_1,\ \gamma\varphi_2).$$

Отметим, что решения (2.7) обладают тем свойством, что

$$\lim_{z\to 0} z\overset{k}{\varphi}_{2j}(z)=\delta_{kj}=\begin{cases}1 \text{ при } k=j,\\ 0 \text{ при } k\neq j.\end{cases}$$

§ 3. Продолжение. Перейдем теперь к общему случаю, когда условия леммы 1 могут быть не соблюдены. Докажем сперва следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть* k_1 *и* k_2 — *целые числа, причем* $k_1<k_2$. *Если существует решение задачи* (I), *имеющее порядок* k_2 *в точке* $z=0$, *то существует решение этой задачи, имеющее порядок* k_1 *в той же точке.*

В самом деле, пусть бивектор $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2)$ представляет собой решение задачи (I), имеющее порядок k_2 в точке $z = 0$. Очевидно, будем иметь

$$\varphi_1^+[\alpha(t_0)] = t_0^{-(k_1-k_2)} G(t_0)\psi_2^+(t_0), \tag{3.1}$$

где

$$\psi_2(z) = z^{k_1-k_2}\varphi_2(z). \tag{3.2}$$

На основании сказанного в § 1а, п. 3°, можно найти голоморфные в области D^+ функции $\theta_1(z)$ и $\theta_2(z)$, непрерывно продолжимые на L, по граничному условию:

$$\theta_1^+[\alpha(t_0)] = t_0^{k_1-k_2}\theta_2^+(t_0), \tag{3.3}$$

причем $\theta_2(0) \neq 0$. * В силу (3.3), граничное условие (3.1) можно записать так:

$$\varphi_1^+[\alpha(t_0)]\,\theta_1^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\psi_2^+(t_0)\,\theta_2^+(t_0).$$

Но, в силу (3.2), вектор $\theta_2(z)\psi_2(z)$ имеет порядок k_1 в точке $z = 0$, и наша лемма доказана.

Аналогично доказывается справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Если k_1 и k_2 — целые числа, причем $k_1 < k_2$, и если существует решение задачи* (II), *имеющее порядок k_1 на бесконечности, то существует решение, имеющее порядок k_2 на бесконечности.*

В силу леммы 2, легко заключаем, что порядок нуля в точке $z = 0$ каждого решения задачи (I′) не превосходит $s - 1$, где s — число линейно независимых решений однородного уравнения (2.5). На основании же леммы 3 заключаем, что порядок нуля на бесконечности любого решения задачи (II) не превосходит s_1, где s_1 — число линейно независимых решений однородного уравнения (2.4).

Обозначим через r число, наибольшее из s и s_1, и рассмотрим задачу

$$\overset{*}{\varphi}{}_1^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\,t_0^{-r}\overset{*}{\varphi}{}_2^+(t_0). \tag{$\overset{*}{\text{I}}$}$$

Будем искать решения этой задачи, имеющие в точке $z = 0$ порядок не ниже -1. Из этих решений задачи ($\overset{*}{\text{I}}$) можно получить такие решения задачи (I), которые в начале координат имеют порядок не ниже $-(r+1)$.

В силу определения числа r, легко заключаем, что задача ($\overset{*}{\text{I}}$) удовлетворяет условиям леммы 1.

Если теперь, на основании теоремы 1, найдем все решения задачи ($\overset{*}{\text{I}}$), имеющие в точке $z = 0$ порядок не ниже -1, то легко приходим к следующему заключению:

---

* Очевидно, что для задачи (3.3) индекс Коши $\nu = k_1 - k_2$; поэтому, если в формулах (1а.4) возьмем $\nu' = k_1 - k_2$, то получим требуемое решение.

ТЕОРЕМА 2. *Все решения задачи* (I), *имеющие в начале координат порядок не ниже* — $(r+1)$, *получаются по формуле*

$$\varphi(z)=\gamma_1\overset{1}{\varphi}(z)+\gamma_2\overset{2}{\varphi}(z)+\cdots+\gamma_n\overset{n}{\varphi}(z)+\gamma_{n+1}\overset{n+1}{\varphi}(z)+\cdots+\gamma_m\overset{m}{\varphi}(z), \tag{3.4}$$

где $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ — *произвольные постоянные,* $\overset{1}{\varphi}(z),\ldots,\overset{n}{\varphi}(z)$ — *те решения задачи* (I), *которые имеют полюс порядка* $r+1$ *в начале координат,* $\overset{n+1}{\varphi}(z),\ldots,\overset{m}{\varphi}(z)$ — *решения, порядок которых в точке* $z=0$ *не ниже* — r.

Если бивектор $\overset{*}{\varphi}=(\overset{*}{\varphi}_1, \overset{*}{\varphi}_2)$ является решением задачи ($\overset{*}{\mathrm{I}}$), имеющим в точке $z=0$ полюс первого порядка, то, очевидно, бивектор $\varphi=(\overset{*}{\varphi}_1, z^{-r}\overset{*}{\varphi}_2)$ будет решением задачи (I), имеющим полюс порядка $r+1$ в начале координат.

Решения $\overset{1}{\varphi}(z),\ldots,\overset{n}{\varphi}(z)$, очевидно, обладают следующим свойством:

$$\lim_{z\to 0} z^{r+1}\overset{j}{\varphi}_{2j}(z)=\delta_{kj}.$$

В силу этого свойства, легко заключаем, что векторы $\overset{1}{\varphi}_2, \overset{2}{\varphi}_2,\ldots,\overset{n}{\varphi}_2$ не связаны никаким соотношением вида

$$R_1(z)\overset{1}{\varphi}_2(z)+R_2(z)\overset{2}{\varphi}_2(z)+\cdots+R_n(z)\overset{n}{\varphi}_2(z)=0,$$

где $R_1(z)$, $R_2(z),\ldots,R_n(z)$ — мероморфные в области D^+ функции.

§ 4. Каноническая система решений однородной задачи. В силу сказанного в § 1а, п. 2°, граничная задача

$$\omega_1^+[\alpha(t_0)]=\omega_2^+(t_0) \tag{4.1}$$

имеет решения, обладающие следующими свойствами:

1. Функция $\omega_1(z)$ голоморфна всюду в D^+ и непрерывно продолжима на контуре L.

2. Функция $\omega_2(z)$ также голоморфна всюду в области D^+, кроме, быть может, точки $z=0$, где она может иметь полюс; кроме того, она непрерывно продолжима на L.

Множество функций $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$, удовлетворяющих граничному условию (4.1) и обладающих приведенными выше свойствами, обозначим соответственно через M_1 и M_2.

В дальнейшем через $\omega(z)$ будем обозначать матрицу

$$\omega(z)=\begin{Vmatrix}\omega_1(z), & 0\\ 0, & \omega_2(z)\end{Vmatrix},$$

где $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ — элементы множества M_1 и M_2 соответственно, т. е.

$$\omega_1^+[\alpha(t_0)]=\omega_2^+(t_0).$$

Под выражением $\omega(z)\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — бивектор $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$, будем подразумевать бивектор с элементами $\omega_1\varphi_1$ и $\omega_2\varphi_2$, т. е.

$$\omega(z)\varphi(z)=[\omega_1(z)\varphi_1(z), \ \omega_2(z)\varphi_2(z)].$$

Очевидно, что если бивектор $\varphi(z)$ является решением граничной задачи (I), то $\omega(z)\varphi(z)$ будет также решением этой задачи.

Среди решений (3.4) существуют такие, которые имеют в начале координат наивысший порядок *. Обозначим этот наивысший из возможных порядок ** через $(-\varkappa_1)$, а через $\overset{1}{\chi}(z) = \left(\overset{1}{\chi}_1(z), \overset{1}{\chi}_2(z)\right)$ обозначим одно из решений, имеющих этот порядок. Обозначим теперь через $(-\varkappa_2)$ наивысший возможный порядок тех из решений (3.4), которые не связаны с $\overset{1}{\chi}(z)$ никаким соотношением вида

$$\varphi(z) = \overset{1}{\omega}(z)\overset{1}{\chi}(z),$$

где

$$\overset{1}{\omega}(z) = \begin{Vmatrix} \overset{1}{\omega}_1(z), & 0 \\ 0, & \overset{1}{\omega}_2(z) \end{Vmatrix},$$

причем $\overset{1}{\omega}_1(z)$ и $\overset{1}{\omega}_2(z)$ — элементы множеств M_1 и M_2 соответственно. Пусть $\overset{2}{\chi}(z)$ — одно из решений, имеющих порядок $(-\varkappa_2)$. Пусть, далее, $(-\varkappa_3)$ обозначает наивысший из возможных порядок тех из решений (3.4), которые не связаны с $\overset{1}{\chi}(z)$ и $\overset{2}{\chi}(z)$ никаким соотношением вида

$$\varphi(z) = \overset{1}{\omega}(z)\overset{1}{\chi}(z) + \overset{2}{\omega}(z)\overset{2}{\chi}(z),$$

где

$$\overset{1}{\omega}(z) = \begin{Vmatrix} \overset{1}{\omega}_1(z), & 0 \\ 0, & \overset{1}{\omega}_2(z) \end{Vmatrix}, \quad \overset{2}{\omega}(z) = \begin{Vmatrix} \overset{2}{\omega}_1(z), & 0 \\ 0, & \overset{2}{\omega}_2(z) \end{Vmatrix},$$

причем $\overset{1}{\omega}_1(z), \overset{2}{\omega}_1(z)$ — элементы множества M_1, а $\overset{1}{\omega}_2(z), \overset{2}{\omega}_2(z)$ — соответствующие элементы множества M_2. Обозначим одно из решений, имеющих порядок $(-\varkappa_3)$, через $\overset{3}{\chi}(z)$ и т. д. Нетрудно показать, что указанный процесс может быть продолжен до тех пор, пока мы не дойдем до некоторого решения $\overset{n}{\chi}(z)$ с номером n.

Таким образом получаем n решений

$$\overset{1}{\chi}(z), \overset{2}{\chi}(z), \ldots, \overset{n}{\chi}(z), \tag{4.2}$$

имеющих порядки $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_n$, причем $\overset{j}{\chi}(z)$ обозначает бивектор $\overset{j}{\chi} = \left(\overset{j}{\chi}_1, \overset{j}{\chi}_2\right)$. Очевидно, что

$$\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n.$$

* Порядок нуля в точке $z=0$ каждого решения задачи (I) не превосходит s_2, где s_2 — число линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.3).

** В дальнейшем вместо «порядок в начале координат» будем говорить просто «порядок».

Легко видеть, далее, что если бивектор $\chi(z)$ является решением задачи (I), имеющим порядок, превосходящий $-\varkappa_k$, то

$$\chi(z)=\overset{1}{\omega}(z)\overset{1}{\chi}(z)+\cdots+\overset{k-1}{\omega}(z)\overset{k-1}{\chi}(z), \tag{4.3}$$

где

$$\overset{j}{\omega}(z)=\begin{Vmatrix}\overset{j}{\omega}_1(z), & 0\\ 0, & \overset{j}{\omega}_2(z)\end{Vmatrix}\quad (j=1,2,\ldots,k-1),$$

причем $\overset{j}{\omega}_1$ и $\overset{j}{\omega}_2$ — элементы множеств M_1 и M_2 соответственно, т. е.

$$\overset{j}{\omega}{}_1^+[\alpha(t_0)]=\overset{j}{\omega}{}_2^+(t_0)\quad (j=1,2,\ldots,k-1).$$

Докажем теперь следующую лемму:

ЛЕММА 4. *Выражение*

$$\chi_2(z)=a_1\overset{1}{\chi}_2(z)+a_2\overset{2}{\chi}_2(z)+\cdots+a_n\overset{n}{\chi}_2(z),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные, не все равные нулю, не может обратиться в нуль нигде в D^++L, кроме, быть может, точки $z=0$.

Пусть в некоторой точке $c\neq 0$, не расположенной на L, вектор $\chi_2(z)$ обращается в нуль, т. е.

$$\chi_2(z)=\sum_{j=1}^{n}a_j\overset{j}{\chi}_2(z)=(z-c)\,\varphi_2(z). \tag{4.4}$$

Очевидно, будем иметь

$$\chi_1^+[\alpha(t_0)]=\sum_{j=1}^{n}a_j\overset{j}{\chi}{}_1^+[\alpha(t_0)]=G(t_0)(t_0-c)\,\varphi_2^+(t_0). \tag{4.5}$$

В силу сказанного в § 1а, п. 3°, существуют голоморфные в области D^+ функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, обладающие следующими свойствами:

1) они непрерывно продолжимы на L и их граничные значения удовлетворяют условию H,

2) функция $\psi_1(z)$ отлична от нуля всюду в D^++L,

3) $\psi_2(z)$ также отлична от нуля всюду в D^++L, кроме точки $z=0$, где она имеет нуль первого порядка,

4) они удовлетворяют граничному условию

$$\psi_1^+[\alpha(t_0)]=\frac{1}{t_0-c}\,\psi_2^+(t_0). \tag{4.6}$$

В силу (4.6), соотношение (4.5) можно переписать так:

$$\chi_1^+[\alpha(t_0)]\,\psi_1^+[\alpha(t_0)]=G(t_0)\,\varphi_2^+(t_0)\,\psi_2^+(t_0),$$

т. е. бивектор $\left(\chi_1(z)\,\psi_1(z),\ \varphi_2(z)\,\psi_2(z)\right)$ является решением задачи (I). Пусть a_k — последнее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не равное нулю. Очевидно, что порядок бивектора $(\chi_1\psi_1, \varphi_2\psi_2)$ не меньше $-\varkappa_k+1$, поэтому, в силу (4.3), будем иметь

$$(\chi_1\psi_1, \varphi_2\psi_2)=\overset{1}{\omega}(z)\overset{1}{\chi}(z)+\cdots+\overset{k-1}{\omega}(z)\overset{k-1}{\chi}(z). \tag{4.7}$$

На основании (4.4.), получаем

$$\psi_2(z)\sum_{j=1}^{k} a_j \overset{j}{\chi}_2(z) = (z-c)\,\psi_2(z)\,\varphi_2(z).$$

В силу (4.7), последнее соотношение дает:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \overset{j}{\chi}_2(z) = \frac{z-c}{\psi_2(z)} \sum_{j=1}^{k-1} \overset{j}{\omega}_2(z)\,\overset{j}{\chi}_2(z),$$

или, что все равно,

$$\overset{k}{\chi}_2(z) = \overset{1}{\omega}{}^*_2(z)\,\overset{1}{\chi}_2(z) + \cdots + \overset{k-1}{\omega}{}^*_2(z)\,\overset{k-1}{\chi}_2(z), \tag{4.8}$$

где $\overset{j}{\omega}{}^*_2(z)$ — элементы множества M_2.

В силу (4.7), очевидно, будем иметь

$$\chi_1(z)\,\psi_1(z) = \overset{1}{\omega}_1(z)\,\overset{1}{\chi}_1(z) + \cdots + \overset{k-1}{\omega}_1(z)\,\overset{k-1}{\chi}_1(z). \tag{4.9}$$

Но так как

$$\chi_1(z) = \sum_{j=1}^{k} a_j \overset{j}{\chi}_1(z)$$

и, в силу (4.6), $\frac{1}{\psi_1(z)}$ принадлежит множеству M_1, то из соотношения (4.9) получаем

$$\overset{k}{\chi}_1(z) = \sum_{j=1}^{k-1} \overset{j}{\omega}{}^*_1(z)\,\overset{j}{\chi}_1(z), \tag{4.10}$$

где $\overset{j}{\omega}{}^*_1(z)$ — элемент множества M_1, соответствующий $\overset{j}{\omega}{}^*_2(z)$, т. е.

$$\overset{j}{\omega}{}^{*+}_1(\alpha(t_0)) = \overset{j}{\omega}{}^{*+}_2(t_0).$$

Равенства (4.8) и (4.10) можно записать так:

$$(\overset{k}{\chi}_1(z),\ \overset{k}{\chi}_2(z)) = \overset{1}{\omega}(z)\,\overset{1}{\chi}(z) + \cdots + \overset{k-1}{\omega}(z)\,\overset{k-1}{\chi}(z),$$

где

$$\overset{j}{\omega}(z) = \begin{Vmatrix} \overset{j}{\omega}{}^*_1(z), & 0 \\ 0, & \overset{j}{\omega}{}^*_2(z) \end{Vmatrix},$$

что, в силу построения $\overset{j}{\chi}(z)$, невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда точка c находится на контуре L. Нетрудно видеть, что предыдущие рассуждения останутся в силе и в этом случае, если имеет место равенство (4.4), причем граничное значение вектора $\varphi_2(z)$ удовлетворяет условию H. Справедливость же сказанного доказывается совершенно так же, как справедливость аналогичного предложения в случае задачи Гильберта [см. ([4]), стр. 404—405]. Аналогично доказывается справедливость следующей леммы:

ЛЕММА 4′. *Выражение*

$$\chi_1(z) = a_1 \overset{1}{\chi}_1(z) + a_2 \overset{2}{\chi}_1(z) + \cdots + a_n \overset{n}{\chi}_1(z),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *постоянные, не все равные нулю, не может обратиться в нуль ни в одной точке в* $D^+ + L$.

Введем обозначения:

$$X_1(z) = \begin{Vmatrix} \overset{1}{\chi}_{11}, & \overset{2}{\chi}_{11}, \ldots, & \overset{n}{\chi}_{11} \\ \overset{1}{\chi}_{12}, & \overset{2}{\chi}_{12}, \ldots, & \overset{n}{\chi}_{12} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overset{1}{\chi}_{1n}, & \overset{2}{\chi}_{1n}, \ldots, & \overset{n}{\chi}_{1n} \end{Vmatrix}, \tag{4.11}$$

$$X_2(z) = \begin{Vmatrix} \overset{1}{\chi}_{21}, & \overset{2}{\chi}_{21}, \ldots, & \overset{n}{\chi}_{21} \\ \overset{1}{\chi}_{22}, & \overset{2}{\chi}_{22}, \ldots, & \overset{n}{\chi}_{22} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overset{1}{\chi}_{2n}, & \overset{2}{\chi}_{2n}, \ldots, & \overset{n}{\chi}_{2n} \end{Vmatrix}. \tag{4.12}$$

На основании леммы 4′ заключаем, что $\det X_1(z)$ нигде в $D^+ + L$ в нуль не обращается. Из леммы же 4 следует, что $\det X_2(z)$ не обращается в нуль нигде в $D^+ + L$, кроме, быть может, точки $z = 0$.

Нетрудно показать следующее свойство решений (4.2). Пусть

$$\overset{j}{\chi}{}^0_2(z) = z^{\varkappa_j} \overset{j}{\chi}_2(z) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

тогда определитель

$$\Delta^0(z) = \det \| \overset{j}{\chi}{}^0_{2i}(z) \|$$

имеет в точке $z = 0$ конечное значение, отличное от нуля.

В самом деле, $\Delta^0(z)$ имеет конечное значение в точке $z = 0$, так как $\overset{j}{\chi}_2(z)$ имеет порядок $-\varkappa_j$ в этой точке. Докажем теперь, что $\Delta^0(0) \neq 0$. Если $\Delta^0(0) = 0$, то можно найти постоянные $a_1, a_2, \ldots a_n$, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условию

$$\lim_{z \to 0} [a_1 z^{\varkappa_1} \overset{1}{\chi}_2(z) + a_2 z^{\varkappa_2} \overset{2}{\chi}_2(z) + \cdots + a_n z^{\varkappa_n} \overset{n}{\chi}_2(z)] = 0,$$

т. е.

$$a_1 z^{\varkappa_1} \overset{1}{\chi}_2(z) + a_2 z^{\varkappa_2} \overset{2}{\chi}_2(z) + \cdots + a_n z^{\varkappa_n} \overset{n}{\chi}_2(z) = O(z).$$

Пусть из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ число a_k последнее, не равное нулю ($a_k \neq 0$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 0$). Тогда, очевидно, будем иметь:

$$a_1 z^{\varkappa_1 - \varkappa_k} \overset{1}{\chi}_2(z) + a_2 z^{\varkappa_2 - \varkappa_k} \overset{2}{\chi}_2(z) + \cdots + a_{k-1} z^{\varkappa_{k-1} - \varkappa_k} \overset{k-1}{\chi}_2(z) + \\ + a_k \overset{k}{\chi}_2(z) = O(z^{-\varkappa_k + 1}). \tag{4.13}$$

Рассмотрим теперь граничные задачи

$$\overset{j}{\psi}{}_1^+ [\alpha(t_0)] = t_0^{\varkappa_j - \varkappa_k} \overset{j}{\psi}{}_2^+ (t_0) \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1). \qquad (4.14)$$

Так как $\varkappa_j - \varkappa_k \leqslant 0$, то, в силу сказанного в § 1а, п. 3°, существуют голоморфные решения этих задач, обладающие следующим свойством:

$$\overset{j}{\psi}_2(0) = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

В силу (4.14), функции $\overset{j}{\omega}_1(z)$ и $\overset{j}{\omega}_2(z)$, определенные формулами

$$\overset{j}{\omega}_1(z) = \overset{j}{\psi}_1(z) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1),$$
$$\overset{j}{\omega}_2(z) = z^{\varkappa_j - \varkappa_k} \overset{j}{\psi}_2(z) \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1),$$

принадлежат M_1 и M_2 соответственно. Поэтому очевидно, что бивектор $\chi(z) = (\overset{1}{\chi}, \overset{2}{\chi})$, определенный формулами

$$\overset{1}{\chi}(z) = a_1 \overset{1}{\omega}_1(z) \overset{1}{\chi}_1(z) + \cdots + a_{k-1} \overset{k-1}{\omega}_1(z) \overset{k-1}{\chi}_1(z) + a_k \overset{k}{\chi}_1(z),$$

$$\overset{2}{\chi}(z) = a_1 \overset{1}{\omega}_2(z) \overset{1}{\chi}_2(z) + \cdots + a_{k-1} \overset{k-1}{\omega}_2(z) \overset{k-1}{\chi}_2(z) + a_k \overset{k}{\chi}_2(z),$$

является решением граничной задачи (I).

На основании (4.13) заключаем, что порядок этого бивектора не меньше $-\varkappa_k + 1$; поэтому, в силу (4.3), легко получаем

$$(\overset{k}{\chi}_1(z), \overset{k}{\chi}_2(z)) = \overset{1}{\omega}{}^*(z) \overset{1}{\chi}(z) + \overset{2}{\omega}{}^*(z) \overset{2}{\chi}(z) + \cdots + \overset{k-1}{\omega}{}^*(z) \overset{k-1}{\chi}(z), \qquad (4.15)$$

где

$$\overset{j}{\omega}{}^*(z) = \left\| \begin{matrix} \overset{j}{\omega}{}_1^*(z), & 0 \\ 0, & \overset{j}{\omega}{}_2^*(z) \end{matrix} \right\| \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1),$$

причем

$$\overset{j}{\omega}{}_1^{*+} [\alpha(t_0)] = \overset{j}{\omega}{}_2^{*+}(t_0).$$

В силу построения системы (4.2), не может иметь место равенство (4.15), и наше утверждение доказано.

Систему решений (4.2) задачи (I), обладающую указанными выше свойствами, будем называть *канонической* системой решений однородной задачи. Матрицы $X_1(z)$ и $X_2(z)$, определенные формулами (4.11) и (4.12), будем называть *каноническими* матрицами.

Определенные выше числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ назовем *частными индексами* однородной задачи (I), а их сумму

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n$$

— *суммарным индексом* этой задачи.

Очевидно, будем иметь:

$$X_1^+ [\alpha(t_0)] = G(t_0) X_2^+ (t_0),$$

откуда

$$G(t_0) = X_1^+ [\alpha(t_0)] [X_2^+ (t_0)]^{-1}. \tag{4.16}$$

Принимая во внимание доказанные выше свойства канонической системы решений, на основании формулы (4.16), легко получаем

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} [\ln \det G(t)]_L = \frac{1}{2\pi} [\arg \det G(t)]_L, \tag{4.17}$$

причем символ $[\ \ ]_L$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при полном обходе L в положительном направлении.

§ 5. Общее решение однородной задачи. Рассмотрим рациональную функцию $P(z)$, голоморфную в $D^- + L$ и исчезающую на бесконечности. Очевидно, функцию $P(z)$ можно представить в виде

$$P(z) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p_i} \frac{A_{ik}}{(z - a_i)^k}, \tag{5.1}$$

где A_{ik} — постоянные. Следуя Д. А. Квеселава ([2]), такую рациональную функцию будем называть *стандартной рациональной функцией*.

Очевидно, точки a_i являются полюсами функции $P(z)$. Стандартную рациональную функцию, имеющую полюс только в начале координат, будем называть *нормальной стандартной функцией*.

Вектор, компоненты которого — стандартные рациональные функции, будем называть стандартным рациональным вектором. Аналогично определяется нормальный стандартный вектор.

Вектор $\varphi(z)$, мероморфный в области D^+, очевидно, можно представить в форме

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + P(z),$$

где $\varphi_0(z)$ — голоморфный в области D^+ вектор, а $P(z)$ — стандартный рациональный вектор.

Найдем теперь все мероморфные решения однородной задачи (I).

На основании (4.16), граничное условие (I) можно записать так:

$$\{X_1^+ [\alpha(t_0)]\}^{-1} \varphi_1^+ [\alpha(t_0)] = [X_2^+ (t_0)]^{-1} \varphi_2^+ (t_0).$$

В силу сказанного в § 1а, п. 2°, из последнего соотношения вытекает справедливость следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 3. *Все мероморфные решения задачи* (I) *даются формулами*

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= X_1(z) C + X_1(z) P_1(z) + \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\rho[\beta(t)]\, dt}{t - z}, \\ \varphi_2(z) &= X_2(z) C + X_2(z) P_2(z) - \frac{X_2(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\rho(t)\, dt}{t - z}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где C — произвольный постоянный вектор, $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — произвольные стандартные рациональные векторы, $\rho(t)$ — решение интегрального урав-

нения Фредгольма

$$T\rho \equiv \rho(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{E}{t-t_0} - \frac{E\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\right]\rho(t)\,dt = P_2(t_0) - P_1[\alpha(t_0)], \quad (5.3)$$

где E — единичная матрица.

Если будем искать те решения задачи (I), которые могут иметь полюсы только в начале координат, то эти решения представимы опять формулами (5.2), если $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — нормальные стандартные векторы.

Найдем теперь все голоморфные решения задачи (I). Пусть

$$\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_m < 0 \leqslant \varkappa_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n.$$

Легко видеть, что все голоморфные решения задачи (I) даются формулами

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= X_1(z)C + \frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho[\beta(t)]\,dt}{t-z},\\ \varphi_2(z) &= X_2(z)C + X_2(z)P'(z) + \frac{X_2(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t-z},\end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned}C &= (C_1, C_2, \ldots, C_m, 0, \ldots, 0),\\ P'(z) &= (P'_{\varkappa_1}, P'_{\varkappa_2}, \ldots, P'_{\varkappa_m}, 0, \ldots, 0),\end{aligned} \quad (5.5)$$

причем $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — постоянные, $P'_{\varkappa_j}$ — нормальная рациональная функция, имеющая порядок $\varkappa_j$ (полюс порядка $|\varkappa_j|$) в начале координат, $\rho(t)$ — решение интегрального уравненая Фредгольма

$$T\rho = P'_2(t_0) \quad (P_1(z) \equiv 0).$$

Решение (5.4) содержит $\lambda + 1$ произвольных постоянных, где $\lambda = -(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_m)$, и, как легко видеть, задача (I) имеет ровно $\lambda + m$ линейно независимых голоморфных решений.

Если все частные индексы отрицательны, то задача (I) не имеет голоморфных решений.

§ 6. Решение неоднородной задачи. Рассмотрим теперь неоднородную граничную задачу

$$\varphi_1^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\varphi_2^+(t_0) + g(t_0). \quad (6.1)$$

В силу (4.16), граничное условие (6.1) можно переписать в виде

$$\{X_1^+[\alpha(t_0)]\}^{-1}\varphi_1^+[\alpha(t_0)] - [X_2^+(t_0)]^{-1}\varphi_2^+(t_0) = \{X_1^+[\alpha(t_0)]\}^{-1}g(t_0),$$

поэтому, на основании сказанного в § 1а, п. 4°, легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Все мероморфные решения неоднородной задачи* (6.1) *даются формулами*

$$\varphi_1(z) = X_1(z)C + X_1(z)P_1(z) + \frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho[\beta(t)]\,dt}{t-z},$$

$$\varphi_2(z) = X_2(z)C + X_2(z)P_2(z) - \frac{X_2(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t-z},$$

где C, P_1, P_2 имеют те же значения, что и в (5.2), $\rho(t_0)$ — *решение интегрального уравнения*

$$T\rho = \{X_1^+[\alpha(t_0)]\}^{-1} g(t_0) + P_2(t_0) - P_1[\alpha(t_0)].$$

Найдем теперь голоморфные решения задачи (6.1). Рассмотрим самый общий случай:

$$\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_m < 0 \leqslant \varkappa_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant \varkappa_n.$$

Нетрудно показать, что задача (6.1) допускает голоморфные решения тогда и только тогда, когда соблюдены условия

$$\int_L t^{-j}\rho_\nu(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa_\nu, \quad \nu = m+1, \ldots, n); \tag{6.2}$$

если эти условия соблюдены, то искомые решения даются формулами

$$\varphi_1(z) = X_1(z)\,C + \frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho[\beta(t)]\,dt}{t-z},$$

$$\varphi_2(z) = X_2(z)\,C + X_2(z)\,P'(z) - \frac{X_2(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t-z},$$

где

$$C = (C_1, C_2, \ldots, C_m, 0, \ldots, 0),$$

$P'(z)$ — стандартный рациональный вектор, определенный формулой (5.5), $\rho(t)$ — решение интегрального уравнения

$$T\rho = \{X_1^+[\alpha(t_0)]\}^{-1} g(t_0) + P'(z), \tag{6.3}$$

$\rho_{m+1}, \rho_{m+2}, \ldots, \rho_n$, фигурирующие в (6.2), обозначают последние $n-m$ компонент вектора $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m, \rho_{m+1}, \ldots, \rho_n)$.

Условия (6.2), очевидно, могут быть записаны так:

$$\int_L Q(t)\,\rho(t)\,dt = 0, \tag{6.4}$$

где

$$Q(z) = (0, 0, \ldots, 0, Q_{m+1}, \ldots, Q_n),$$

причем $Q_\nu(z)$ — нормальная стандартная функция порядка *

$$-\varkappa_\nu \quad (\nu = m+1, \ldots, n).$$

Написав решение интегрального уравнения (6.3) и подставляя его в (6.4), легко получаем

$$\int_L g(t)\,\Gamma(t)\,dt = 0, \tag{6.5}$$

где $\Gamma(t)$ — определенный вектор, содержащий $\mu = \varkappa_{m+1} + \cdots + \varkappa_n$ произвольных постоянных. Таким образом, граничная задача (6.1) имеет голоморфные решения тогда и только тогда, когда вектор $g(t)$ удовлетворяет условию (6.5).

---

* Заметим, что стандартная рациональная функция нулевого порядка, по определению, равняется нулю.

§ 7. Однородная граничная задача Карлемана для нескольких неизвестных функций. Рассмотрим однородную граничную задачу, соответствующую задаче (1.2):

$$\varphi^{+}[\alpha(t_0)] = G(t_0)\,\varphi^{+}(t_0). \qquad (\mathrm{I}_0)$$

Будем, как и Карлеман, предполагать, что

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t. \qquad (7.1)$$

Тогда, как легко видеть, для существования нетривиального решения задачи (I_0) необходимо, чтобы

$$G(t)\,G[\alpha(t)] \equiv E, \qquad (7.2)$$

где E — единичная матрица. В силу (7.1), из (7.2) получаем

$$G(t)\,G[\alpha(t)] = G[\alpha(t)]\,G(t), \quad G[\alpha(t)] = G^{-1}(t).$$

Из (7.1) так же легко получаем

$$\alpha'[\alpha(t)] = \frac{1}{\alpha'(t)}. \qquad (7.3)$$

В дальнейшем мы будем считать, что условия (7.1) и (7.2) соблюдены всюду на L.

Будем сначала считать, что задача (I′),

$$\Omega_1^{+}[\alpha(t_0)] = \frac{1}{\alpha'(t_0)}\,G'^{-1}(t_0)\Omega_2^{+}(t),$$

или, что все равно,

$$\Omega_1^{+}[\alpha(t_0)] = \alpha'[\alpha(t_0)]\,G'[\alpha(t_0)]\,\Omega_2^{+}(t_0), \qquad (7.4)$$

не имеет голоморфных решений * и будем искать решения задачи (I_0) в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sigma(t)\,dt}{t-z} + R(z), \qquad (7.5)$$

где $R(z)$ — произвольный стандартный рациональный вектор, являющийся главной частью вектора $\varphi(z)$; $\sigma(t)$ — искомый вектор, удовлетворяющий условию H и такой, что

$$\sigma[\alpha(t_0)] = G(t_0)\,\sigma(t_0). \qquad (7.6)$$

На основании (7.5) и (7.6) граничное условие (I_0) дает относительно $\sigma(t_0)$ интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{G(t)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} + \frac{G(t_0)}{t-t_0}\right]\sigma(t)\,dt = R[\alpha(t_0)] - G(t_0)\,R(t_0), \qquad (7.7)$$

представляющее собой систему сингулярных интегральных уравнений нормального типа [см. ([4]), гл. VI, или ([5]), гл. 1]. Для уравнения (7.7) имеют место теоремы, аналогичные теоремам Нетера.

---

* Как будет показано ниже, к этому случаю может быть сведен и самый общий случай.

Как легко усмотреть, каждое решение уравнения (7.7), удовлетворяющее условию (7.6), дает при помощи формулы (7.5) определенное решение задачи (I_0) *.

Нетрудно проверить, что если $\sigma(t)$ — решение уравнения (7.7), то $G[\alpha(t)]\,\sigma[\alpha(t)]$ тоже будет решением этого уравнения; следовательно, вектор

$$\rho(t_0) = \frac{1}{2}\{\sigma(t_0) + G[\alpha(t_0)]\,\sigma[\alpha(t_0)]\} \tag{7.8}$$

представляет собой решение уравнения (7.7), очевидно, удовлетворяющее условию (7.6). Легко видеть, далее, что любое решение задачи (I_0) представимо формулой (7.5), причем $\sigma(t)$ удовлетворяет условию (7.6). Таким образом, все решения задачи (I_0) получаются при помощи решения уравнения (7.7).

Ниже мы покажем, что если задача (7.4) не имеет голоморфных решений, то уравнение (7.7) разрешимо при любой правой части, т. е. при любом выборе вектора $R(z)$, являющегося стандартным рациональным вектором.

Как известно [см. ([5]), гл. 1], необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (7.7) имеет вид

$$\int_L \{R[\alpha(t)] - G(t)\,R(t)\}\,\nu(t)\,dt = 0, \tag{7.9}$$

где $\nu(t)$ — произвольное решение союзного однородного уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{G'(t)}{t-t_0} + \frac{\alpha'(t_0)\,G'(t_0)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\right]\nu(t)\,dt = 0, \tag{7.10}$$

соответствующего уравнению (7.7).

Интегральное уравнение (7.10) легко также связать с некоторой задачей Карлемана для нескольких неизвестных функций. С этой целью рассмотрим задачу

$$\omega^+[\alpha(t_0)] = \alpha'[\alpha(t_0)]\,G'[\alpha(t_0)]\,\omega^+(t_0), \tag{7.11}$$

союзную с задачей (I_0), и будем искать голоморфные решения этой задачи в следующем виде:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\nu[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,dt}{t-z}, \tag{7.12}$$

где $\nu(t)$ — вектор, удовлетворяющий условию H и такой, что

$$\nu[\alpha(t)] = \alpha'[\alpha(t)]\,G'(t)\,\nu(t). \tag{7.13}$$

На основании (7.12) и (7.13), граничное условие (7.11) дает относительно $\nu(t)$ интегральное уравнение (7.10). Нетрудно проверить, что если $\nu(t)$ — решение уравнения (7.10), то вектор

$$G'[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,\nu[\alpha(t)]$$

* Заметим, что это заключение имеет место в общем случае, когда условия (7.1), (7.2) могут быть не соблюдены.

будет определенным решением этого уравнения. Следовательно, вектор

$$\nu^*(t) = \nu(t) + G'[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,\nu[\alpha(t)]$$

представляет собой решение уравнения (7.10), очевидно, удовлетворяющее условию (7.13).

Таким образом, если $\nu(t)$ — решение интегрального уравнения (7.10), то вектор

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\nu^*[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,dt}{t-z} \tag{7.14}$$

дает голоморфное решение граничной задачи (7.11). По условию, граничная задача (7.4) и, тем более, задача (7.11) не имеет голоморфных решений, следовательно,

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\nu^*[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^+,$$

т. е.

$$\nu^*[\alpha(t)]\,\alpha'(t) = \{\nu[\alpha(t)] + G'(t)\,\alpha'[\alpha(t)]\,\nu(t)\}\,\alpha'(t) = \Psi^-(t), \tag{7.15}$$

где $\Psi^-(t)$ — граничное значение вектора $\Psi(z)$, голоморфного в D^- и исчезающего на бесконечности.

Как легко видеть, вектор

$$\nu^{**}(t) = \nu(t) - G'[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,\nu[\alpha)t)] \tag{7.16}$$

удовлетворяет условию

$$\nu^{**}[\alpha(t)] = -\alpha'[\alpha(t)]\,G'(t)\,\nu^{**}(t); \tag{7.17}$$

поэтому, принимая во внимание, что ν^{**} является решением уравнения (7.10), вектор

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\nu^{**}[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,dt}{t-z}$$

дает голоморфное решение задачи

$$\Phi^+[\alpha(t_0)] = -\alpha'[\alpha(t_0)]\,G'[\alpha(t_0)]\,\Phi^+(t_0). \tag{7.18}$$

Но так как, по условию, задача (7.4) и, следовательно, задача (7.18) не имеет голоморфных решений, то

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\nu^{**}[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,dt}{t-z} \equiv 0 \quad (z \in D^+),$$

т. е.

$$\nu^{**}[\alpha(t)]\,\alpha'(t) = \{\nu[\alpha(t)] - G'(t)\,\nu(t)\,\alpha'[\alpha(t)]\}\,\alpha'(t) = \Psi_1^-(t), \tag{7.19}$$

где $\Psi_1^-(t)$ — граничное значение вектора $\Psi_1(z)$, голоморфного в D^- и исчезающего на бесконечности. Складывая (7.15) и (7.19), получаем:

$$\nu[\alpha(t)]\,\alpha'(t) = \frac{1}{2}[\Psi^-(t) + \Psi_1^-(t)] = \Omega^-(t). \tag{7.20}$$

Таким образом, если $\nu(t)$ — решение интегрального уравнения (7.10), то $\nu[\alpha(t)]\,\alpha'(t)$ будет граничным значением вектора $\Omega(z)$, голоморфного в D^- и исчезающего на бесконечности. Но так как

$$\nu_0(t) = G'[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,\nu[\alpha(t)]$$

также является решением уравнения (7.10), то будем иметь

$$\nu_0[\alpha(t)]\,\alpha'(t) = G'(t)\,\nu(t) = \Omega_1^-(t), \tag{7.21}$$

где $\Omega_1^-(t)$ — граничное значение вектора $\Omega_1(z)$, голоморфного в D^- и исчезающего на бесконечности.

Необходимое и достаточное условие (7.9) разрешимости уравнения (7.7), очевидно, можно переписать так:

$$\int_L R(t)\,G'(t)\,\nu(t)\,dt - \int_L R[\alpha(t)]\,\nu(t)\,dt = 0. \tag{7.22}$$

В силу (7.21), будем иметь:

$$\int_L R(t)\,G'(t)\,\nu(t)\,dt = \int_L R(t)\,\Omega_1^-(t)\,dt = 0.$$

На основании же (7.20) получаем

$$\int_L R[\alpha(t)]\,\nu(t)\,dt = \int_L R[\alpha(t)]\,\Omega^-[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,dt = -\int_L R(t)\,\Omega^-(t)\,dt = 0.$$

Таким образом, условие (7.9) соблюдено и уравнение (7.7) разрешимо при любой правой части.

Из решения уравнения (7.7), как легко видеть, можно получить все решения задачи (I_0).

§ 8. **Продолжение.** Вернемся теперь к общему случаю, когда задача (7.4) может иметь голоморфные решения. Рассмотрим граничную задачу

$$\overset{*}{\varphi}{}^+[\alpha(t_0)] = t_0^{-r}[\alpha(t_0)]^r\,G(t_0)\,\overset{*}{\varphi}{}^+(t_0), \tag{$\overset{*}{I}_0$}$$

где r — целое число, определенное в § 3. Так как $G(t_0)$ удовлетворяет условию (7.2), то матрица $G_0(t_0)$, определенная формулой

$$G_0(t_0) = t_0^{-r}[\alpha(t_0)]^r\,G(t_0),$$

также удовлетворяет условию (7.2), т. е.

$$G_0(t)\,G_0[\alpha(t)] = E.$$

Рассмотрим теперь задачу

$$\overset{*}{\Omega}{}_1^+[\alpha(t_0)] = \frac{1}{\alpha'(t_0)}\,G'^{-1}(t_0)\,t_0^r\,[\alpha(t_0)]^{-r}\,\overset{*}{\Omega}{}_2^+(t_0)$$

или, что все равно,

$$\overset{*}{\Omega}{}_1^+[\alpha(t_0)] = \frac{1}{\alpha'(t_0)}\,G_0'^{-1}(t_0)\,\overset{*}{\Omega}{}_2^+(t_0). \tag{8.1}$$

В силу сказанного в § 3, легко заключаем, что задача (8.1) не может иметь голоморфных решений и для задачи ($\overset{*}{I}_0$) соблюдены все условия предыдущего параграфа.

Легко видеть далее, что если $\overset{*}{\varphi}(z)$ — решение граничной задачи ($\overset{*}{I}_0$), то вектор

$$\varphi(z) = z^{-r}\,\overset{*}{\varphi}(z) \tag{8.2}$$

будет решением исходной задачи.

Таким образом, при помощи решения задачи $(\overset{*}{\mathrm{I}}_0)$ мы можем получить все решения задачи (I_0).

Если теперь мы будем искать решения задачи $(\overset{*}{\mathrm{I}}_0)$ в виде:

$$\overset{*}{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sigma_0(t)\,dt}{t-z} + R(z),$$

где $R(z)$ — стандартный рациональный вектор, $\sigma_0(t)$ — искомый вектор, удовлетворяющий условию H и такой, что

$$\sigma_0[\alpha(t)] = G_0(t)\,\sigma_0(t),$$

то относительно $\sigma_0(t)$ получаем сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{G_0(t)\,\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} + \frac{G_0(t_0)}{t-t_0}\right]\sigma_0(t)\,dt = R[\alpha(t_0)] - G_0(t_0)\,R(t_0), \qquad (8.3)$$

разрешимое при произвольной правой части. В силу сказанного выше, при помощи решения этого уравнения мы можем получить все решения задачи (I_0) и, таким образом, задачу (I_0) можем считать решенной.

Нетрудно построить так называемую *каноническую систему решений* однородной задачи Карлемана (I_0). За вектор $R(z)$ будем брать последовательно n векторов

$$\overset{1}{R}(z) = \left(\frac{1}{z},\ 0, \ldots,\ 0\right),$$
$$\overset{2}{R}(z) = \left(0, \frac{1}{z}, 0, \ldots, 0\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n}{R}(z) = \left(0, \ldots,\ 0,\ \frac{1}{z}\right)$$

и будем искать те решения задачи (I_0), которые голоморфны всюду в D^+, кроме, быть может, точки $z=0$.

Пусть $\overset{j}{\sigma}_0\ (j=1, 2, \ldots, n)$ — решение уравнения (8.3), соответствующее вектору $\overset{j}{R}(z)\ (j=1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, что вектору $\overset{j}{\sigma}_0$ соответствует определенное решение задачи $(\overset{*}{\mathrm{I}}_0)$, имеющее полюс первого порядка в начале координат. Принимая, далее, во внимание соотношение (8.2), легко убедимся в справедливости следующего предложения:

Все решения задачи Карлемана (I_0), *имеющие в точке* $z=0$ *порядок не ниже* $-(r+1)$, *получаются из формулы*

$$\varphi(z) = \gamma_1\overset{1}{\varphi}(z) + \cdots + \gamma_n\overset{n}{\varphi}(z) + \gamma_{n+1}\overset{n+1}{\varphi}(z) + \cdots + \gamma_m\overset{m}{\varphi}(z), \qquad (8.4)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — *произвольные постоянные;* $\overset{1}{\varphi}(z), \ldots, \overset{n}{\varphi}(z)$ — *решения, имеющие в начале координат полюс порядка* $r+1$; $\overset{n+1}{\varphi}(z), \ldots, \overset{m}{\varphi}(z)$ — *решения, имеющие порядок не ниже* $-r$.

Очевидно, что первые n решений (8.4) обладают следующим свойством:

$$\lim z^{r+1} \overset{j}{\varphi}_k(z) = \delta_{jk}.$$

Поступая далее так, как в § 4, можно получить из решения (8.4) так называемую каноническую систему решений.

§ 9. Неоднородная граничная задача Карлемана. Рассмотрим теперь неоднородную граничную задачу Карлемана (1.2):

$$\varphi^+[\alpha(t_0)] = G(t_0)\varphi^+(t_0) + g(t_0) \tag{9.1}$$

и будем предполагать, что условия (7.1) и (7.2) соблюдены.

В силу условий (7.1) и (7.2), легко заключаем, что задача (9.1) может иметь решение лишь при условии

$$g(t) + G(t)g[\alpha(t)] = 0. \tag{9.2}$$

Будем искать решения задачи (9.1) в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + R(z), \tag{9.3}$$

где $R(z)$ — стандартный рациональный вектор, $\mu(t)$ — искомый вектор, удовлетворяющий условию H и такой, что

$$\mu(t) = G[\alpha(t)]\mu[\alpha(t)] + g[\alpha(t)]. \tag{9.4}$$

Заметим, что эта зависимость может иметь место лишь при условии (9.2).

Граничное условие (9.1), в силу (9.4), дает следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{G(t_0)}{t-t_0} + \frac{G(t)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\right]\mu(t)\,dt =$$

$$= R[\alpha(t_0)] - G(t_0)R(t_0) - \frac{1}{2}g(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\alpha'(t)\,dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)},$$

которое можно переписать так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{G(t_0)}{t-t_0} + \frac{G(t)\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\right]\mu(t)\,dt = R[\alpha(t_0)] - G(t_0)R(t_0) + H^-[\alpha(t_0)], \tag{9.5}$$

где

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g[\alpha(t)]\,dt}{t-z} \quad (z \in D^-).$$

Очевидно, что каждое решение уравнения (9.5), удовлетворяющее условию (9.4), дает при помощи формулы (9.3) определенное решение задачи (9.1).

Будем сначала считать, что однородная граничная задача (7.4) не имеет голоморфных решений. К этому случаю, как будет показано ниже, может быть сведен самый общий случай. Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (9.5) имеет вид:

$$\int_L \{R[\alpha(t)] - G(t)R(t) + H^-[\alpha(t)]\}\,\nu(t)\,dt = 0, \tag{9.6}$$

где $\nu(t)$ — произвольное решение союзного однородного уравнения (7.10).

В § 7 было показано, что

$$\int_L \{R[\alpha(t)] - G(t)R(t)\}\nu(t)\,dt = 0,$$

поэтому условие (9.6) принимает вид:

$$\int_L H^-[\alpha(t)]\nu(t)\,dt = 0. \tag{9.7}$$

В силу (7.20), очевидно, будем иметь

$$\int_L H^-[\alpha(t)]\nu(t)\,dt = \int_L \Omega^-[\alpha(t)]H^-[\alpha(t)]\alpha'(t)\,dt = -\int_L \Omega^-(t)H^-(t)\,dt = 0,$$

и условие (9.6) соблюдено.

Таким образом, если задача (7.4) не имеет голоморфных решений, то уравнение (9.5) разрешимо при произвольной правой части (имеющей указанный выше вид).

На основании (9.2) можно проверить, что если $\mu(t)$ — решение уравнения (9.5), то

$$G[\alpha(t)]\mu[\alpha(t)] + g[\alpha(t)]$$

также будет решением этого уравнения. Следовательно, вектор

$$\mu_0(t) = \frac{1}{2}\{G[\alpha(t)]\mu[\alpha(t)] + g[\alpha(t)] + \mu(t)\}$$

представляет собой решение уравнения (9.5), очевидно, удовлетворяющее условию (9.4), т. е.

$$\mu_0(t) = G[\alpha(t)]\mu_0[\alpha(t)] + g[\alpha(t)].$$

В силу сказанного выше, вектор $\varphi^0(z)$, определенный формулой

$$\varphi^0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu_0(t)\,dt}{t-z} + R(z),$$

дает решение задачи (9.1). Нетрудно видеть далее, что каждое решение задачи (9.1) можно представить формулой (9.3), причем плотность $\mu(t)$ удовлетворяет условию (9.4), и таким путем можно получить все решения задачи (9.1).

Вернемся теперь к случаю, когда задача (7.4) может иметь голоморфные решения, и рассмотрим задачу:

$$\overset{*}{\varphi}{}^+[\alpha(t_0)] = t_0^{-r}[\alpha(t_0)]^r G(t_0)\overset{*}{\varphi}{}^+(t_0) + [\alpha(t_0)]^r g(t_0), \tag{9.8}$$

где r — целое число, определенное в § 3.

Нетрудно проверить, что матрица

$$G_0(t_0) = t_0^{-r}[\alpha(t_0)]^r G(t_0)$$

удовлетворяет условию (7.2), т. е.

$$G_0(t_0)\,G_0[\alpha(t_0)] = E.$$

Легко видеть, далее, что вектор

$$g_0(t_0) = [\alpha(t_0)]^r g(t_0)$$

удовлетворяет условию

$$g_0(t) + G_0(t) g_0[\alpha(t)] = 0.$$

Кроме того, задача (8.1) не имеет голоморфных решений и, следовательно, для задачи (9.8) соблюдены все приведенные выше условия. Легко видеть далее, что если $\overset{*}{\varphi}(z)$ — решение задачи (9.8), то вектор $\varphi(z)$, определенный формулой

$$\varphi(z) = z^{-r} \overset{*}{\varphi}(z),$$

будет решением задачи (9.1). Таким образом, при помощи решения задачи (9.8) можно получить все решения задачи (9.1).

§ 10. Случай разрывных коэффициентов. Будем теперь считать, что матрица $G(t_0)$, фигурирующая в граничном условии (9.1), удовлетворяет условию Н везде на L, за исключением, быть может, конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где она может иметь разрыв первого рода, и что вектор $g(t_0)$ также может иметь разрыв первого рода на контуре L. Будем искать решения задачи (9.1), непрерывно продолжимые везде на L, за исключением, быть может, точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где они могут иметь разрывы порядка ниже единицы. Поступая далее так, как в § 7—9, и применяя теорию системы сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами [см. ([5])], убедимся в справедливости приведенных выше результатов для рассматриваемого случая.

Заметим, наконец, что задачу (I) можно решить при помощи системы сингулярных интегральных уравнений, но на этом мы не будем останавливаться.

Поступило
9. XI. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Carleman T., Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl. des Internat. mathem. Kongr., Zürich, B. I, 1932.

[2] Квеселава Д. А., Некоторые граничные задачи теории функций, Труды Тбилисского математ. института, т. XVI (1948), 39—80.

[3] Plemelj I., Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiergruppe, Monatshefte für Math. und Phys., XIX (1908), 211—245.

[4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.— Л., 1946.

[5] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений, М.— Л., 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 181—196

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе рассматриваются квадратурные формулы, представляющие собой обычные употребляемые на практике комбинации из классических квадратурных формул, точных для многочленов данной степени. Изучаются оценки приближений такими формулами.

1. Введение

Зададим на отрезке [0, 1] систему точек (узлов)

$$0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leqslant 1 \tag{1.1}$$

и чисел (весов)

$$p_0, p_1, \ldots, p_k \tag{1.2}$$

и составим линейный функционал

$$L(f) = L(0,1;\ f) = \sum_{0}^{m} p_k f(x_k), \tag{1.3}$$

где f — произвольная непрерывная на отрезке [0,1] функция.

Будем считать, что $L(f)$ есть приближенное выражение для интеграла от $f(x)$ на отрезке [0,1]:

$$\int_0^1 f(x)\,dy \sim L(f). \tag{1.4}$$

Таким образом, (1.3) есть квадратурная формула, определенная узлами (1.1) и весами (1.2).

Предположим еще, что формула (1.3) точна для всех многочленов

$$P_{r-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1}$$

степени не выше $r-1$, т. е. для них имеет место точное равенство

$$\int_0^1 P_{r-1}\,dx = L(P_{r-1}). \tag{1.5}$$

Пусть теперь задан произвольный отрезок $[\alpha, \beta]$. Будем называть квадратурную формулу

$$L(\alpha, \beta; f) = \sum_{0}^{m} p'_k f(x'_k)$$

подобной (соответствующей $[\alpha, \beta]$) формуле $L(f)$, если система точек $\alpha, x_0', x_1', \ldots, x_m', \beta$ геометрически подобна системе $0, x_0, x_1, \ldots, x_m, 1$, а веса p_k' относятся соответственно к p_k как длина отрезка $[\alpha, \beta]$ к единице:

$$x_k' = \alpha + x_k(\beta - \alpha), \quad p_k' = p_k(\beta - \alpha).$$

Легко видеть, что если квадратурная формула (1.4) точна для многочленов степени $r - 1$, то это же имеет место для квадратурной формулы

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \sim \sum_0^m p_k' f(x_k').$$

На практике, если требуется приближенно вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

обычно поступают следующим образом: выбирают ту или иную квадратурную формулу (1.4), например, формулу Симпсона, делят отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$\xi_k = a + \frac{b-a}{n} k$$

и к каждому отдельному частичному интервалу (ξ_k, ξ_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots \ldots, n-1)$ применяют квадратурную формулу, подобную L:

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx \sim L(\xi_k, \xi_{k+1}; f).$$

В результате получается более сложная квадратурная формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f). \tag{1.6}$$

Настоящая работа посвящена вопросу об оценках приближения квадратурными формулами подобного рода в случае различных классов дифференцируемых функций.

В § 2 дается точное выражение (неравенство (2.4)) для приближения посредством квадратурной формулы (1.6) в случае класса функций $KW^{(r)}(a, b)$, имеющих ограниченную на $[a, b]$ производную $f^{(r)}(x)$ порядка r. Из этого выражения видно, что порядок приближения для всего класса есть $O(n^{-r})$. При дальнейшем рассмотрении этого вопроса выясняется следующий замечательный факт. Оказывается, что положительно для всех функций класса $KW^{(r)}(a, b)$, исключая только многочлены степени $r - 1$, приближение посредством квадратурной формулы (1.6), если не на отрезке $[a, b)$, то во всяком случае на некоторой его части $[a, c]$ $(a < c \leqslant b)$, имеет порядок, строго равный $O(n^{-r})$. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет производную более высокого порядка, чем r, — пусть даже она будет аналитической, — все равно при применении

для вычисления ее определенного интеграла квадратурной формулы (1.6), где L точна только для многочленов P_{r-1}, мы заведомо не сможем получить лучший эффект в смысле порядка приближения сравнительно с тем, который имеет место для функций, обладающих разрывной производной r-го порядка. Например, как бы ни была хороша функция, если только она не есть многочлен третьей степени, порядок приближения ее интеграла при применении формулы Симпсона заведомо не может быть лучшим, чем $O(n^{-4})$.

Мы даем также порядок приближения в случае класса $W_{\omega}^{(r)}(a, b)$ функций, имеющих производную порядка r, обладающую на $[a, b]$ данным модулем непрерывности $\omega(x)$.

§ 3 посвящен квадратурным формулам для многих переменных и, наконец, в § 4 приводятся некоторые численные результаты; среди них два результата получены участником руководимого мной студенческого семинара П. Пилико.

§ 2. Одномерный случай

Введем в рассмотрение класс $KW^{(r)}(a, b)$ функций f, имеющих на $[a, b]$ производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant K.$$

Пусть функция f принадлежит пока к классу $KW^{(r)}(0, 1)$. Полагая $f^{(r)}(x) = \varphi(x)$, представим ее по формуле Тэйлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x) = P_{r-1}(x) + R(x),$$

где

$$P_{r-1}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \cdots + \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} x^{r-1},$$

$$R(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 K_r(x-t) \varphi(t)\, dt,$$

$$K_r(u) = \begin{cases} 0 & \text{для } u < 0, \\ u^{r-1} & \text{для } u > 0. \end{cases}$$

Пусть, далее, $L(f)$ есть некоторая определенная квадратурная формула вида (1.3), точная для всех многочленов P_{r-1} степени $r-1$. Тогда после простых преобразований, сводящихся к замене порядка интегрирования [см. ([1]) *], получим

$$\int_0^1 f(x)\, dx - L(f) = \int_0^1 R\, dx - L(R) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 F(t) \varphi(t)\, dt, \quad (2.1)$$

* Выражения для остатка квадратурной формулы в интегральной форме получал также Милн ([3]).

где

$$\varphi(t) = f^{(r)}(t),$$

$$F(t) = \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{0}^{m} p_k K_r(x_k - t).$$

Ядро $F(t)$ полностью определяется выбранной нами квадратурной формулой $L(f)$.

Введем еще в рассмотрение верхнюю грань

$$\sup_{f \in KW^{(r)}(0,1)} \left| \int_0^1 f\,dx - L(f) \right| = \frac{K}{(r-1)!} \int_0^1 |F(t)|\,dt = c_r K, \qquad (2.2)$$

распространенную на класс $KW^{(r)}(0, 1)$. Она определяется формулой L и классом $KW^{(r)}(0, 1)$.

Рассмотрим определенную во введении квадратурную формулу

$$\int_a^b f\,dx \sim \sum_0^{n-1} L(\xi_k;\ \xi_{k+1};\ f) \quad \left(\xi_k = a + \frac{b-a}{n} k\right) \qquad (2.3)$$

и докажем для нее следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $f \in KW^{(r)}(a, b)$ имеет место неравенство*

$$\left| \int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k,\ \xi_{k+1};\ f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{r+1} c_r K}{n^r}. \qquad (2.4)$$

При этом существует функция $f_* \in KW^{(r)}(a, b)$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. На основании свойства подобия (см. введение) квадратурной формулы $L(\xi_k,\ \xi_{k+1};\ f)$ формуле $L(f)$, имеет место:

$$\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k,\ \xi_{k+1};\ f) = \sum_0^{n-1} \left\{ \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx - L(\xi_k,\ \xi_{k+1};\ f) \right\} =$$

$$= h \sum_0^{n-1} \left\{ \int_0^1 f(\xi_k + hu)\,du - L[f(\xi_k + hu)] \right\} \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right). \qquad (2.5)$$

Если функция $f \in KW^{(r)}(a, b)$, то функция $f(\xi_k + hu)$ от переменной u принадлежит, очевидно, к классу $Kh^r W^{(r)}(0, 1)$, и наоборот, а потому, на основании (2.2), будем иметь:

$$\left| \int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k,\ \xi_{k+1};\ f) \right| \leqslant \sum_0^{n-1} \left| \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx - L(\xi_k,\ \xi_{k+1};\ f) \right| =$$

$$= h \sum_0^{n-1} \left| \int_0^1 f(\xi_k + hu)\,du - L(f(\xi_k + hu)) \right| \leqslant n h^{r+1} c_r K = \frac{(b-a)^{r+1} c_r K}{n^r}, \qquad (2.6)$$

что доказывает неравенство (2.4).

Нам остается показать возможность построения функции $f_* \in KW^{(r)}(a, b)$, для которой неравенство (2.4) обращается в равенство. Это можно сделать следующим образом. Пусть $f_k(x)$ есть функция класса $KW^{(r)}(\xi_k, \xi_{k+1})$, для которой величина

$$\left| \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx - L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \tag{2.7}$$

достигает своего максимума, равного $h^r c_r K$. Легко видеть, в силу (2.1), что в качестве $f_*(x)$ можно взять любую функцию f, имеющую производную порядка r, у которой почти для всех $u \in [0, 1]$ выполняется равенство

$$f^{(r)}(\xi_k + hu) = Kh^r \operatorname{sign} F(u).$$

Положим $f_*(x) = f_0(x)$ на отрезке (ξ_0, ξ_1).

Если функция $f_*(x)$ уже определена на отрезке (ξ_0, ξ_k) и имеет на его конце ξ_k производные, равные

$$f_*(\xi_k) = \alpha_0,\ f'_*(\xi_k) = \alpha_1, \ldots, f_*^{(r-1)}(\xi_k) = \alpha_{r-1},$$

то положим

$$f_*(x) = f_k(x) + P_{r-1,k}(x) \text{ на отрезке } (\xi_k, \xi_{k+1}), \tag{2.8}$$

где $P_{r-1,k}$ есть многочлен степени $r-1$, подобранный так, чтобы правая часть (2.8) в точке ξ_k имела производные до $r-1$-го порядка включительно, равные соответственно числам $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$. Прибавление этого многочлена не влияет на величину (2.7) в силу того, что квадратурная формула $L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)$ точна для многочленов степени $r-1$, но в то же время это прибавление обеспечивает то обстоятельство, что функция $f_*(x)$ в узлах x_k будет непрерывной вместе со своими производными до $r-1$-го порядка включительно. Очевидно, построенная таким образом функция $f_* \in KW^{(r)}(a, b)$ и для нее левая часть (2.6) равна правой.

Теорема 1 дает оценку приближения квадратурной формулой (2.3) для всего класса $KW^{(r)}(a, b)$.

Следующая теорема дает индивидуализированную для каждой отдельной функции этого класса асимптотическую оценку.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет на отрезке* $[a, b]$ *непрерывную производную* $f^{(r)}(x)$ *порядка* r, $\xi_k = a + \frac{b-a}{n}k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, l — *натуральное число, удовлетворяющее неравенствам* $0 < l \leqslant n$, $\omega(f^{(r)}, h)$ — *модуль непрерывности* $f^{(r)}$ *на отрезке* $[a, b]$ *и*

$$\varkappa = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 F(t)\,dt.$$

Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\int_a^{\xi_l} f\,dx - \sum_0^{l-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^r \left\{\varkappa \int_a^{\xi_l} f^{(r)}(x)\,dx + O[\omega(f^{(r)}, h)\right\}, \quad (2.9)$$

где константу, входящую в O, можно взять не зависящей от l и модуля непрерывности ω.

Доказательство. Снова, как в (2.5), приняв еще во внимание (2.1), пишем

$$\int_a^{\xi_l} f\,dx - \sum_0^{l-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = \sum_0^{l-1} \left\{ \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f\,dx - L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right\} =$$

$$= h \sum_0^{l-1} \left\{ \int_0^1 f(\xi_k + hu)\,du - L[f(\xi_k + hu)] \right\} =$$

$$= \frac{h^{r+1}}{(r-1)!} \sum_0^{l-1} \int_0^1 F(u) f^{(r)}(\xi_k + hu)\,du = h^r(\sigma_1 + \sigma_2) \qquad \left(h = \frac{b-a}{n}\right), \quad (2.10)$$

где

$$\sigma_1 = \frac{h}{(r-1)!} \sum_0^{l-1} \int_0^1 F(u) f^{(r)}(\xi_k)\,du = \varkappa h \sum_0^{l-1} f^{(r)}(\xi_k),$$

$$\sigma_2 = \frac{h}{(r-1)!} \sum_1^{l-1} \int_0^1 F(u)[f^{(r)}(\xi_k + hu) - f^{(r)}(\xi_k)]\,du.$$

Но

$$\left| \int_0^{\xi_l} f^{(r)}(x)\,dx - h \sum_0^{l-1} f^{(r)}(\xi_k) \right| \leqslant \sum_0^{l-1} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} |f^{(r)}(x) - f^{(r)}(\xi_k)|\,dx \leqslant (b-a)\,\omega(f^{(r)}, h),$$

поэтому

$$\sigma_1 = \varkappa \int_0^{\xi_l} f^{(r)}(x)\,dx + O(\omega(f^{(r)}, h)). \quad (2.11)$$

Далее,

$$|\sigma_2| \leqslant \frac{h}{(r-1)!} \sum_0^{l-1} \int_0^1 |F(u)|\,\omega(f^{(r)}, h)\,du = \frac{(b-a)\int_0^1 |F|\,du}{(r-1)!}\,\omega(f^{(r)}, h) =$$

$$= O[\omega(f^{(r)}, h)]. \quad (2.12)$$

Из (2.10), (2.11) и (2.12) немедленно следует (2.9), причем константа, входящая в (2.9), не зависит от l, так как не зависят от l константы, входящие в (2.11) и (2.12). Этим теорема доказана.

Сделаем по поводу асимптотического равенства (2.9) несколько замечаний. Предположим, что наша квадратурная формула, точная для всех

многочленов степени $r-1$, уже не точна для многочленов степени r, т. е. будем считать, что

$$\int_0^1 x^r dx - L(x^r) \neq 0.$$

В таком случае, на основании формулы (2.1), примененной к функции $f(x)=x^r$, будем иметь:

$$\varkappa = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 F(t)\,dt = \frac{1}{r!}\left\{\int_0^1 x^r dx - L(x^r)\right\} \neq 0.$$

Возьмем совершенно произвольную функцию $f(x)$, имеющую на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, тождественно не равную нулю. Если бы $f^{(r)}(x)\equiv 0$, то f была бы многочленом степени $r-1$. В силу сделанного предположения относительно f, существует такое значение $c \in [a, b]$, что для него

$$\int_a^c f^{(r)}(x)\,dx \neq 0. \tag{2.13}$$

Подберем для каждого натурального n такое $l=l_n$, что $\xi_{l-1} < c \leqslant \xi_l$. В формуле (2.9), примененной для последовательности значений $l=l_1, l_2, \ldots$, соответствующих $n=1, 2, \ldots$, главный член в скобках правой части стремится при $n\to\infty$ к не равному нулю пределу и потому вся правая часть для таких l имеет при $n\to\infty$ порядок, строго равный $O(n^{-r})$. Этим мы показали, что для любой функции $f(x)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную порядка r, приближение определенного интеграла посредством квадратурной формулы (2.3) (точной для P_{r-1} и не точной для P_r) имеет, если не на отрезке $[a, b]$, то на некоторой его части $[a, c]$, порядок, строго равный $O(n^{-r})$.

Введем в рассмотрение функцию $\omega(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющую неравенствам

$$0 < \omega(x_2) - \omega(x_1) \leqslant \omega(x_2 - x_1) \quad (a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b). \tag{2.14}$$

Функция $\omega(x)$, таким образом, обладает всеми свойствами модуля непрерывности произвольной непрерывной функции.

Определим класс $W_\omega^{(r)}$ $(r \geqslant 0)$ функций, каждая из которых имеет производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую на отрезке $[a, b]$ неравенству

$$|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| \leqslant \omega(|h|) \tag{2.15}$$

для всех допустимых x и h.

ТЕОРЕМА 3. *Если квадратурная формула $L(f)$ точна для всех многочленов степени r, то для всех функций $f \in W_\omega^{(r)}$ при $r \geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_{k-1}, \xi_k; f)\right| \leqslant (b-a)^{r+1} c_r \frac{\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)}{n^r}, \tag{2.16}$$

где c_r определяется по (2.2). Это неравенство в смысле порядка точно.

Доказательство. Если в равенстве (2.1) подставить в качестве f функцию x^r, то, в силу того, что наша квадратурная формула на этот раз точна для x^r, мы получим

$$\int_0^1 F(u)\,du = 0. \tag{2.17}$$

Пусть теперь функция $f \in W_\omega^{(r)}$. Применим к ней преобразование (2.10), где положим $\xi_l = b$. Тогда, заметив, что в них, вследствие (2.17), величина $\sigma_1 = 0$, будем иметь:

$$\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = h^r \sigma_2 \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right), \tag{2.18}$$

где

$$\sigma_2 = \frac{h^r}{(r-1)!} \sum_0^{n-1} \int_0^1 F(u)\,[f^{(r)}(\xi_k + hu) - f^{(r)}(\xi_k)]\,du. \tag{2.19}$$

Но

$$|\sigma_2| \leqslant \frac{h}{(r-1)!} \sum_0^{n-1} \int_0^1 |F(u)|\,\omega(h)\,du = nhc_r\,\omega(h) = (b-a)\,c_r\,\omega(h),$$

что и доказывает неравенство (2.16).

Чтобы доказать вторую часть теоремы, выделим из отрезка [0,1] частичный отрезок $[\alpha, \beta]$ такой, что на нем функция

$$F(t) = \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_0^m p_k K_r(x_k - t)$$

сохраняет знак. Для определенности будем считать, что он положительный. Затем возьмем какую-либо функию $f_n(x)$, имеющую производную $f_n^{(r)}$ порядка r, определяемую при помощи равенств

$$f_n^{(r)}(\xi_k + hu) = \begin{cases} \omega(h\,\overline{u-\alpha}), \text{ если } \alpha \leqslant u \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \omega(h\,\overline{\beta - u}), \text{ если } \frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant u \leqslant \beta, \\ \quad 0 \quad, \text{ если } 0 \leqslant u \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant u \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\xi_k = \alpha + \frac{b-a}{n}k = a + hk \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Пользуясь (2.14), нетрудно установить, что $f_n^{(r)}(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию (2.15) и, следовательно, принадлежит к классу $W_\omega^{(r)}$. С другой стороны, в силу (2.18) и (2.19),

$$\int_a^b f_n dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f_n) = \frac{h^{r+1}}{(r-1)!} \sum_0^{n-1} \int_\alpha^\beta F(u)\,[f_n^{(r)}(\xi_k + hu) - f^{(r)}(\xi_k)]\,du >$$

$$> \frac{h^{r+1}}{(r-1)!} \sum_0^{n-1} \int_{\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4}}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} F(u)\,\omega(h\,\overline{u-\alpha})\,du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{h^{r+1}}{(r-1)!} n\omega\left(\frac{\beta-\alpha}{4}h\right) \int\limits_{\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4}}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} F(u)\,du >$$

$$> c\,\frac{\omega\left(\dfrac{\beta-\alpha}{4}\,\dfrac{b-a}{n}\right)}{n^r} > \frac{c_1\omega\left(\dfrac{b-a}{n}\right)}{n^r} \quad (c>0,\ n=1,2,\ldots),$$

и вторая часть теоремы доказана.

Примечание. В теореме 3 мы считали, что квадратурная формула L точна для многочленов степени r, в то время как в теореме 2 предполагалось, что L точна для многочленов степени $r-1$.

Это находится в существе дела, так как, если предположить в теореме 3, что $L(f)$ точна только для многочленов степени $r-1$, то это, как мы знаем, равносильно условию

$$\varkappa = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^1 F(u)\,du \neq 0,$$

и тогда для функции f, имеющей производную $f^{(r)}(x)$, равную тождественно на $[a, b]$ константе A, в силу (2.10), будем иметь приближение

$$\int\limits_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k,\ \xi_{k+1};\ f) = \frac{h^{r+1}}{(r-1)!}\sum_0^{n-1}\int\limits_0^1 F(u)\,A\,du = A\frac{h^r(b-a)}{(r-1)!}\int\limits_0^1 F(u)\,du,$$

которое, очевидно, можно сделать по абсолютной величине как угодно большим, если A достаточно велико, в то время как f при любом A остается принадлежащим к $W_\omega^{(r)}$.

Рассмотрим теперь какую-либо квадратурную формулу $L(f)$, точную для любой постоянной A, для которой таким образом выполняется равенство

$$\int\limits_a^b A\,dx = L(A) \quad \text{для всех } A, \tag{2.20}$$

и наряду с ней класс $W_\omega^{(0)}(a, b)$ функций f, удовлетворяющих на отрезке $[a, b]$ условию

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega(|h|).$$

ТЕОРЕМА 4. *Если функция $f \in W_\omega^{(0)}(a, b)$, то имеет место неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1};\ f)\right| \leqslant \left(1+\sum_0^m |p_k|\right)(b-a)\,\omega\left(\frac{b-a}{n}\right), \tag{2.21}$$

точное в смысле порядка.

Доказательство. Допустим пока, что $f \in W_\omega^{(0)}(0, 1)$ и пусть

$$f(x) = f(0) + \varphi(x).$$

Тогда, в силу неравенства

$$|\varphi(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant \omega(1)$$

и (2.20), будем иметь

$$\left|\int_0^1 f\,dx - L(f)\right| = \left|\int_0^1 \varphi\,dx - \sum_0^m p_k\varphi(x_k)\right| \leqslant \omega(1)\left(1 + \sum_0^m |p_k|\right).$$

Если теперь $f \in W_\infty^{(\omega)}(a, b)$, то, применяя к этой функции равенство (2.5) и учитывая, что

$$|f(\xi_k + hu'') - f(\xi_k + hu')| \leqslant \omega(h\,\overline{u'' - u'}), \quad 0 \leqslant u' \leqslant u'' \leqslant 1,$$

получим

$$\left|\int_a^b f\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)\right| \leqslant h \sum_0^{n-1} \left|\int_0^1 f(\xi_k + hu)\,du - L[f(\xi_k + hu)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_0^{n-1} \omega(h)\left(1 + \sum_0^m |p_k|\right) = \left(1 + \sum_0^m |p_k|\right)(b - a)\,\omega(h),$$

и неравенство (2.21) доказано.

Определим еще функцию $f_n(x)$ при помощи следующих равенств:

$$f_n(\xi_k + hu) = \begin{cases} \omega(h\,\overline{u - x_0}), & \text{если } x_0 \leqslant u \leqslant \dfrac{x_0 + x_1}{2}, \\ \omega(h\,\overline{x_1 - u}), & \text{если } \dfrac{x_0 + x_1}{2} \leqslant u \leqslant x_1, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant u \leqslant x_0,\ x_1 \leqslant u \leqslant 1 \end{cases}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Легко видеть, что $f_n(\xi_k + hu)$ принадлежит к $W_\infty^{(\omega)}(a, b)$ и правая часть (1.6) для нее обращается в нуль. Поэтому, полагая $x_2 - x_1 = 4\alpha$, будем иметь:

$$\int_a^b f_n\,dx - \sum_0^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = \int_a^b f_n\,dx =$$

$$= h \sum_0^{n-1} \int_0^1 f_n(\xi_k + hu)\,du = h \sum_0^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} f_n(\xi_k + hu)\,du =$$

$$= 2h \sum_0^{n-1} \int_0^{2\alpha} \omega(hv)\,dv > 2h \sum_0^{n-1} \int_\alpha^{2\alpha} \omega(hv)\,dv \geqslant$$

$$\geqslant 2h\alpha\omega(\alpha h)\,n = 2(b - a)\,\alpha\omega(\alpha h) = c\omega(\alpha h) > c_1\omega\left(\frac{b - a}{n}\right),$$

и этим доказана вторая часть утверждения теоремы *.

---

* Отеметим здесь работу А. Х. Турецкого ([2]), в которой даны в некоторых частных случаях теоремы 4 более точные оценки.

§ 3. Многомерный случай

Будем все рассмотрения вести для двух переменных. Для многих переменных они аналогичны. Кроме того, ограничимся рассмотрением интегралов вида

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy.$$

Возьмем в качестве исходных какие-либо две квадратурные формулы вида (1.3):

$$L(f) = \sum_0^m p_k f(x_k), \quad 0 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1,$$

$$L_1(f) = \sum_0^{m_1} p'_k f(y_k), \quad 0 \leqslant y_0 < y_1 < \cdots < y_{m_1} = 1,$$

удовлетворяющие условиям

$$\sum_0^m p_k = \sum_0^{m_1} p'_k = 1. \tag{3.1}$$

Если на прямоугольнике $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ задана непрерывная функция $f(x, y)$, то, применяя к ней сначала по y квадратурную формулу L_1, а затем по x — квадратурную формулу L, или производя эти операции в обратном порядке, получим двумерную квадратурную формулу

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy \sim \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m_1} p_k p'_l f(x_k, y_l) = L(0,1;\, 0,1;\, f). \tag{3.2}$$

Пусть еще мы имеем два класса функций $\varphi = \varphi(x)$, заданных на отрезке $[0,1]$: H и H_1; положим

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in H} \left| \int_0^1 \varphi\, dx - L(\varphi) \right| &= c, \\ \sup_{\varphi \in H_1} \left| \int_0^1 \varphi\, dx - L_1(\varphi) \right| &= c_1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Если функция $f(x, y)$, заданная на прямоугольнике $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$, обладает тем свойством, что для всякого y по x она принадлежит к H и для всякого x по y принадлежит к H_1, то, в силу (3.1) и (3.3), приближение при помощи нашей двумерной формулы (3.2) будет удовлетворять неравенству

$$\begin{gathered} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy - \sum_0^m \sum_0^{m_1} p_k p'_l f(x_k, y_l) \right| = \\ = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy - \int_0^1 \sum_{k=0}^m p_k f(x_k, y)\, dy + \sum_{k=0}^m p_k \int_0^1 f(x_k, y)\, dy - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{m_1} p_k p'_l f(x_k, y_l) \right| \leqslant \int_0^1 \left| \int_0^1 f(x, y)\, dx - \sum_{k=0}^m p_k f(x_k, y) \right| dy + \\ + \sum_{k=0}^m p_k \left| \int_0^1 f(x_k, y)\, dy - \sum_{l=0}^{m_1} p'_l f(x_k, y_l) \right| \leqslant c + c_1 \sum_{k=0}^m |p_k| \end{gathered} \tag{3.4}$$

или неравенству

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy - \sum_0^m \sum_0^{m_1} p_k p'_l f(x_k, y_l) \right| \leqslant c \sum_{l=0}^{m_1} |p'_k| + c_1, \tag{3.5}$$

которое получается аналогичным рассуждением.

Исходя из формулы (3.2) для произвольного прямоугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, можно теперь построить новую квадратурную формулу:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy \sim L(a, b;\ c, d;\ f) =$$

$$= (b-a)(d-c) \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m_1} p_k p_l f\,[a + \overline{b-a}x_k,\ c + \overline{d-c}y_k],$$

которую естественно назвать подобной исходной. Наконец, мы можем прямоугольник разбить на $\mu\nu$ равных прямоугольников

$\sigma_{ik}(\xi_i \leqslant x \leqslant \xi_{i+1},\ \eta_k \leqslant y \leqslant \eta_{k+1})$ $\quad (i = 0, 1, \ldots, \mu - 1,\ k = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$, где точки ξ_i и η_k делят соответственно отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ на равные части, а затем к каждому такому прямоугольнику применить соответствующую подобную формулу

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy \sim \sum_{i=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\nu-1} L_{ik}(f).$$

ТЕОРЕМА 1′. *Пусть функция $f(x, y)$ имеет частные производные по x порядка r и по y — порядка s, удовлетворяющие на прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $x \leqslant y \leqslant d$ неравенствам*

$$\left| \frac{\partial^r f}{\partial x^r} \right| \leqslant M, \quad \left| \frac{\partial^s f}{\partial y^s} \right| \leqslant N.$$

Пусть, кроме того, квадратурные формулы $L(f)$ и $L_1(f)$ типа (1.3) точны соответственно для многочленов степеней $r - 1$ и $s - 1$. Тогда

$$\left| \int_a^b \int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ik}(f) \right| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)(d-c) \left[c_r M \left(\frac{b-a}{\mu} \right)^r + c_s \sum_0^m |p_k|\, N \left(\frac{d-c}{\nu} \right)^s \right],$$

где c_r и c_s — константы, определяемые по (2.2) соответственно для $L(f)$ и $L_1(f)$.

Доказательство. Полагая $h = \frac{b-a}{\mu}$, $g = \frac{c-d}{\nu}$, будем иметь:

$$\int_a^b \int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ik}(f) = \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} \Big(\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f\,dx\,dy - L_{ik}(f) \Big) =$$

$$= hg \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} \Big\{ \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_i + hu,\ \eta_k + gv)\,du\,dv - L(0,1;\ 0,1;\ f(\xi_i + hu,\ \eta_k + gv) \Big\}. \tag{3.6}$$

Функция $f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)$ имеет по u частную производную порядка r, не превышающую по абсолютной величине Mh^r, и по v — частную производную порядка s, не превышающую по абсолютной величине Ng^s, таким образом, она принадлежит по u к классу $Mh^rW^{(r)}(0, 1)$ и по v — к классу $Mg^sW^{(r)}(0, 1)$. Поэтому, на основании теоремы 1, в которой надо считать $a = 0$, $b = 1$, $K = Mh^r$, $n = 1$, имеет место:

$$\left| \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)\, du - L_u(f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)) \right| \leqslant c_r Mh^r$$

и аналогично

$$\left| \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)\, dv - L_v(f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)) \right| \leqslant c_s Ng^s.$$

Заметим, что применение теоремы 1 законно только в силу предположения, что формулы L и L_1 точны соответственно для многочленов степеней $r - 1$ и $s - 1$.

Отсюда, вследствие неравенства (3.4), в котором надо считать $c = c_r Mh^r$, $c_1 = c_s Ng^s$, получим:

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 f\, dx\, dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ik}(f) \right| \leqslant$$

$$\leqslant hg \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)\, du\, dv - L(0,1; 0,1; f(\xi_i + hu, \eta_k + gv) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu\nu hg \left(c_r Mh^r + c_s Ng^s \sum_0^m |p_k| \right) =$$

$$= (b - a)(d - c)\left[c_r M \left(\frac{b - a}{\mu}\right)^r + c_s \sum_0^m |p_k| N \left(\frac{d - c}{\nu}\right)^s \right].$$

ТЕОРЕМА 3′. *Пусть функция $f(x, y)$ имеет частные производные соответственно порядка r по x ($r \geqslant 1$) и s по y ($s \geqslant 1$), удовлетворяющие на прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ условиям:*

$$\begin{aligned} |f_x^{(r)}(x', y) - f_x^{(r)}(x, y)| &\leqslant \omega(|x' - x|), \\ |f_y^{(s)}(x, y') - f_y^{(s)}(x, y)| &\leqslant \omega_1(|y' - y|), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где ω и ω_1 — функции, подчиняющиеся неравенствам (2.14). Пусть, кроме того, квадратурные формулы $L(f)$ и $L_1(f)$ типа (1.3) точны соответственно для многочленов степеней r и s. Тогда

$$\left| \int_a^b \int_c^d f\, dx\, dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ik}(f) \right| \leqslant$$

$$\leqslant (b - a)(d - c)\left[c_r \left(\frac{b - a}{\mu}\right)^r \omega\left(\frac{b - a}{\mu}\right)^r + c_s \sum_0^m |p_k| \left(\frac{d - c}{\nu}\right)^s \omega_1\left(\frac{d - c}{\nu}\right) \right]. \tag{3.8}$$

Доказательство. Воспользуемся снова равенством (3.6), но на этот раз к членам, входящим в двойную сумму правой части, применим теорему 3. Для этого надо только принять во внимание, что функция $f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)$ имеет по u и v производные порядков r и s, удовлетворяющие, вследствие (3.7), на прямоугольнике $0 \leqslant u, \ v \leqslant 1$ неравенствам

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^r}{\partial u^r} f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)_{u=u'} - \frac{\partial^r}{\partial u^r} f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)_{u=u''} \right| = \\ &= h^r \left| f_x^{(r)}(\xi_i + hu', \eta_k + gv) - f_x^{(r)}(\xi_i + hu'', \eta_k + gv) \leqslant \right. \\ &\leqslant h^r \omega(h|u' - u''|), \quad 0 \leqslant u'' < u' \leqslant 1, \\ &\left| \frac{\partial^r}{\partial v^r} (\xi_i + hu, \eta_k + gv)_{v=v'} - \frac{\partial^s}{\partial v^s} f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)_{v=v''} \right| = \\ &= g^r \left| f_y^{(s)}(\xi_i + hu, \eta_k + gv') - f_y^{(s)}(\xi_i + hu, \eta_k + gv'') \right| \leqslant \\ &\leqslant g^s \omega(g|v' - v''|), \quad 0 \leqslant v'' < v' \leqslant 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким образом, по теореме 3, где надо считать $a = 0$, $b = 1$, $n = 1$ и заменить $\omega(x)$ на $h^r\omega(hx)$, будем иметь:

$$\left| \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)\, du - L_u(f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)) \right| \leqslant c_r h^r \omega(h) \tag{3.10}$$

и аналогично

$$\left| \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)\, dv - L_v(f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)) \right| \leqslant c_s g^s \omega_1(g)$$

и, следовательно, из (3.6), на основании неравенства (3.4), полагая в нем $c = c_r h^r \omega(h)$ и $c_1 = c_s g^s \omega_1(g)$, получим

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b \int_c^d f\, dx\, dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ik}(f) \right| \leqslant hg \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)\, du\, dv - \right. \\ &\qquad - L(0{,}1;\, 0{,}1;\, f(\xi_i + hu, \eta_k + gv)) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \mu\nu hg \left(c_r h^r \omega(h) + c_s g^s \omega_1(g) \sum_{k=0}^m |p_k| \right) = \\ &= (b-a)(d-c) \left[c_r \left(\frac{b-a}{\mu} \right)^r \omega\left(\frac{b-a}{\mu} \right) + c_s \sum_0^m |p_k| \left(\frac{d-c}{\nu} \right)^s \omega_1\left(\frac{d-c}{\nu} \right) \right]. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4'. *Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет на прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ условиям:*

$$|f(x', y) - f(x, y)| \leqslant \omega(|x' - x|),$$
$$|f(x, y') - f(x, y)| \leqslant \omega_1(|y' - y|)$$

и, кроме того, квадратурные формулы $L(f)$ и $L_1(f)$ точны для констант.

Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b \int_c^d f\, dx\, dy - \sum_0^{\mu-1} \sum_0^{\nu-1} L_{ik}(f) \right| \leqslant A\omega\left(\frac{b-a}{\mu} \right) + B\omega_1\left(\frac{d-c}{\nu} \right), \tag{3.11}$$

где A и B — константы [см. ниже (3.12)].

Доказательство. Неравенства (3.9) и (3.10) верны и при $r=0$, т. е. для самой функции f, поэтому, по теореме 4, где надо считать $a=0$, $b=1$, $n=1$, будем иметь:

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_k+gv)\,du - L_u(f(\xi_i+hu, \eta_k+gv))\right| \leqslant \left(1+\sum_0^m |p_k|\right)\omega(h),$$

$$\left|\int_0^1 f(\xi_i+hu, \eta_k+gv)\,dv - L_v(f(\xi_i+hu, \eta_k+gv)\right| \leqslant \left(1+\sum_0^{m_1} |p'_k|\right)\omega_1(g)$$

и, следовательно, из (3.6), на основании неравенства (3.4), полагая в нем

$$c=\left(1+\sum_0^m |p_k|\right)\omega(h), \quad c_1=\left(1+\sum_0^{m_1} |p'_k|\right)\omega_1(g),$$

получим

$$\left|\int_a^b\int_c^d f\,dx\,dy - \sum_0^{\mu-1}\sum_0^{\nu-1} L_{ik}(f)\right| \leqslant \mu\nu hg\,(A_1\,\omega(h)+B_1\omega_1(g)) = A\omega(h)+B\omega_1(g),$$

где

$$\begin{aligned} A &= (b-a)(d-c)\left(1+\sum_0^m |p_k|\right),\\ B &= (b-a)(d-c)\sum_0^m |p_k|\left(1+\sum_0^{m_1}|p'_k|\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

§ 4. Некоторые численные результаты

Из предыдущего видно, какое большое значение имеет для оценок приближений квадратурными формулами знание констант c_r. В моей работе ([1]) приведена таблица точных оценок для простейших квадратурных формул. Из нее нетрудно для указанных там квадратурных формул извлечь численные значения c_r (определенные для стандартного отрезка [0, 1]).

Так, для формулы прямоугольников $x_0=\frac{1}{2}$, $p_0=1$ имеет место

$$c_1=\frac{1}{4}.$$

Для формулы трапеций $x_0=0$, $x_1=1$, $p_0=\frac{1}{2}$, $p_1=\frac{1}{2}$

$$c_2=\frac{1}{12}.$$

Для формулы Симпсона (точной для многочленов второй и третьей степени)

$x_0=0$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $p_0=p_2=\frac{1}{6}$, $p_1=\frac{2}{3}$

$$c_3=\frac{1}{576}, \quad c_4=\frac{1}{2880}.$$

Ниже мы приводим еще численные выражения для двух более сложных квадратурных формул Котеса, полученные студентом МГУ П. Пилико.

Для формулы Котеса с четырьмя (равноотстоящими) узлами

$$x_k = \frac{k}{3}\,(k=0,\,1,\,2,\,3), \quad p_0 = p_3 = \frac{1}{8}, \quad p_1 = p_2 = \frac{3}{8},$$

которая точна для всех многочленов третьей степени,

$$c_4' = \frac{1}{64080}.$$

Для формулы Котеса с пятью узлами:

$$x_k = \frac{k}{4}\,(k=0,\,1,\,\ldots,\,4), \quad p_0 = p_4 = \frac{7}{90}, \quad p_1 = p_3 = \frac{32}{90}, \quad p_2 = \frac{12}{90}$$

(точной для многочленов четвертой степени)

$$c_5 = \frac{1}{345600}.$$

Сопоставление констант c_4 и c_4' особенно интересно, так как обе они относятся к формулам, точным для многочленов одной и той же (третьей) степени. Мы видим, что формула Котеса, усложненная сравнительно с формулой Симпсона одним лишним узлом, дает для класса $W^{(4)}$ ошибку, примерно, в двадцать раз меньшую, чем формула Симпсона.

Поступило
4. X. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, Успехи мат. наук, т. V, вып. 2 (1950), 165—177.

[2] Турецкий А. Х., Об оценках приближений квадратурными формулами для функций, удовлетворяющих условию Липшица, Успехи мат. наук, т. VI, вып. 5 (1951), 166—171.

[3] Милн В. Э., Численый анализ, ИЛ, 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 197—210

И. М. ВИНОГРАДОВ

НОВЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ СУММЫ ЗНАЧЕНИЙ $\chi(p+k)$

Работа содержит вывод новой оценки для суммы значений характера по простому модулю q, отличного от главного при условии, что аргумент пробегает числа вида $p+k$, где k — постоянное, а p — простое, не превосходящее N. Оценка нетривиальна при $N>q^{0,75+\varepsilon}$. Даны приложения к вопросу о распределении вычетов и невычетов степени n по модулю q чисел вида $p+k$.

Обозначения. Примем обозначения:

c — положительное постоянное,

ε — произвольно малое положительное постоянное,

q — простое, $q\geqslant c_0$, где c_0 — достаточно большое, превосходящее 2, $\chi(a)$ — характер по модулю q, отличный от главного.

При $(a, q)=1$ символ a' обозначает число, удовлетворяющее сравнению $aa'\equiv 1 \pmod q$; при $(a, q)=q$ полагаем $a'=0$. Вместо $\chi(ba')$ пишем $\chi\left(\frac{b}{a}\right)$.

Точка (x, y) называется целою, если обе ее координаты x и y суть целые числа.

k — постоянное целое, не делящееся на q.

p — переменное, пробегающее простые числа.

Обозначение $A\ll B$ при положительном B показывает, что $|A|B^{-1}$ не превосходит положительного постоянного числа.

Символ $\sum\limits_{z}$ обозначает суммирование, распространенное на указанные значения z.

Весьма большую помощь в решении вопросов теории чисел может оказать уменье оценивать верхнюю границу для числа попадающих в заданный малый интервал значений функции от одного или нескольких целочисленных аргументов. Иногда лучшие результаты дает оценка суммы квадратов таких чисел, когда одновременно рассматривается много вышеуказанных малых интервалов. Настоящая работа содержит применение этого общего соображения к выводу новой оценки для суммы вида

$$\sum_{p\leqslant N}\chi(p+k).$$

В отличие от прежней моей оценки [1], нетривиальной при $N>q^{1+\varepsilon}$, новая оценка нетривиальна уже при всех N с условием $N>q^{0,75+\varepsilon}$. Эта

оценка позволяет вывести новые асимптотические формулы, характеризующие распределение вычетов и невычетов степени n по модулю q для чисел вида $p+k$. Краткое сообщение об основном результате этой работы в менее совершенной форме было дано раньше ([2]).

ЛЕММА 1. *Пусть X и U — числа с условием $2 \leqslant 2X \leqslant U < q$, η_0 — целое число с условием $0 < \eta_0 < q$, наконец, пусть $\lambda(u)$ обозначает число решений сравнения $kx' + \eta \equiv u \pmod q$ при условии, что x и η независимо друг от друга пробегают целые числа интервалов $U - X < x \leqslant U$, $0 < \eta \leqslant \eta_0$. Тогда, полагая*

$$L = \sum_{u=0}^{q-1} (\lambda(u))^2,$$

будем иметь

$$L \ll \eta_0^3 U X q^{\varepsilon - 1} + X\eta_0 + \eta_0^2 q^{\varepsilon}.$$

Доказательство. Очевидно, L есть число решений сравнения

$$k(x_1' - x') + \eta_1 - \eta \equiv 0 \pmod q,$$

где x_1 пробегает те же значения, что и x, а η_1 пробегает те же значения, что и η. Отсюда легко найдем, что

$$L \ll X\eta_0 + T\eta_0,$$

где T есть число решений сравнения

$$k(x_1' - x') + \eta \equiv 0 \pmod q.$$

Нетрудно убедиться, что T есть также число решений уравнения

$$(\eta x_1 + k)(\eta x - k) + k^2 = q\eta z$$

при условии, что x_1, x, η пробегают указанные выше значения и z пробегает целые числа. Часть числа T, отвечающая данным η и z, очевидно $\ll q^{\varepsilon}$. А так как при данном η разность между наибольшим и наименьшим значениями левой части последнего уравнения будет $\ll \eta^2 UX$, то z при данном η может принимать лишь $\ll \eta^2 UX(q\eta)^{-1} + 1 \ll \eta UXq^{-1} + 1$ различных значений. Поэтому часть числа T, отвечающая данному η, будет $\ll (\eta UXq^{-1} + 1) q^{\varepsilon}$ и, следовательно,

$$T \ll (\eta_0^2 UXq^{-1} + \eta_0) q^{\varepsilon}, \quad L \ll X\eta_0 + (\eta_0^3 UXq^{-1} + \eta_0^2) q^{\varepsilon}.$$

ЛЕММА 2. *Пусть X_0, U_0, Y_0, V_0 — числа с условиями $2 \leqslant 2X_0 \leqslant U_0 < q$, $1 \leqslant Y_0 \leqslant V_0 < q$ и пусть*

$$S_1 = \sum_x \sum_y \psi(x)\chi(xy + k),$$

где x и y пробегают все целые числа с условиями

$$U_0 - X_0 < x \leqslant U_0, \quad V_0 - Y_0 < y \leqslant V_0$$

и $\psi(x)$ удовлетворяет условию $0 \leqslant \psi(x) \leqslant q^{\varepsilon_1}$. Тогда имеем

$$S_1 \ll X_0 Y_0 q^{\varepsilon'} \left(\left(\frac{qU_0}{X_0^2 Y_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q}{X_0^2 Y_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Доказательство. Полагая

$$\eta_1 = [q^{0,5} U_0^{-0,5}],$$

находим

$$S_1 = \frac{1}{\eta_1} \sum_x \psi(x) \sum_{\eta=1}^{\eta_1} \sum_y \chi(x(y+\eta)+k) + O(X_0 \eta_1 q^{\varepsilon_1}) \ll$$

$$\ll \frac{q^{\varepsilon_1}}{\eta_1} \sum_x \sum_\eta \Big| \sum_y \chi(kx' + \eta + y) \Big| + X_0 \eta_1 q^{\varepsilon_1} \ll$$

$$\ll \frac{q^{\varepsilon_1}}{\eta_1} \sum_{u=0}^{q-1} \lambda(u) \Big| \sum_y \chi(u+y) \Big| + X_0 \eta_1 q^{\varepsilon_1},$$

где $\lambda(u)$ есть число решений сравнения $kx' + \eta \equiv 0 \pmod q$. Отсюда следует:

$$S_1^2 \ll \frac{q^{2\varepsilon_1}}{\eta_1^2} \sum_{u=0}^{q-1} (\lambda(u))^2 \sum_{u=0}^{q-1} \sum_{y_1} \sum_y \chi(u+y_1) \overline{\chi}(u+y) + X_0^2 \eta_1^2 q^{2\varepsilon_1},$$

где $\overline{\chi}(a)$ обозначает характер, сопряженный с $\chi(a)$, и y_1 пробегает те же значения, что и y. Суммирование по u при данных y_1 и y дает $q-1$ или -1 в зависимости от того, будут ли y_1 и y равны между собою или нет. Поэтому

$$S_1^2 \ll \frac{q^{2\varepsilon_1}}{\eta_1^2} \sum_{u=0}^{q-1} (\lambda(u))^2 qY_0 + X_0^2 \eta_1^2 q^{2\varepsilon_1},$$

откуда, согласно лемме 1,

$$S_1^2 \ll \frac{q^{2\varepsilon_1}}{\eta_1^2} (\eta_1^3 U_0 X_0 q^{\varepsilon_1 - 1} + X_0 \eta_1 + \eta_1^2 q^{\varepsilon_1}) qY_0 + X_0^2 \eta_1^2 q^{2\varepsilon_1} \ll$$

$$\ll q^{\varepsilon'} (\eta_1 U_0 X_0 Y_0 + X_0 Y_0 \eta_1^{-1} q + qY_0 + X_0^2 \eta_1^2) \ll$$

$$\ll q^{\varepsilon'} (X_0 Y_0 \sqrt{qU_0} + qY_0 + X_0^2 q U_0^{-1});$$

$$S_1 \ll X_0 Y_0 q^{\varepsilon'} \left(\left(\frac{qU_0}{X_0^2 Y_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q}{X_0^2 Y_0} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{q}{U_0 Y_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right);$$

$$S_1 \ll X_0 Y_0 q^{\varepsilon'} \left(\left(\frac{qU_0}{X_0^2 Y_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q}{X_0^2 Y_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Последнее неравенство при $\frac{qU_0}{X_0^2 Y_0^2} \ll 1$ следует из предыдущего; в противном случае оно тривиально.

ЛЕММА 3. *Пусть* $1 \leqslant U < q$, $q^{\frac{3}{4}} \ll N \ll q^{\frac{5}{4}}$,

$$S = \sum_{xy \leqslant N} \sum \psi(x) \chi(xy+k),$$

где x пробегает все целые положительные числа, не превосходящие U, а y пробегает некоторый ряд последовательных целых положительных

чисел, меньших q, *причем* $\psi(x)$ *удовлетворяет условию* $0 \leqslant \psi(x) \leqslant q^{\varepsilon_1}$. *Тогда имеем*

$$S \ll N q^{\varepsilon''} \left(\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}} \right).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассматривать лишь случай, когда

$$\frac{N^2}{qU} > q^{\varepsilon_1}.$$

Пусть сначала $U \leqslant (N^4 q^{-1})^{\frac{1}{8}}$. Тогда, согласно известной оценке для суммы значений характеров, находим:

$$S \ll q^{\varepsilon_1} U \sqrt{q} \ln q \ll q^{\varepsilon'''} N \frac{U}{N} \sqrt{q} \ll q^{\varepsilon'''} N \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

Пусть, далее, $U > (N^4 q^{-1})^{\frac{1}{8}}$. Тогда, обозначая буквой t_0 наименьшее целое число с условием $U 2^{-t_0} \leqslant (N^4 q^{-1})^{\frac{1}{8}}$, будем иметь

$$S = S' + S'',$$

где S' содержит слагаемые с $x \leqslant U 2^{-t_0}$, а S'' содержит слагаемые с $x > U 2^{-t_0}$. Согласно только что рассмотренному случаю, имеем

$$S' \ll q^{\varepsilon'''} N \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

Интервал суммирования $U 2^{-t_0} < x \leqslant U$ суммы S'' мы разобьем на $t_0 \ll \ln n$ интервалов вида

$$u' < x \leqslant u, \quad u' = U 2^{-t}, \quad u = 2u',$$

где t имеет одно из значений $t = t_0, \ldots, 1$.

Рассмотрим часть S_0 суммы S'', отвечающую интервалу $u' < x \leqslant u$. Пусть

$$\delta = \min\left(\left(\frac{N^2}{qu}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{N^4}{q^3}\right)^{\frac{1}{8}} \right).$$

Очевидно

$$\delta = \left(\frac{N^2}{qU}\right)^{\frac{1}{4}}, \text{ если } U \geqslant \sqrt{q}; \quad \delta = \left(\frac{N^4}{q^3}\right)^{\frac{1}{8}}, \text{ если } U \leqslant \sqrt{q}.$$

Имеем:

$$\frac{u}{\delta} \geqslant \frac{(N^4 q^{-1})^{\frac{1}{8}}}{(N^4 q^{-3})^{\frac{1}{8}}} = q^{\frac{1}{4}}.$$

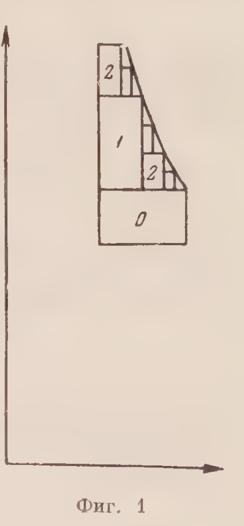
При $U \geqslant \sqrt{q}$ имеем

$$\frac{N}{u\delta} \geqslant \frac{N}{U} \left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{N^2 q}{U^3}\right)^{\frac{1}{4}} \geqslant \left(\frac{N^2}{qU}\right)^{\frac{1}{4}} > q^{\varepsilon_1},$$

а при $U \leqslant \sqrt{q}$ имеем

$$\frac{N}{u\delta} \geqslant \frac{N}{\sqrt{q}\,(N^4 q^{-3})^{\frac{1}{8}}} = \frac{N^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{8}}} \gg q^{\frac{3}{8}-\frac{1}{8}} = q^{\frac{1}{4}}.$$

Пусть s_0 — наибольшее целое число с условием $2^{s_0} \leqslant \delta$. Чтобы оценить сумму S_0, применим способ исчерпывания. Пусть y' — наибольшее целое число, меньшее наименьшего значения y, и y'' — наибольшее значение y. Для суммы S_0, суммирование распространяется на все целые точки (x, y) области, ограниченной прямыми $x = u'$, $x = u$, $y = y'$, $y = y''$ и гиперболой $xy = N$, причем точки прямых $x = u'$, $y = y'$ к области не причисляются. Из этой области выделим области с номерами $0, 1, \ldots, s_0$, согласно схеме, указанной на прилагаемом чертеже (причем точки прямых, ограничивающих выделенную область слева и снизу, к этой области не причисляются). Область с номером s изобразится прямоугольником с основанием $(u - u')\,2^{-s} = u2^{-s-1}$ и высотою порядка $\frac{N}{u} 2^{-s}$. Оба последние числа, как было показано выше, $> 0{,}5\, q^{\varepsilon_1}$. В исключительных случаях, когда область прилегает к прямой $y = y'$ или же к прямой $y = y''$, высота области может оказаться меньше 1. Однако очевидно, что общее число целых точек, принадлежащих таким исключительным областям, будет $(qU \leqslant N^2)$



Фиг. 1

$$\ll U = N\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} q^{-\frac{1}{2}} (qU)^{\frac{1}{4}} U^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}} \ll N\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Пусть $S(s)$ — часть суммы S_0, отвечающая какой-либо из областей с номером s, не принадлежащих к числу исключительных. Применяя лемму 2 (берем $S(s)$, $u2^{-s}$, u, $Nu^{-1}2^{-s}$ вместо S_1, X_0, U_0, Y_0), получим:

$$S(s) \ll N2^{-2s} q^{\varepsilon'} \left(\left(\frac{qu}{N^2 2^{-4s}}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q}{N2^{-2s} u 2^{-s}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ll N2^{-s} q^{\varepsilon'} \left(\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q\delta}{Nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Но при $U \leqslant \sqrt{q}$ имеем

$$\delta = (N^4 q^{-3})^{\frac{1}{8}},$$

а при $U > q$ имеем

$$\delta = (N^2 q^{-1} U^{-1})^{\frac{1}{4}} < (N^4 q^{-3})^{\frac{1}{8}}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{q\delta}{NU}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\frac{qN^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{8}}}{N\,(N^4q^{-1})^{\frac{1}{8}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

Поэтому

$$S(s) \ll N\,2^{-s}q^{\varepsilon'}\left(\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}\right)$$

и, следовательно, сумма всех $S(s)$, отвечающих данному s, будет

$$\ll Nq^{\varepsilon'}\left(\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}\right).$$

Часть суммы S_0, отвечающая точкам, не принадлежащим ни одной из выделенных областей, численно будет не больше произведения числа таких точек на q^{ε_1} и, следовательно, будет

$$\ll q^{\varepsilon_1}u2^{-s_0}\left(\frac{N}{u} - \frac{N}{u'}\right) \ll q^{\varepsilon_1}N2^{-s_0} \ll q^{\varepsilon_1}\frac{N}{\delta} \ll Nq^{\varepsilon_1}\left(\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}\right).$$

Собирая все доказанное, мы и убеждаемся в справедливости нашей леммы.

ЛЕММА 4. *Пусть*

$$S = \sum_{x=x_1}^{x_2} \chi\left(\frac{x+a}{x+b}\right),$$

где x_1, x_2, a, b — целые числа, причем $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 < q$ и $b-a$ не делится на q. Тогда

$$S \ll q^{\frac{1}{2}} \ln q.$$

Доказательство. Эта лемма есть следствие неравенства [см. ([3])]:

$$\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{mx}{q}}\chi\left(\frac{x+a}{x+b}\right) \ll q^{\frac{1}{2}},$$

справедливого при любом целом m.

ЛЕММА 5. *Пусть X_0, U_0, Y_0, V_0 — числа с условиями*

$$1 \leqslant X_0 \leqslant U_0, \quad 1 \leqslant Y_0 \leqslant V_0 < q$$

и пусть x и y пробегают целые числа с условиями

$$U_0 - X_0 < x \leqslant U_0, \quad V_0 - Y_0 < y \leqslant V_0.$$

Пусть, далее,

$$S_1 = \sum_x \sum_y \psi(x)\,\psi_1(y)\,\chi(xy+k),$$

где $\psi(x)$ и $\psi_1(y)$ — функции с условиями

$$0 \leqslant \psi(x) \ll q^{\varepsilon_2}, \quad 0 \leqslant \psi_1(y) \ll q^{\varepsilon_2}.$$

Тогда имеем

$$S_1 \ll q^{\varepsilon_3}X_0Y_0\sqrt{\frac{q^{0,5}}{X_0} + \frac{1}{Y_0} + \frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Находим

$$S_1^2 \ll X_0 q^{\varepsilon_2} \sum_{y_1} \sum_{y} \psi_1(y_1)\, \psi_1(y) \sum_{x} \chi\left(\frac{xy_1+k}{xy+k}\right),$$

где y_1 пробегает те же самые значения, что и y. При $y_1 = y$ в результате суммирования по x получим число $\ll X_0$, а при y_1, отличном от y, в результате суммирования по x получим число (суммирование по x по полной системе вычетов по модулю q дает число $\ll 1$; к суммированию по неполной системе вычетов применяем лемму 4)

$$\ll \frac{X_0}{q} + q^{0,5} \ln q.$$

Поэтому

$$S_1^2 \ll X_0 q^{\varepsilon_2}\left(X_0 Y_0 + \left(\frac{X_0}{q} + q^{0,5} \ln q\right) Y_0^2\right) \ll X_0^2 Y_0^2 q^{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{Y_0} + \frac{1}{q} + \frac{q^{0,5}}{X_0}\right),$$

откуда и убеждаемся в справедливости леммы.

ЛЕММА 6. *Пусть* $q^{0,5} \leqslant U \leqslant N,\ 0 < c < 0,5;\ cU \leqslant U_0 \leqslant 0,5U,$

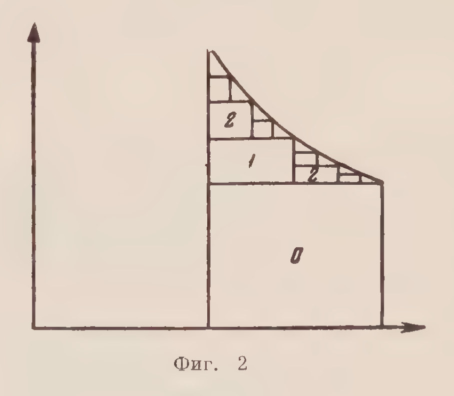
$$S = \sum_{xy \leqslant N} \sum \psi(x)\, \psi_1(y)\, \chi(xy+k),$$

где x *пробегает целые числа с условием* $U - U_0 < x \leqslant U$, *а* y *пробегает все целые положительные числа, причем* $\psi(x)$ *и* $\psi_1(y)$ — *функции с условиями*

$$0 \leqslant \psi(x) \leqslant q^{\varepsilon_2}; \quad 0 \leqslant \psi_1(y) \leqslant q^{\varepsilon_2}.$$

Тогда имеем

$$S \ll N q^{\varepsilon_5} \Delta; \ \Delta = \sqrt{\frac{q^{0,5}}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q}}.$$



Фиг. 2

Доказательство. Достаточно рассматривать случай $\Delta < q^{-0,5\varepsilon_5}$, так как в противном случае лемма очевидна. Пусть s_0 — наибольшее целое число с условием

$$2^{s_0} \leqslant \Delta^{-1}.$$

Имеем

$$U 2^{-s_0} \geqslant 1, \quad N U^{-1} 2^{-s_0} \geqslant 1.$$

Для суммы S суммирование распространяется на все целые точки области ограниченной прямыми $x = U - U_0$, $x = U$, $y = 0$ и гиперболой $xy = N$, причем точки прямых $x = U - U_0$ и $y = 0$ к области не причисляются. Из этой области выделим области с номерами $0, 1, \ldots, s_0$, согласно схеме, указанной на прилагаемом чертеже (причем точки прямых, ограничиваю-

щих выделенную область слева и снизу, к области не причисляются). Область с номером s изобразится прямоугольником с основанием $U_0 2^{-s}$ и высотою, имеющей точный порядок $NU^{-1}2^{-s}$. Применим лемму 5 (заменяя S_1, X_0, Y_0 на $S(s)$, $U2^{-s}$, $NU^{-1}2^{-s}$, где $S(s)$ — часть суммы S, отвечающая выбранной области с номером s). Тогда получим:

$$S(s) \ll q^{\varepsilon_3} N 2^{-2s} \sqrt{\frac{q^{0,5}}{U2^{-s}} + \frac{1}{NU^{-1}2^{-s}} + \frac{1}{q}} \ll Nq^{\varepsilon_3} 2^{-1,5s} \sqrt{\frac{q^{0,5}}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q}}.$$

Поэтому сумма всех $S(s)$, отвечающих данному s, будет

$$\ll Nq^{\varepsilon_3} 2^{-0,5s} \sqrt{\frac{q^{0,5}}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q}}.$$

Наконец, часть суммы S, отвечающая точкам, не принадлежащим ни одной из выделенных областей, будет

$$\ll q^{\varepsilon_2} U 2^{-s_0} \frac{N}{U} \ll Nq^{\varepsilon_2} \Delta.$$

Собирая все доказанное, мы и убеждаемся в справедливости нашей леммы.

ЛЕММА 7. *Пусть* $\varepsilon_0 < 0,1$; $\delta \geqslant c_0$; $0 < \gamma \leqslant 1 - \delta - \varepsilon_0$; P — *произведение простых чисел с условием* $p \leqslant N^{\delta}$. *Тогда, полагая*

$$D = r^{\frac{\ln r}{\ln (1+\varepsilon_0)}}, \quad r = \ln N,$$

делители d числа P, не превосходящие N, можно распределить среди $< D$ совокупностей, причем для каждой совокупности существует свое φ с условием, что принадлежащие этой совокупности значения d удовлетворяют неравенствам

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+\varepsilon_0}.$$

Для некоторых совокупностей имеем $\varphi \leqslant N^{\gamma}$, для каждой из остальных совокупностей существуют целое положительное B и две возрастающие последовательности чисел x и y такие, что все значения x удовлетворяют неравенству

$$N^{\gamma} < x \leqslant N^{\gamma+\delta+\varepsilon_0},$$

причем все числа рассматриваемой совокупности, взятые каждое B раз, и только эти числа, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условию $(x, y) = 1$.

Доказательство. Эта лемма есть лишь незначительное видоизменение леммы 5, гл. IX моей книги ([4]).

ЛЕММА 8. *Пусть при каком-либо c $N^c \leqslant H < N^{0,5}$, β — наименьшее целое число с условием $\beta \geqslant \frac{\ln N}{\ln H}$, P — произведение простых чисел с условием $p \leqslant H$, Q — произведение простых чисел с условием $H < p \leqslant N$. Пусть, далее, $\varphi(x)$ — функция с условием, что для всех целых положи-*

тельных x, не превосходящих N, имеем $|\varphi(x)| \leqslant T$, и пусть

$$S = \sum_{p \leqslant N} \varphi(p),$$

$$W_s = \sum_{d_1 \setminus P} \sum_{m_1 > 0} \ldots \sum_{\substack{d_s \setminus P \\ d_1 m_1 \ldots d_s m_s \leqslant N}} \sum_{m_s > 0} \mu(d_1) \ldots \mu(d_s) \varphi(d_1 m_1 \ldots d_s m_s); \quad s = 1, \ldots, \beta.$$

Тогда при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_\beta$ с условиями $\alpha_1 \ll 1, \ldots, \alpha_s \ll 1$ имеем

$$S = \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_\beta W_\beta + O(TNH^{-1}).$$

Доказательство. Легко убедимся, что

$$W_s = \sum_{y_1 \setminus Q} \ldots \sum_{\substack{y_s \setminus Q \\ y_1 \ldots y_s \leqslant N}} \varphi(y_1 \ldots y_s). \tag{1}$$

Действительно, правая часть может быть представлена в форме

$$\sum_{y_1 > 0} \ldots \sum_{\substack{y_s > 0 \\ y_1 \ldots y_s \leqslant N}} \varphi(y_1 \ldots y_s) \sum_{d_1 \setminus (y_1, P)} \mu(d_1) \ldots \sum_{d_s \setminus (y_s, P)} \mu(d_s).$$

Отсюда, собирая вместе члены с одной и той же системой значений $d_1, \ldots, d_s$, мы и получим выражение для W_s, указанное в формулировке леммы.

Нетрудно видеть далее, что среди произведений $y_1 \ldots y_s$, входящих в выражение (1) для W_s, имеется 1 и $\ll NH^{-1}$ произведений, делящихся на квадраты простых делителей числа Q (при данном M, делящем Q, равенство $y_1 \ldots y_s = M$ выполняется $\ll 1$ раз). Среди оставшихся произведений $y_1 \ldots y_s$ данное z_h, являющееся произведением h различных простых сомножителей, встретится s^h раз, так как каждый его простой сомножитель может входить в $y_1, \ldots, y_s$. Из сказанного следует, что

$$sS_1 + s^2 S_2 + \cdots + s^\beta S_\beta = W_s + O(TNH^{-1}),$$

где

$$S_h = \sum_{z_h \leqslant N} \varphi(z_h).$$

Отсюда, полагая $s = 1, 2, \ldots, \beta$, получим:

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_\beta = W_1 + O(TNH^{-1}),$$

$$2S_1 + 2^2 S_2 + \cdots + 2^\beta S_\beta = W_2 + O(TNH^{-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta S_1 + \beta^2 S_2 + \cdots + \beta^\beta S_\beta = W_\beta + O(TNH^{-1}).$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 \dots 1 \\ 2 \dots 2^{\beta} \\ \dots\dots \\ \beta \dots \beta^{\beta} \end{vmatrix}$$

есть целое число, отличное от нуля. Отсюда, замечая, что $S = S_1 + O(TH)$, мы и выводим указанное в формулировке леммы выражение для S.

ТЕОРЕМА 1. *При условии* $q^{\frac{3}{4}} \ll N \ll N^{\frac{5}{4}}$ *имеем*

$$\sum_{p \leqslant N} \chi(p+k) \ll N^{1+\varepsilon^{(4)}} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Доказательство. Положим в лемме 8

$$\varphi(p) = \chi(p+k), \quad H = q^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда будем иметь $T = 1$ и, следовательно,

$$\sum_{p \leqslant N} \chi(p+k) = \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_\beta W_\beta + O(NH^{-1}). \tag{2}$$

Мы остановимся далее лишь на оценке W_β, так как $W_1, \dots, W_{\beta-1}$ оцениваются аналогично. При каждом $j = 1, \dots, \beta$ мы значения d^j разобьем на совокупности, как указано в лемме 7. Значения m_j мы также разобьем на $\ll \ln N$ совокупности так, что к одной и той же совокупности будут принадлежать значения m_j, лежащие в интервале вида

$$M_j < m_j \leqslant M_j', \quad M_j \leqslant 2M_j'.$$

Оценим часть W_β' суммы W_β, отвечающую области вида

$$\begin{gathered} \varphi^{(1)} < d_1 \leqslant F^{(1)}, \dots, \varphi^{(\beta)} < d_\beta \leqslant F^{(\beta)}, \quad F = \varphi^{1+\varepsilon_0}, \\ M_1 < m_1 \leqslant M_1', \dots, M_\beta < m_\beta \leqslant M_\beta'. \end{gathered} \tag{3}$$

Очевидно

$$|W_\beta'| = \Bigl| \sum_{d_1} \sum_{m_1} \dots \sum_{d_\beta} \sum_{m_\beta}{}_{d_1 m_1 \dots d_\beta m_\beta \leqslant N} \chi(d_1 m_1 \dots d_\beta m_\beta + k) \Bigr|,$$

где суммирование распространяется на область (3).

Пусть сначала одно из чисел $M_1, \dots, M_\beta$ будет $> H$. Не нарушая общности доказательства, можно предположить, что $M_\beta > H$.

Пусть $M_\beta > q^{\frac{2}{3}}$. Тогда, согласно известному закону распределения характеров, замечая, что произведение $d_1 \dots d_\beta m_1 \dots m_{\beta-1}$ пробегает числа, не превосходящие NH^{-1}, и каждое из них $\ll N^{\varepsilon_0}$ раз, получим:

$$|W'_\beta| \ll N^{1+\varepsilon_6} H^{-1} \sqrt{q} \ln q \ll N^{1+\varepsilon_7} q^{-\frac{1}{4}} \ll N^{1+\varepsilon_7} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Пусть теперь $M_\beta \leqslant q^{\frac{2}{3}}$. Тогда, применяя лемму 3, находим:

$$|W'_\beta| \ll Nq^{\varepsilon''} \left(\left(\frac{qNH^{-1}}{N^2}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{q^3}{N^4}\right)^{\frac{1}{8}}\right) \ll Nq^{\varepsilon''} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Пусть, наконец, все без исключения $M_1, \ldots, M_\beta$ будут $\leqslant H$. Мы ограничимся лишь случаем

$$\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\beta)} M_1 \ldots M_\beta > N^{\frac{3}{4}} q^{\frac{3}{16}}.$$

В противном случае очевидно имеем

$$W'_\beta \ll N^{1+\varepsilon} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Предположим сначала, что

$$\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\beta)} \leqslant N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \left(\text{что } < N^{\frac{3}{4}} q^{\frac{3}{16}} H^{-1}\right).$$

Пусть j — наименьшее число с условием

$$\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\beta)} M_1 \ldots M_j > N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}}.$$

Пусть x пробегает различные значения произведения $d_1 \ldots d_\beta m_1 \ldots m_j$, а y пробегает различные значения произведения $m_{j+1} \ldots m_\beta$. Каждое свое значение x пробегает $\ll N^{\varepsilon_8}$ раз и y пробегает также $\ll N^{\varepsilon_8}$ раз. При этом x удовлетворяет неравенствам

$$\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\beta)} M_1 \ldots M_j \leqslant x \leqslant (\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\beta)})^{1+\varepsilon_0} 2^j M_1 \ldots M_j$$

и, следовательно, лежит в некотором интервале вида

$$N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} < x \ll N^{\varepsilon_0} N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{8}}.$$

Последний интервал можно подразделить на $\ll \ln N$ интервалов вида

$$U - U_0 < x \leqslant U, \quad cU \leqslant U_0 \leqslant 0{,}5U, \quad 0 < c < 0{,}5,$$

к каждому из которых можно применить лемму 6. Получим:

$$W'_\beta \ll N^{1+\varepsilon_5} \left(\frac{q^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}}} + \frac{N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{8}}}{N} + \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \ll N^{1+\varepsilon_5} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Предположим теперь, что

$$\varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\beta)} > N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}}.$$

Тогда, определяя γ равенством

$$\varphi^{(1)}\ldots\varphi^{(j-1)}N^{\gamma}=N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{8}},$$

мы будем иметь $\varphi^{(j)}>N^{\gamma}$ и, следовательно, согласно лемме 7, существуют целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y с условием

$$N^{\gamma}<x\leqslant N^{\gamma+\varepsilon_0}H$$

такие, что все значения d_j выбранной совокупности, взятые каждое B раз, получим, если из всех произведений xy выберем лишь те, которые удовлетворяют условию

$$(x,\ y)=1.$$

Положим

$$u=d_1\ldots d_{j-1},\quad v=d_{j+1}\ldots d_{\beta}m_1\ldots m_{\beta}.$$

Очевидно, имеем:

$$|W_{\beta}'|=\left|\sum_{\sigma}\mu(\sigma)\sum_{u}\sum_{\xi}\sum_{\eta}\sum_{v}\chi(\sigma^2u\xi\eta v+k)\right|,$$

где σ пробегает целые положительные числа (не превосходящие $\sqrt{N}$), а ξ и η, при данном σ, пробегают частные от деления на σ чисел x и y, одновременно кратных σ. Пусть k_{σ} определяется сравнением $\sigma^2k_{\sigma}\equiv k\pmod q$. Тогда часть $W(\sigma)$ суммы W_{β}', отвечающая данному σ, будет

$$\ll\left|\sum_{u}\sum_{\xi}\sum_{\eta}\sum_{v}\chi(u\xi\eta v+k_{\sigma})\right|.$$

Но каждое свое численное значение x_0 произведение $u\xi$ пробегает $\ll N^{\varepsilon_9}$ раз, равным образом каждое свое численное значение y_0 произведение ηv пробегает $\ll N^{\varepsilon_9}$ раз, причем

$$N^{\gamma}\sigma^{-1}<\xi\leqslant N^{\gamma+\varepsilon_0}H\sigma^{-1}$$

и вместе с тем, согласно определению γ,

$$N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{8}}\sigma^{-1}<x_0\ll N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{8}}\sigma^{-1}N^{\varepsilon_0}.$$

Но последний интервал можно разбить на $\ll\ln N$ интервалов вида

$$U-U_0<x_0\leqslant U,$$
$$cU\leqslant U_0\leqslant 0{,}5\,U,$$
$$0<c<0{,}5.$$

Применяя к каждому из этих интервалов лемму 6 при

$$N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{8}}\sigma^{-1}\geqslant q^{\frac{1}{2}},$$

получим:

$$W(\sigma)\ll\ln N N\sigma^{-2}q^{\varepsilon_8}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}\sigma}{N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{8}}}+\frac{N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{8}}}{\sigma N\sigma^{-2}}+\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\ll N^{1+\varepsilon_{10}}\sigma^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Если

$$N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} \sigma^{-1} \leqslant q^{\frac{1}{2}}, \quad \text{т. е.} \quad \sigma \geqslant \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

то тривиально находим:

$$W(\sigma) \ll N^{1+\varepsilon_{11}} \sigma^{-2}.$$

Отсюда, суммируя по всем σ, получим:

$$W'_{\beta} \ll N^{1+\varepsilon_{12}} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ввиду всего изложенного, находим:

$$W_{\beta} \ll N^{1+\varepsilon^{(4)}} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Точно такие же оценки получим и для $W_1, \ldots, W_{\beta-1}$. А тогда из формулы (2) и будет следовать наша теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть n — делитель числа $q-1$ с условием $1<n<q-1$ и пусть s — одно из чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Тогда для числа T_s чисел вида $p+k$ с условиями*

$$p \leqslant N, \quad \operatorname{ind}(p+k) \equiv s \pmod{n}$$

имеем неравенство:

$$T_s - \frac{1}{n} \pi(N) \ll N^{1+\varepsilon^{(4)}} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Доказательство. Имеем

$$T_s = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} S_m,$$

$$S_m = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \frac{m(\operatorname{ind}(p+k)-s)}{n}}.$$

При $m=0$ имеем

$$S_m = \pi(N),$$

а при $m>0$, согласно теореме 1, имеем

$$S_m \ll N^{1+\varepsilon^{(4)}} \left(\frac{q^{\frac{3}{4}}}{N}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Отсюда теорема 2 следует непосредственно.

Поступило
10.1.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Уточнение метода оценки сумм с простыми числами, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 7 (1943), 17—34.
[2] Виноградов И. М., Новое усовершенствование метода оценки двойных сумм, Доклады Ак. Наук СССР, XXIII, № 4 (1950), 635—638.
[3] Weyl A., On some exponential sums, Proc. Nat. Acad. Sci. Washington, v. 34, N 5 (1948), 204—207.
[4] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 211—216

Н. М. КОРОБОВ

О НОРМАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе выводятся необходимые и достаточные условия, при которых на произвольном множестве n-значных чисел возможно построение нормальных периодических систем.

Пусть n, q, $\delta_1, \ldots, \delta_\tau$ — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$n \geqslant 1, \quad q \geqslant 2, \quad \tau \geqslant n, \quad 0 \leqslant \delta_\nu \leqslant q-1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \tau).$$

Будем называть величины δ_ν знаками, а системы знаков $\delta_{\nu_1} \ldots \delta_{\nu_n}$ — n-значными числами. (Знаки будем иногда обозначать также через β, β', β_ν.)

Рассмотрим множество E_n, состоящее из τ n-значных чисел. Среди чисел, составляющих E_n, могут встречаться и одинаковые, т. е. такие, у которых все знаки соответственно совпадают. Будем говорить, что на множестве E_n возможны нормальные периодические системы, если существует такая последовательность знаков

$$\delta_1\delta_2\delta_3 \ldots \delta_{n-1}\delta_n\delta_{n+1}\delta_{n+2} \ldots \delta_\tau\delta_1 \ldots \delta_{n-1}, \tag{1}$$

что получающиеся из ее соседних знаков τ n-значных чисел

$$\delta_1 \ldots \delta_n, \ \delta_2 \ldots \delta_{n+1}, \ \delta_3 \ldots \delta_{n+2}, \ \ldots, \ \delta_\tau\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$$

овпадают с множеством n-значных чисел, составляющих E_n. Последовательность (1) называется нормальной периодической системой или системой ρ_n.

Системы ρ_n нашли применение при решении ряда вопросов теории диофантовых приближений с показательными функциями [см. ([1]), теорема 5; ([2]), теоремы 2—5; ([3]), теорема 3]. Легко видеть, что построение нормальных периодических систем возможно не на всяком множестве E_n. В ([2]) содержится исследование систем ρ_n для частного случая, когда множество E_n состоит из всех различных n-значных чисел в системе счисления с основанием q. В настоящей заметке рассматривается общий случай, когда множество E_n состоит из произвольного числа τ произвольных n-значных чисел. Основная теорема содержит необходимые и достаточные условия, при которых на множестве E_n возможны нормальные периодические системы. Доказательство теоремы дает также общий метод построения систем ρ .

Назовем системы знаков $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ и $\beta_2 \ldots \beta_n$ $n-1$-значными числами, входящими в n-значное число $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{n-1}\beta_n$. Назовем, далее, $n-1$-значное число входящим в E_n, если оно входит хотя бы в одно n-значное число, принадлежащее множеству E_n.

ТЕОРЕМА. *На множестве E_n тогда и только тогда возможны системы ρ_n, когда выполняются следующие условия полноты и связности:*

1. *Для всякого $n-1$-значного числа $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$, входящего в E_n, число n-значных чисел вида $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}\beta$ и $\beta'\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$, принадлежащих множеству E_n, одинаково. (Условие полноты.)*

2. *При любом разбиении множества E_n на две непустые части E_n' и E_n'' найдется хотя бы одно $n-1$-значное число, входящее в каждую из этих частей. (Условие связности.)*

Доказательство. Докажем сперва необходимость условий. Пусть на множестве E_n возможна система ρ_n:

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1}\delta_n \ldots \delta_\tau\delta_1 \ldots \delta_{n-1}. \tag{2}$$

Всякое $n-1$-значное число $\beta_1 \ldots \beta_{n-1} \neq \delta_1 \ldots \delta_{n-1}$, входящее в E_n, встречаясь в последовательности (2), каждый раз дополняется до n-значного числа как знаком, примыкающим к нему справа, так и знаком, примыкающим слева. Число $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$ встречается один раз в начале и один раз в конце последовательности (2), порождая n-значные числа $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}\delta_n$ и $\delta_\tau\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$; в остальных случаях (когда $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$ встречается внутри последовательности (2)) снова каждый раз получаем два n-значных числа нужного вида. Таким образом, условие полноты выполняется для каждого $n-1$-значного числа, входящего в E_n.

Для того чтобы убедиться в выполнении условия связности, разобьем множество E_n на две произвольные непустые части E_n' и E_n''. Пометим в последовательности (2) штрихами те знаки, которые являются началом n-значных чисел, принадлежащих множеству E_n'. Так как не все τ n-значных чисел принадлежат E_n', то в последовательности $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{n-1}\delta_n \ldots \delta_\tau$ найдется пара соседних знаков $\delta_i\delta_{i+1}$, из которых только один будет помечен штрихом. Рассмотрим два n-значных числа, начинающихся с этих знаков:

$$\delta_i\delta_{i+1} \ldots \delta_{i+n-1} \text{ и } \delta_{i+1} \ldots \delta_{i+n-1}\delta_{i+n}. \tag{3}$$

(Если $i+\nu > \tau$, то $\delta_{i+\nu} = \delta_{\tau+\nu'} = \delta_{\nu'}$; $1 \leqslant \nu' \leqslant n-1$.)

В соответствии с выбором знаков δ_i и δ_{i+1} одно из чисел (3) принадлежит множеству E_n', другое — множеству E_n''. Но $n-1$-значное число $\delta_{i+1} \ldots \delta_{i+n-1}$ входит в каждое из n-значных чисел (3), а следовательно, и в каждое из множеств E_n' и E_n'', чем доказано выполнение условия связности.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть оба условия теоремы выполнены. Выпишем какое-нибудь принадлежащее E_n n-значное число $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n$ и будем приписывать к нему справа знаки δ_{n+1}, δ_{n+2} и т. д. Выбирать новые знаки будем произвольно, но так, чтобы возникающие при этом n-значные числа $\delta_2 \ldots \delta_{n+1}$, $\delta_3 \ldots \delta_{n+2}$, ... совпадали каждый раз с каким-нибудь из еще не выписанных чисел множества E_n. Пусть,

из-за невозможности выбрать очередной знак, процесс приписывания оборвался на знаке δ_{τ_1+n-1}:

$$\delta_1 \ldots \delta_{n-1}\delta_n\delta_{n+1} \ldots \delta_{\tau_1}\delta_{\tau_1+1} \ldots \delta_{\tau_1+n-1}. \tag{4}$$

Такой обрыв возможен лишь в том случае, когда в последовательности (4) уже выписаны все числа вида $\delta_{\tau_1+1} \ldots \delta_{\tau_1+n-1}\beta$, принадлежащие множеству E_n. В силу условия полноты, число чисел вида $\delta_{\tau_1+1} \ldots \delta_{\tau_1+n-1}\beta$, встречающихся в последовательности (4), должно совпадать с числом содержащихся в ней чисел вида $\beta'\delta_{\tau_1+1} \ldots \delta_{\tau_1+n-1}$, что возможно только в случае выполнения равенства

$$\delta_{\tau_1+1} \ldots \delta_{\tau_1+n-1} = \delta_1 \ldots \delta_{n-1}. \tag{5}$$

Таким образом, последовательность (4) может быть записана в виде:

$$\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{n-1}\delta_n \ldots \delta_{\tau_1}\delta_1 \ldots \delta_{n-1}. \tag{4'}$$

Назовем циклическими перестановками последовательности (4′) последовательности, имеющие вид:

$$\delta_2\delta_3 \ldots \delta_n\delta_{n+1} \ldots \delta_{\tau_1}\delta_1 \ldots \delta_{n-1}\delta_n,$$
$$\delta_3\delta_4 \ldots \delta_{n+1}\delta_{n+2} \ldots \delta_{\tau_1}\delta_1 \ldots \delta_n\delta_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Очевидно, что при переходе к циклическим перестановкам совокупность n-значных чисел, образованных соседними знаками последовательности (4′), остается неизменной. Из равенства (5) следует, что в последовательности (4′) выписаны все n-значные числа множества E_n, в которые входит n-значное число $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$. Допустим, что среди $n-1$-значных чисел, образованных соседними знаками последовательности (4′), есть число $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ такое, что не все n-значные числа вида $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}\beta$, принадлежащие E_n, содержатся в (4′). При помощи перехода к циклической перестановке добьемся того, чтобы число $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ оказалось стоящим на конце последовательности (4′), после чего продолжим приписывание новых знаков, пока это будет возможно. Повторение указанного процесса приведет, наконец, к образованию последовательности, каждое $n-1$-значное число которой будет встречаться в ней максимальное возможное число раз. Обозначим через E_n' множество n-значных чисел, содержащихся в построенной последовательности. Допустим, что E_n' не совпадает с множеством E_n. Тогда множество E_n можно разбить на две непустые части E_n' и E_n''. Рассмотрим произвольное $n-1$-значное число $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$, входящее в множество E_n'. Согласно методу построения, в E_n' содержатся все n-значные числа множества E_n, в которые входит $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$. Но тогда число $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$ не может входить в множество E_n'' и, следовательно, у множеств E_n' и E_n'' нет ни одного общего входящего в них $n-1$-значного числа. Последнее утверждение противоречит условию связности, откуда следует, что E_n' совпадает с E_n, т. е. что построенная нами последовательность представляет собой нормальную периодическую систему.

Приведем некоторые примеры и следствия.

Пример 1. Рассмотрим множество E_3, состоящее из следующих шести трехзначных чисел:

$$\{101,\ \ 000,\ \ 002,\ \ 010,\ \ 200,\ \ 020\}.$$

Легко проверить, что условие полноты здесь выполняется. Однако нормальные периодические системы на этом множестве невозможны из-за невыполнения условия связности, что видно, например, из разбиения:

$$\{101,\ \ 010\},\ \ \{000,\ \ 002,\ \ 200,\ \ 020\}.$$

Пример 2. Следующее множество E_4, состоящее из трех четырехзначных чисел

$$\{0100,\ \ 0100,\ \ 1010\},$$

обладает свойством связности, но не обладает свойством полноты. На этом множестве нормальные периодические системы также невозможны.

Пример 3. На следующем множестве E_3, состоящем из семи трех значных чисел

$$\{212,\ \ 212,\ \ 212,\ \ 121,\ \ 121,\ \ 221,\ \ 122\},$$

выполнение свойств полноты и связности легко установить непосредственной проверкой. На этом множестве нормальные периодические системы возможны. Примером может служить такая система ρ_3:

$$2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. На множестве $E_n(q)$, состоящем из всех различных n-значных чисел в системе счисления с основанием $q \geqslant 2$, нормальные периодические системы возможны *.

Действительно, выполнение условия полноты для множества $E_n(q$. очевидно. Допустим, что для $E_n(q)$ не выполняется условие связности) Тогда множество $E_n(q)$ можно разбить на две непустые части E_n' и E_n'', не имеющие общих $n-1$-значных чисел. Рассмотрим произвольное $n-1$-значное число $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$, входящее в E_n'. Согласно допущению, все n-значные числа, в которые входит $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$, должны принадлежать множеству E_n'. Обозначим через $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$ произвольное n-значное число. Очевидно, в E_n' содержится n-значное число $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{n-1}\beta_1$. Но тогда $n-1$-значное число $\delta_2 \ldots \delta_{n-1}\beta_1$ входит в E_n' и, следовательно, в E_n' содержится любое n-значное число, в которое входит $\delta_2 \ldots \delta_{n-1}\beta_1$. В частности, в E_n' содержится n-значное число $\delta_2\delta_3 \ldots \delta_{n-1}\beta_1\beta_2$. Продолжая этот процесс, получим, что E_n' содержит число $\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$, и, следовательно, любое n-значное число принадлежит множеству E_n'. Но тогда множество E_n'' должно быть пустым, что противоречиво.

Итак, для множества $E_n(q)$ выполняются условия полноты и связности, и, согласно теореме, на нем возможны нормальные периодические системы.

Рассмотрим разложения натуральных чисел в суммы членов ряда Фибоначчи:

$$u_0 = 1,\quad u_1 = 2,\quad u_2 = 3,\quad u_3 = 5,\quad u_4 = 8,\ \ldots\ ,\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

* Известно несколько различных доказательств этого утверждения [см., например, (1), (2), (4) и (5)].

Например, для первых натуральных чисел получим:

$$\begin{array}{lll} 1 = u_0, & 5 = u_3, & 9 = u_4 + u_0, \\ 2 = u_1, & 6 = u_3 + u_0, & 10 = u_4 + u_1, \\ 3 = u_2, & 7 = u_3 + u_1, & 11 = u_4 + u_2, \\ 4 = u_2 + u_0, & 8 = u_4, & 12 = u_4 + u_2 + u_0 \end{array} \qquad (6)$$

(в разложениях (6) не допускаются суммы членов, индексы которых отличаются меньше, чем на 2).

Аналогично тому, как в двоичной системе счисления под n-значным числом $\delta_1\delta_2\ldots\delta_n$ понимается сумма

$$\delta_1 2^{n-1} + \delta_2 2^{n-2} + \cdots + \delta_n,$$

будем в «системе счисления u_n» под n-значным числом $\delta_1\delta_2\ldots\delta_n$ понимать сумму

$$\delta_1 u_{n-1} + \delta_2 u_{n-2} + \cdots + \delta_n u_0.$$

Тогда разложения (6) запишутся в виде пятизначных чисел в системе счисления u_n. Добавляя пятизначное разложение нуля, получим:

$$0 = 00000, \quad \begin{array}{lll} 1 = 00001, & 5 = 01000, & 9 = 10001, \\ 2 = 00010, & 6 = 01001, & 10 = 10010, \\ 3 = 00100, & 7 = 01010, & 11 = 10100, \\ 4 = 00101, & 8 = 10000, & 12 = 10101. \end{array} \qquad (6')$$

Заметим, что совокупность пятизначных чисел (6′) может быть получена из совокупности всех пятизначных чисел в двоичной системе счисления отбрасыванием чисел, содержащих рядом стоящие единицы. Аналогично и в общем случае все n-значные числа в системе счисления u_n можно получить из n-значных чисел двоичной системы счисления отбрасыванием чисел, содержащих соседние знаки, равные единице. Каждому натуральному числу будет при этом соответствовать единственное разложение в системе счисления u_n.

Легко показать, что в случае $n > 2$ на множестве E_n всех n-значных чисел в системе счисления u_n не выполняется условие полноты и, следовательно, нормальные периодические системы невозможны. Действительно, в E_n содержится два n-значных числа вида $10\ldots0\beta$ и только одно — вида $\beta'10\ldots0$ (так как для β возможны значения 0 и 1, а для β' — только 0).

Исключая из множества E_n некоторые n-значные числа, получим возможность, как это показано в следствии 2, строить нормальные периодические системы.

СЛЕДСТВИЕ 2. На множестве E_n, получающемся из множества всех n-значных чисел в системе счисления u_n исключением чисел, у которых и начальный и конечный знаки равны единице, нормальные периодические системы возможны.

Действительно, обозначим через a_{n-1} и a_{n-3} произвольные $n-1$- и соответственно $n-3$-значные числа в системе счисления u_n. Числа a_{n-1}

могут иметь вид: $0a_{n-3}0$, $0a_{n-3}1$, $1a_{n-3}0$ и $1a_{n-3}1$. Из способа образования множества E_n следует, что число принадлежащих ему чисел вида $0a_{n-3}0\beta$ и $\beta'0a_{n-3}0$ одинаково, так как каждая из величин β и β' может принимать по два значения (0 и 1). Число принадлежащих E_n чисел вида $0a_{n-3}1\beta$ и $\beta'0a_{n-3}1$ снова одинаково, так как и β и β' может равняться только нулю. Так же проверяются остальные виды n-значных чисел ($1a_{n-3}0\beta$ и $\beta'1a_{n-3}0$, $1a_{n-3}1\beta$ и $\beta'1a_{n-3}1$). Таким образом, условие полноты выполняется. Пусть, далее, множество E_n разбито на две непустые части E_n' и E_n''. Допустим, что эти части не имеют общего входящего в них $n-1$-значного числа. Выберем ту из частей (для определенности пусть это будет E_n'), которой принадлежит n-значное число, состоящее из одних нулей. Обозначим через $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ произвольное n-значное число, принадлежащее E_n. Так как n-значное число $00\ldots00$ принадлежит множеству E_n', то $n-1$-значное $00\ldots0$ входит в E_n'. Отсюда следует, что всякое n-значное число вида $0\ldots0\beta$ принадлежит E_n' (иначе множества E_n' и E_n'' имели бы общее входящее в них $n-1$-значное число $00\ldots00$). В частности, множеству E_n' принадлежит n-значное число $00\ldots0\beta_1$. Но тогда $n-1$-значное число $0\ldots0\beta_1$ входит в E_n', каждое n-значное $0\ldots0\beta_1\beta$ принадлежит E_n' и, следовательно, $0\ldots0\beta_1\beta_2 \in E_n'$. Последовательно получим теперь:

$$0\ldots0\beta_1\beta_2\beta_3 \in E_n', \quad \ldots, \quad \beta_1\beta_2\ldots\beta_n \in E_n'.$$

Таким образом, множество E_n' совпадает с E_n и E_n'' — пустое множество, что противоречиво. Следовательно, условие связности также выполняется, и на E_n возможны нормальные периодические системы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
13. II. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 14 (1950), 215—238.

[2] Коробов Н. М., Нормальные периодические системы и их приложения к оценке сумм дробных долей, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 15 (1951), 17—46.

[3] Коробов Н. М., Дробные доли показательных функций, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. XXXVIII (1951), 87—96.

[4] Good I. J., Normal recurring decimals, Journ. Lond. Math. Soc., 213 (1946), 167—169.

[5] De Bruijn N. G., A combinatorial problem, Kon. Ned. Akad. v. Wet., 49 (1946), 758—764.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 217—224

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РАДИКАЛА КОЛЬЦА

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе при помощи присоединенного умножения и присоединенных идеалов определяется и изучается радикал кольца в смысле Brown'a и McCoy'я. Приводится новое доказательство теоремы, обобщающей известный результат Гопкинса о нилькольцах.

Введение

Как известно ([1]), радикал кольца $\mathfrak{A}$ в смысле Brown'a и McCoy'я есть множество N всех таких элементов a кольца $\mathfrak{A}$, что любой элемент b из идеала (a) принадлежит двустороннему идеалу

$$C(a) = \left\{ax - x + \sum x_i a y_i - \sum x_i y_i\right\},$$

где x, y_i, z_i принадлежат кольцу $\mathfrak{A}$, а суммы конечные. В работе ([1]) доказывается, что N есть пересечение определенного множества двусторонних идеалов и, следовательно, N есть двусторонний идеал. Позднее, в работе ([2]), как следствие из одной общей теоремы для групп с операторами доказывается непосредственно, что N есть идеал, т. е. показывается, что если элементы a, $b \in N$, то и $a - b \in N$, и если $a \in N$, то и ax, $xa \in N$ для всякого элемента x из кольца $\mathfrak{A}$. Известно также ([1]), что в определении радикала N идеал $C(a)$ можно заменить идеалом

$$F(a) = \left\{ax - x + ya - y + \sum x_i a y_i - \sum x_i y_i\right\}.$$

В нашей заметке радикал Brown'a и McCoy'я определяется и изучается при помощи присоединенного умножения

$$a \circ b = a + b - ab$$

и присоединенных идеалов [см. ([3])].

В § 1 доказывается, что элемент a кольца $\mathfrak{A}$ принадлежит идеалу $F(a)$ тогда и только тогда, когда он порождает двусторонний присоединенный идеал, совпадающий с кольцом $\mathfrak{A}$. Этим еще раз доказан тот результат ([4]), что радикал Brown'a и McCoy'я есть присоединенно-простое кольцо в смысле Курочкина ([4]), т. е. кольцо, в котором не существуют двусторонние присоединенные идеалы, отличные от кольца $\mathfrak{A}$.

Далее вводится понятие обобщенно-радикального идеала как такого двустороннего идеала, который, будучи рассматриваем как кольцо, является присоединенно-простым кольцом. Доказывается теорема о том,

что сумма двух обобщенно-радикальных идеалов есть обобщенно-радикальный идеал, что дает возможность определить радикал N как объединение всех обобщенно-радикальных идеалов.

В § 2 передоказывается теорема о том, что если кольцо не есть присоединенно-простое кольцо, то его радикал N есть пересечение всех таких максимальных двусторонних идеалов M^*, что фактор-кольцо $\mathfrak{A}/M^*$ содержит единицу.

В § 3 доказывается теорема о том, что присоединенно-простое кольцо с условием минимальности для левых идеалов будет нильпотентным. Этим обобщается известная теорема Гопкинса о том, что нилькольцо с условием минимальности для левых идеалов нильпотентно.

§ 1

В дальнейшем присоединенный двусторонний идеал, порожденный элементом a в кольце $\mathfrak{A}$, будем обозначать через $\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}$. Это есть множество всевозможных конечных сумм вида

$$\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i),$$

где λ_i — целые числа, удовлетворяющие равенству $\sum \lambda_i = 1$.

Определение 1. Элемент a кольца $\mathfrak{A}$ будем называть *обобщенно-радикальным*, если порожденный им двусторонний присоединенный идеал совпадает со всем кольцом, т. е. если

$$\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Обобщенно-радикальный элемент является обобщением понятия квазирегулярного элемента в смысле Джекобсона ([5]), так как последний может быть определен равенством $a \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, где $a \circ \mathfrak{A}$ — правый присоединенный идеал, порожденный элементом a. Следующая теорема показывает, что обобщенно-радикальные элементы в точности совпадают с F-регулярными элементами в смысле Brown'а и McCoy'я ([2]).

ТЕОРЕМА 1. *Элемент a кольца $\mathfrak{A}$ будет обобщенно-радикальным тогда и только тогда, когда a является F-регулярным, т. е. когда $a \in F(a)$, где*

$$F(a) = \left\{ax - x + ya - y + \sum x_i a y_i - \sum x_i y_i\right\}.$$

Доказательство. Пусть элемент a является обобщенно-радикальным, т. е.

$$\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Следовательно, существуют такие элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и $v_1, v_2, \ldots v_n$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (u_i \circ a \circ v_i) = 0,$$

где $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Переходя теперь к обычному умножению, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u_i\circ a\circ v_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u_i+a-u_ia)\circ v_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u_i+a-u_ia+v_i-u_iv_i-av_i+u_iav_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i+a-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_ia+\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_iv_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iav_i+\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_iav_i=0.$$

Из последнего равенства находим:

$$a=a\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i\Big)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i+\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i\Big)a-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i+\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_iv_i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_iav_i,$$

т. е. $a\in F(a)$.

Пусть теперь $a\in F(a)$. Покажем, что элемент a является обобщенно-радикальным элементом. Действительно, так как $a\in F(a)$, то, следовательно, существуют такие элементы x, y, y_1, $y_2,\ldots,y_n$ и z_1, $z_2,\ldots,z_n$, что

$$a=ax-x+ya-y+\sum_{i=1}^{n}(y_iaz_i-y_iz_i).$$

Переходя к присоединенному умножению, получаем:

$$a=a+x-a\circ x-x+y+a-y\circ a-y+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[(y_i+a-y_i\circ a)z_i-y_i-z_i+y_i\circ z_i]=2a-a\circ x-y\circ a+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(y_i+a-y_i\circ a+z_i-y_i\circ z_i-a\circ z_i+y_i\circ a\circ z_i-y_i-z_i+y_i\circ z_i),$$

или

$$a\circ x-a+y\circ a-na+\sum_{i=1}^{n}y_i\circ a+\sum_{i=1}^{n}a\circ z_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\circ a\circ z_i=0.$$

Замечая, что сумма коэффициентов в левой части последнего равенства есть единица, получаем, что $0\in\mathfrak{A}\circ a\circ\mathfrak{A}$, а следовательно, $\mathfrak{A}\circ a\circ\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$.

Из теоремы 1 получаем следующий результат Курочкина ([4]):

Следствие 1. *Кольца, совпадающие со своим радикалом, и только они являются присоединенно-простыми.*

Двусторонний идеал кольца $\mathfrak{A}$ будем называть *обобщенно-радикальным идеалом*, если каждый его элемент есть обобщенно-радикальный.

Имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. *Сумма двух обобщенно-радикальных идеалов есть также обобщенно-радикальный идеал.*

Доказательство. Пусть J_1 и J_2 — два обобщенно-радикальных идеала и пусть элемент a принадлежит их сумме, т. е. $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in J_1$ и $a_2 \in J_2$. Так как J_1 — обобщенно-радикальный идеал, то существует конечное число таких элементов x_i и y_i, что

$$\sum \lambda_i (x_i \circ a_1 \circ y_i) = 0, \tag{1}$$

где $\sum \lambda_i = 1$. Рассмотрим теперь сумму $\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i)$. Имеем:

$$\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i) = \sum \lambda_i [x_i \circ (a_1 + a_2) \circ y_2] =$$
$$= \sum \lambda_i [(x_i \circ a_1 + x_i \circ a_2 - x_i) \circ y_i] =$$
$$= \sum \lambda_i (x_i \circ a_1 \circ y_i + x_i \circ a_2 \circ y_i - x_i \circ y_i) =$$
$$= \sum \lambda_i (x_i \circ a_1 \circ y_i) + \sum \lambda_i (x_i \circ a_2 \circ y_i - x_i \circ y_i),$$

или, учитывая (1),

$$\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i) = \sum \lambda_i (x_i \circ a_2 \circ y_i - x_i \circ y_i) = \sum \lambda_i a_{2i},$$

где $a_{2i} = x_i \circ a_2 \circ y_i - x_i \circ y_i$. Но легко заметить, что элемент a_{2i} принадлежит идеалу J_2. В самом деле,

$$a_{2i} = (x_i + a_2 - x_i a_2) \circ y_i - x_i \circ y_i = x_i + a_2 - x_i a_2 + y_i - x_i y_i -$$
$$- a_2 y_i + x_i a_2 y_i - x_i - y_i + x_i y_i = a_2 - x_i a_2 - a_2 y_i + x_i a_2 y_i \in J_2.$$

Следовательно, элемент $\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i)$ принадлежит идеалу J_2. Так как J_2 — обобщенно-радикальный идеал, то существует такое конечное число элементов z_j и t_j, что

$$\sum \mu_j \left[z_j \circ \sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i) \circ t_j\right] = 0,$$

где $\sum \mu_j = 1$, или, что то же самое,

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i (z_j \circ x_i \circ a \circ y_i \circ t_j) = 0,$$

причем

$$\sum \sum \mu_i \lambda_i = \left(\sum \mu_j\right) \left(\sum \lambda_i\right) = 1.$$

Таким образом, элемент a является обобщенно-радикальным элементом.

Следствие 2. Если $\mathfrak{A}$ — произвольное кольцо, то сумма всех обобщенно-радикальных идеалов есть обобщенно-радикальный идеал. Этот идеал будем называть *радикалом* кольца $\mathfrak{A}$ и обозначать через N.

Замечание 1. Очевидно, радикал N есть совокупность всех таких обобщенно-радикальных элементов a, которые порождают обобщенно-радикальные идеалы, т. е. для любого элемента a_1 из идеала (a) имеем

$$\mathfrak{A} \circ a_1 \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}.$$

Если $N = \mathfrak{A}$, то кольцо $\mathfrak{A}$ есть присоединенно-простое кольцо. Если же $N = 0$, то кольцо $\mathfrak{A}$, как обычно, называется полупростым.

ТЕОРЕМА 3. *Если N — радикал кольца $\mathfrak{A}$, то фактор-кольцо $\mathfrak{A} / N = \overline{\mathfrak{A}}$ полупросто.*

Действительно, пусть элемент $\overline{a}$ принадлежит радикалу $\overline{N}$ фактор-кольца $\overline{\mathfrak{A}}$. Тогда найдется такое конечное число элементов $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ в кольце $\overline{\mathfrak{A}}$, что

$$\sum \lambda_i (\overline{x}_i \circ \overline{a} \circ \overline{y}_i) = \overline{0},$$

где $\sum \lambda_i = 1$, т. е.

$$\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i) = b \in N,$$

где x_i, a, y_i — некоторые прообразы элементов $\overline{x}_i$, $\overline{a}$, $\overline{y}_i$. В силу того что $b \in N$, найдется такое конечное число элементов s_j и t_j, что

$$\sum \mu_j (s_j \circ b \circ t_j) = 0,$$

где $\sum \mu_i = 1$, т. е.

$$\sum \sum \mu_j \lambda_j (s_j \circ x_i \circ a \circ y_i \circ t_j) = 0,$$

где $\sum \sum \mu_j \lambda_i = 1$. Следовательно, элемент a есть обобщенно-радикальный элемент. Так как множество всех прообразов a элементов $\overline{a}$ из $\overline{N}$ образует идеал, то ясно, что этот идеал есть обобщенно-радикальный идеал и поэтому содержится в N, т. е. $a \in N$ и, следовательно, $\overline{a} = 0$.

Замечание 2. Если обозначить через N' радикал в смысле Джекобсона, то, очевидно, $N' \subseteq N$. Так как N' содержит все правые и левые нильидеалы кольца ([5]), то этим же свойством будет обладать и радикал N. Следовательно, полупростое кольцо не содержит левых и правых ненулевых нильидеалов.

Замечание 3. Легко показать, что элемент a принадлежит радикалу N тогда и только тогда, когда $a\mathfrak{A} \subset N$. Действительно, из $a\mathfrak{A} \subset N$ следует $\mathfrak{A}a\mathfrak{A} \subset N$. Обозначая теперь через J правый идеал, порожденный элементом a, получаем

$$J^3 \subset \mathfrak{A}a\mathfrak{A} \subset N.$$

Следовательно, в полупростом кольце $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} / N$ идеал $\overline{J}$ нильпотентен, а именно, $\overline{J}^3 = \overline{0}$, откуда, в силу замечания 2, $\overline{J} = \overline{0}$, т. е. $J \subset N$. Таким образом, $a \in N$.

Замечание 4. Очевидно, радикал N ненулевого кольца $\mathfrak{A}$ не содержит единицы кольца, если она существует, так как $\mathfrak{A} \circ 1 \circ \mathfrak{A} = 1$. Можно также показать, что радикал N ненулевого кольца $\mathfrak{A}$ не содержит правой (левой) единицы, если она существует. Действительно, пусть кольцо $\mathfrak{A}$ содержит правую единицу e. Тогда для любого элемента x из $\mathfrak{A}$ имеем $xe = x$, и так как $\mathfrak{A}$ — ненулевое кольцо, то $e \neq 0$. Перейдя к присоединенному умножению, получаем $x \circ e = e$, т. е.

$$\mathfrak{A} \circ e = e. \qquad (2)$$

Предположим, что $e \in N$. Тогда $\mathfrak{A} \circ e \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ и в силу (2) получаем $e \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Следовательно, существует такой элемент y в $\mathfrak{A}$, что $e \circ y = 0$. Умножая присоединенно слева последнее равенство на e и учитывая, что $e \circ e = e$, находим:

$$e \circ 0 = e \circ e \circ y = e \circ y = 0,$$

т. е. $e = 0$, что противоречит соотношению $e \neq 0$.

§ 2

Пусть кольцо $\mathfrak{A}$ не является присоединенно-простым. Легко видеть, что в таком кольце существуют максимальные двусторонние присоединенные идеалы. Действительно, пусть a — такой элемент кольца $\mathfrak{A}$, что

$$\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}.$$

Тогда $0 \overline{\in} \mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}$. Обозначим через M максимальный присоединенный идеал, содержащий $\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}$, но не содержащий 0. Ясно, что M будет максимальным присоединенным идеалом в кольце $\mathfrak{A}$. Обозначим теперь через M^* отмеченный идеал [см. ([6])], соответствующий присоединенному идеалу M, т. е. множество всех разностей $a - b$, где $a \in M$ и $b \in M$. Так как M — максимальный присоединенный идеал, то и M^* будет максимальным идеалом в $\mathfrak{A}$, причем, как известно ([3]), фактор-кольцо $\mathfrak{A} / M^*$ содержит единицу. Имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4. *Если кольцо $\mathfrak{A}$ не присоединенно-простое кольцо, то радикал N есть пересечение всех таких максимальных идеалов M^*, что фактор-кольцо $\mathfrak{A} / M^*$ содержит единицу.*

Доказательство. Покажем сначала, что $N \subseteq \Pi M^*$. В самом деле, пусть $a \overline{\in} \Pi M^*$, т. е. пусть элемент a не принадлежит по меньшей мере одному максимальному идеалу M^*. Тогда $(M^*, a) = \mathfrak{A}$ и всякий элемент m из присоединенного идеала M, который соответствует M^*, может быть записан в виде

$$m = m^* + a_1,$$

где $m^* \in M^*$ и $a_1 \in (a)$, т. е.

$$m = c - d + a_1,$$

где c и d принадлежат M. Следовательно, $a_1 = m - c + d \in M$ и поэтому

$$\mathfrak{A} \circ a_1 \circ \mathfrak{A} \subset M,$$

а это, в силу замечания 1, означает, что $a \overline{\in} N$.

Докажем теперь, что идеал ΠM^* обобщенно-радикальный, т. е. что $\Pi M^* \subseteq N$. Для этой цели предположим, что элемент a принадлежит идеалу ΠM^*, но не является обобщенно-радикальным элементом. Следовательно, присоединенный идеал $\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}$ не совпадает с кольцом $\mathfrak{A}$ и его можно включить в некоторый максимальный присоединенный идеал M кольца $\mathfrak{A}$, т. е.

$$\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A} \subseteq M.$$

Из последнего включения, в частности, вытекает, что $a \circ x \in M$ для всякого элемента x из $\mathfrak{A}$. Так как $a \in M^*$, то $a = c - d$, где c и d принадлежат M и, следовательно, $(c - d) \circ x \in M$, или

$$c \circ x - d \circ x + x = m \in M,$$

откуда

$$x = m - c \circ x + d \circ x \in M,$$

т. е. $M = \mathfrak{A}$, что противоречит максимальности M.

§ 3

Как известно [7], Гопкинсом была доказана теорема о том, что всякое нилькольцо с условием минимальности для левых идеалов нильпотентно. Позже эта теорема была обобщена Джекобсоном [5], который доказал, что она остается верной и для радикальных колец. Наконец Brown и McCoy [1] доказали аналогичную теорему для радикала N. Мы приводим новое доказательство этой теоремы.

ТЕОРЕМА. *Радикал N кольца $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для левых идеалов нильпотентен.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Как известно [см. [8], стр. 171—180], из условия минимальности для левых идеалов следует, что кольцо $\mathfrak{A}$ обладает нильпотентным радикалом R, причем фактор-кольцо $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} / R$ есть прямая сумма простых колец с единицей A_i, т. е.

$$\overline{\mathfrak{A}} = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \cdots \dotplus A_n.$$

Рассмотрим естественный гомоморфизм φ, отображающий кольцо $\mathfrak{A}$ на фактор-кольцо $\overline{\mathfrak{A}}$. В силу нашего предположения, $R \neq N$. Следовательно, образ $N\varphi$ есть ненулевой идеал в фактор-кольце $\overline{\mathfrak{A}}$, т. е.

$$N\varphi = \overline{N} \neq \overline{0}.$$

Обозначим через φ_i гомоморфизм, отображающий кольцо $\overline{\mathfrak{A}}$ на A_i. Так как $\overline{N} \neq \overline{0}$, то существует по меньшей мере один такой гомоморфизм φ_i, что идеал $\overline{N}\varphi_i$ кольца A_i отличен от нулевого, т. е. $\overline{N}\varphi_i \neq 0$. Отсюда, в силу простоты кольца A_i, получаем $\overline{N}\varphi_i = A_i$, т. е.

$$N\varphi\varphi_i = A_i.$$

Следовательно, радикал N гомоморфно отображается на ненулевое кольцо с единицей A_i. Прообраз единицы при этом отображении, как известно [3], будет нетривиальным присоединенным идеалом в кольце N, что, согласно следствию 1, противоречит присоединенной простоте радикала N. Этим теорема доказана.

Поступило
15.XII.1951

ЛИТЕРАТУРА

1 Brown B. and McCoy N. H., Radicals and subdirect sums, Amer. J. Mathem., 69 (1947), 46—58.

2 Brown B. and McCoy N. H., Some theorems on groups with applications to rings theory, Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 302—311.

[3] Андрунакиевич В. А., Полурадикальные кольца, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 129—178.
[4] Курочкин В. М., Кольца с условием минимальности для присоединенных идеалов, Доклады Ак. Наук СССР, т. 66 (1949), 549—551.
[5] Jacobson N., The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math., 67 (1945), 300—320.
[6] Шульгейфер Е. Г., Мультипликативная теория присоединенных идеалов в коммутативных кольцах, Доклады Ак. Наук СССР, т. 64 (1949), 633—636.
[7] Hopkins Ch., Rings with minimal condition for left ideals, Ann. of Math., 40 (1939), 712—730.
[8] Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. II, М.—Л. 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 225–252

М. М. ДЖРБАШЯН

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И ПРЕДСТАВИМОСТИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

В статье при помощи теории бесконечных систем линейных уравнений исследуются некоторые вопросы единственности и представимости аналитических функций, принадлежащих к тем или иным классам, при задании последовательных производных функций на произвольном множестве точек.

Вопросы единственности аналитических функций при задании значений их последовательных производных на некотором счетном множестве точек $\{\alpha_n\}$ впервые были изучены в исследованиях В. Л. Гончарова ([1]). Им были введены интерполяционные ряды (ряды Абеля-Гончарова), причем установление критериев разложимости функций в ряды такого вида по заданным значениям $\{f^{(n)}(\alpha_n)\}$ ее последовательных производных на множестве точек $\{\alpha_n\}$ сводилось к оценке некоторых кратных интегралов.

Указанным методом В. Л. Гончаровым был получен ряд тонких теорем, дающих количественные оценки распределения последовательности точек $\{\alpha_n\}$ на плоскости, при которых обеспечивалась разложимость, а следовательно, и единственность тех или иных классов функций по значениям $\{f^{(n)}(\alpha_n)\}$.

В статье ([2]) аналогичным методом была рассмотрена задача о единственности аналитической функции при задании ее последовательных производных в двух точках. Таким образом, задача решалась при двух существенных ограничениях: первое — условия накладывались на все последовательные производные функции и второе — значения производных задавались лишь в двух точках.

В настоящей работе мы подходим к решению задач о единственности и разложимости аналитических функций в интерполяционные ряды, привлекая методы бесконечных систем линейных уравнений.

Это позволяет, во-первых, поставить задачу о единственности для более общих классов аналитических функций и, во-вторых, рассмотреть случаи, когда все последовательные производные функции не заданы.

Приводится общий критерий единственности, необходимость которой доказывается при некоторых дополнительных предположениях.

Как непосредственное следствие теоремы единственности удается установить разложимость рассматриваемых классов целых функций в интерполяционный ряд типа Абеля-Гончарова (§ 1).

Далее приводится ряд следствий из общих теорем единственности и разложимости, которые показывают, что достаточные признаки единственности, данные В. Л. Гончаровым, в случае, когда на аргументы последовательности $\{\alpha_n\}$ не налагается ограничений, могут сильно отличаться от необходимых условий (§ 2).

Наконец, аналогичные результаты устанавливаются для функций, аналитических в круге конечного радиуса (§ 3).

§ 1. Теоремы единственности и представимости для целых функций

Отнесем к классу $A_\lambda(\rho, \sigma)$ все целые функции порядка ρ и типа $<\sigma$, которые в окрестности начала координат представимы рядом Тейлора вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{\lambda_n}}{\lambda_n} z^{\lambda_n}, \tag{A}$$

где $\{\lambda_n\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел.

Заметим, что в силу известной связи, существующей между ростом целой функции и коэффициентами ее разложения в ряд Тейлора [см. ([3]) гл. III]:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \lambda_n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[\lambda_n]{\frac{|a_{\lambda_n}|}{\lambda_n!}} < (\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}},$$

имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \lambda_n^{\frac{1}{\rho}-1} \sqrt[\lambda_n]{|a_{\lambda_n}|} < (\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}} e^{-1}. \tag{B}$$

Таким образом, если обозначить

$$d = (\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}} e^{-1} \text{ и } x_n = \left(d\lambda_n^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{-\lambda_n} a_{\lambda_n}, \tag{C}$$

то всякую функцию класса $A_\lambda(\rho, \sigma)$ можно будет представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\left(d\lambda_n^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_n!} z^{\lambda_n}. \tag{D}$$

Из соотношения (B) следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена (даже больше, она стремится к нулю, как некоторая геометрическая прогрессия).

Пусть μ_n — любая последовательность натуральных чисел, связанная с последовательностью $\{\lambda_n\}$ условиями вида

$$\mu_n \leqslant \lambda_n < \mu_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{E}$$

Назовем последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$ (среди которых могут быть и равные) множеством единственности для класса функций

$A_\lambda(\rho, \sigma)$, если для всякой функции $f(z)$, принадлежащей этому классу, из условий

$$f^{(\mu_n)}(\alpha_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{F}$$

следует, что

$$f(z) \equiv 0.$$

1°. Общий критерий единственности.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы $\{\alpha_n\}$ было множеством единственности для класса функций $A_\lambda(\sigma, \rho)$, достаточно и, вообще говоря, необходимо выполнение условия*

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{(\lambda_k - \mu_k)!}{\left(d\lambda_n^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} |\alpha_k|^{\lambda_{n+k}-\lambda_k} < 1. \tag{1.1}$$

В этом пункте приводится доказательство достаточности условия теоремы; необходимость его будет установлена лишь в п. 3° после изложения результата о существовании целой функции класса $A_\lambda(\sigma, \rho)$ с заданной системой значений ее производных на множестве единственности этого класса.

Доказательство достаточности. Выше было отмечено, что всякая функция $f(z) \in A_\lambda(\sigma, \rho)$ представима рядом Тейлора вида:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\left(d\lambda_n^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_n!} z^{\lambda_n},$$

где $\{x_n\}$ — некоторая ограниченная последовательность комплексных чисел

Условия (F) для функции $f(z)$ запишутся в виде:

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} \frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} \alpha_k^{\lambda_{n+k}-\mu_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.2}$$

Таким образом, для доказательства достаточности условия (1.1) теоремы следует показать, что *единственным ограниченным решением $\{x_n\}$ бесконечной системы линейных однородных уравнений* (1.2) *будет тривиальное решение.*

Переходя к доказательству последнего утверждения, обозначим левую часть выражения (1.1) через $1 - \vartheta\ (0 < \vartheta \leqslant 1)$; тогда при $k \geqslant k_0$

$$\frac{(\lambda_k - \mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} |\alpha_k|^{\lambda_{n+k}-\lambda_k} \leqslant 1 - \frac{\vartheta}{2}. \tag{1.3}$$

Предположим, что система уравнений (1.2), которую мы напишем в виде

$$x_k = -\frac{(\lambda_k-\mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}}\sum_{n-1}^{\infty} x_{n+k}\frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!}\alpha_k^{\lambda_{n+k}-\lambda_k} \quad (k=1,2,3,\ldots), \quad (1.4)$$

имеет нетривиальное ограниченное решение $\{x_k^*\}$. Обозначим $\sup\limits_{k\geqslant k_0}\{|x_k^*|\}=\Omega$ и покажем, что предположение $\Omega>0$ противоречит условию (1.1) теоремы.

Выберем $k_1\geqslant k_0$ таким образом, чтобы

$$|x_{k_1}^*|\geqslant\Omega\left(1-\frac{\vartheta}{4}\right);$$

тогда из (1.4) при $k=k_1$ в силу (1.3) получаем двойное неравенство:

$$\Omega\left(1-\frac{\vartheta}{4}\right)\leqslant|x_{k_1}^*|\leqslant\Omega\left(1-\frac{\vartheta}{2}\right),$$

что противоречит предположению $\Omega>0$. Таким образом, $x_k^*=0$ при $k\geqslant k_0$.

Отсюда и из (1.4) следует, что для неизвестных x_k^*, $1<k\leqslant k_0-1$, удовлетворяется следующая система однородных уравнений:

$$x_k^* = -\frac{(\lambda_k-\mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}}\sum_{n=1}^{k_0-k-1} x_{n+k}^*\frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!}\alpha_k^{\lambda_{n+k}-\lambda_k} \quad (k=1,2,\ldots,k_0-2)$$

$$x_{k_0-1}^*=0.$$

Нетрудно видеть, что определитель этой системы равен единице и, следовательно, система имеет только тривиальное решение.

Таким образом, достаточность условия (1.1) теоремы доказана.

2°. Переходим к вопросу существования целых функций с заданной системой значений ее производных на множествах единственности.

Здесь и в дальнейшем обозначим

$$I_k(d)=\frac{(\lambda_k-\mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!}|\alpha_k|^{\lambda_{n+k}-\lambda_k}. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2. а) *Если* $\lim\limits_{k\to\infty}\sup I_k(d_1)<1$ *и* $\{b_k\}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел, для которой*

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{(\lambda_k-\mu_k)!\,|b_k|}{\left(d_1\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}|\alpha_k|^{\lambda_k-\mu_k}}<+\infty, \quad (2.2)$$

где $0<d_1<d$, *то существует функция* $f(z)\in A_\lambda(\sigma,\rho)$, *удовлетворяющая условиям:*

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k)=b_k \quad (k=1,2,3,\ldots). \quad (2.3)$$

b) *Если* $\limsup_{k\to\infty} I_k(d) < +\infty$, *то для любой функции* $f(z) \in A_\lambda(\sigma, \rho)$ *имеем*:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(\lambda_k - \mu_k)!\, |f^{(\mu_k)}(\alpha_k)|}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} |\alpha_k|^{\lambda_k - \mu_k}} < +\infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. а) Выберем k_0 таким образом, чтобы при $k \geqslant k_0$ имело место:

$$I_k(d_1) \leqslant 1 - \delta \quad (\delta > 0). \tag{2.5}$$

Рассмотрим бесконечную систему линейных уравнений

$$x_k = -\frac{(\lambda_k - \mu_k)!}{\left(d_1 \lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}} \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+k} \frac{\left(d_1 \lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} \alpha_k^{\lambda_{n+k} - \lambda_k} +$$

$$+ \frac{(\lambda_k - \mu_k)!\, b_k}{\left(d_1 \lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} \alpha_k^{\lambda_k - \mu_k}} \quad (k = k_0,\ k_0 + 1, \ldots). \tag{2.6}$$

Из условия (2.2) теоремы следует, что свободные члены этой системы ограничены, а неравенство (2.5) означает, что система вполне регулярна. Из теории бесконечных систем линейных уравнений известно [см. ([4]), гл. 1], что такая система имеет единственное ограниченное решение $\{x_k\}$, $k \geqslant k_0$.

Определим последовательность $\{a_{\lambda_k}\}$ $(k \geqslant k_0)$ из равенств

$$a_{\lambda_k} = \left(d_1 \lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} x_k \quad (k \geqslant k_0);$$

тогда, в силу ограниченности $\{x_n\}$, имеем:

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n^{\frac{1}{\rho}-1} \sqrt[\lambda_n]{|a_{\lambda_n}|} \leqslant d_1. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что функция

$$F(z) = \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{a_{\lambda_n}}{\lambda_n!} z^{\lambda_n}$$

— целая и принадлежит к классу $A_\lambda(\sigma, \rho)$.

При $k \geqslant k_0$ имеем:

$$F^{(\mu_k)}(\alpha_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} \alpha_k^{\lambda_{n+k} - \mu_k} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} \frac{\left(d_1 \lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} \alpha^{\lambda_{n+k} - \mu_k}. \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) следует, что

$$F^{(\mu_k)}(\alpha_k) = b_k \quad (k \geqslant k_0).$$

Для построения целой функции, удовлетворяющей всем условиям (2.3) теоремы, рассмотрим полином

$$P(z) = \sum_{n-1}^{k_0 - 1} \frac{a_{\lambda_n}}{\lambda_n!} z^{\lambda_n},$$

удовлетворяющий условиям:

$$P^{(\mu_k)}(z) = b_k - F^{(\mu_k)}(\alpha_k) \quad (1 \leqslant k \leqslant k_0 - 1). \tag{2.9}$$

Нетрудно видеть, что функция

$$f(z) = F(z) + P(z)$$

удовлетворяет всем требуемым условиям.

Очевидно, что эта функция единственна.

b) Пусть $f(z) \in A_\lambda(\sigma, \rho)$ и

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\left(d\lambda_n^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_n!} z^{\lambda_n};$$

тогда, обозначая $\sup\{|x_k|\} = \Omega$, имеем:

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+k} \frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} \alpha_k^{\lambda_{n+k}-\mu_k},$$

$$|f^{(\mu_k)}(\alpha_k)| \leqslant \Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} |\alpha_k|^{\lambda_{n+k}-\mu_k} =$$

$$= \Omega \frac{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} |\alpha_k|^{\lambda_k-\mu_k}}{(\lambda_k - \mu_k)!} \{1 + I_k(d)\}. \tag{2.10}$$

В силу условия $\limsup_{k\to\infty} I_k(d) < +\infty$ из (2.10) следует неравенство (2.4).

3°. Необходимость общего критерия единственности. Переходя к доказательству утверждения теоремы 1 о том, что условие (1.1), вообще говоря, необходимо для единственности, положим, что в этом пункте

$$\alpha_k = \frac{1}{d}\left\{e^{i\pi} \frac{(\lambda_{k+1} - \mu_k)!}{(\lambda_k - \mu_k)!} \left(\frac{\lambda_k^{\lambda_k}}{\lambda_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\right\}^{\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}} \tag{3.1}$$

ТЕОРЕМА 3. *Если при* $k \to \infty$

$$I_k(d) - 1 < Aq^{\lambda_k} \quad (0 < q < 1), \tag{3.2}$$

где A — *постоянная, то существует функция* $f(z) \in A_\lambda(\sigma, \rho)$, *отличная от тождественного нуля, для которой*

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.3}$$

Доказательство. Рассмотрим целую функцию порядка ρ и типа $\sigma_1 < \sigma$:

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d_1\lambda_n^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_n!} z^{\lambda_n}, \tag{3.4}$$

где

$$d_1 = (\sigma_1 \rho e)^{\frac{1}{\rho}} e^{-1} < d.$$

Из (3.4) и (3.1) имеем:

$$f_1^{(\mu_k)}(\alpha_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(d_1 \lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!} \alpha_k^{\lambda_{n+k}-\mu_k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(d_1 \lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!} \alpha_k^{\lambda_{n+k}-\mu_k},$$

откуда следует, что

$$\left| f_1^{(\mu_k)}(\alpha_k) \right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(d_1 \lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!} \left| \alpha_k \right|^{\lambda_{n+k}-\mu_k}. \tag{3.5}$$

Но из (3.1) следует, что

$$I_k(d) = 1 + \frac{(\lambda_k - \mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(d \lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!} \left| \alpha_k \right|^{\lambda_{n+k}-\lambda_k}. \tag{3.6}$$

Из неравенств (3.2), (3.5), в силу последней формулы, имеем:

$$\left| f_1^{(\mu_k)}(\alpha_k) \right| \leqslant [I_k(d_1) - 1] \frac{\left(d_1 \lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} |\alpha_k|^{\lambda_k-\mu_k}}{(\lambda_k-\mu_k)!} < A \frac{\left(q d_1 \lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} |\alpha_k|^{\lambda_k-\mu_k}}{(\lambda_k-\mu_k)!}. \tag{3.7}$$

Обозначим

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k) = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

тогда из (3.7), в силу того что $0 < q < 1$, следует, что существует такое $\sigma_2 < \sigma_1$, для которого

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(\lambda_k - \mu_k)! \, |b_k|}{\left(d_2 \lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right) |\alpha_k|^{\lambda_k-\mu_k}} < +\infty, \tag{3.8}$$

где

$$d_2 = (\sigma_2 \rho e)^{\frac{1}{\rho}} e^{-1} < d_1.$$

Нетрудно видеть, что при выбранных α_k

$$I_k(d_2) < \frac{d_2}{d} + [I_k(d) - 1],$$

откуда, в силу (3.2),

$$\limsup_{k\to\infty} I_k(d_2) \leqslant \frac{d_2}{d} < 1. \tag{3.9}$$

Из условий (3.9) и (3.8), по теореме 2а), следует, что существует целая функция $f_2(z)$ класса $A_\lambda(\sigma_1, \rho)$, для которой

$$f_2^{(\mu_k)}(\alpha_k) = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Функция

$$f(z) = f_2(z) - f_1(z) \tag{3.10}$$

принадлежит к классу $A_\lambda(\sigma, \rho)$ и отлична от тождественного нуля, так как $f_1(z)$ порядка ρ и типа $\sigma_1 < \sigma$, а $f_2(z)$ порядка ρ, но типа $< \sigma_1$.

Очевидно, что функция (3.10) удовлетворяет условиям теоремы.

Замечание. Нетрудно видеть, что при выборе $\{\alpha_n\}$ по (3.1) существуют последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, для которых выполняется условие (3.2) теоремы.

Рассмотрим следующий простой пример: пусть $\lambda_k = 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lambda_k - \mu_k \leqslant N$, где N не зависит от k. Из (3.1) по формуле Стирлинга имеем:

$$\lim_{k\to\infty} 2^{-\frac{k}{\rho}} |\alpha_k| = \frac{2^{2\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}}{ed}. \tag{3.11}$$

Далее, из (3.6), в силу того что

$$\lambda_{k+1} - \mu_k \geqslant \lambda_{k+1} - \lambda_k = 2^k,$$

имеем при $k \to \infty$ и $n \geqslant 2$:

$$\frac{\left(d\,|\alpha_k|\,\lambda_{k+n}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{k+n}-\lambda_k}}{(\lambda_{k+n}-\lambda_k)!}\cdot\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+n}}\right)^{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\lambda_k} <$$

$$< \left(\frac{ed\,|\alpha_k|\,\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}}{\lambda_{k+n}-\lambda_k}\right)^{\lambda_{k+n}-\lambda_k}\cdot\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+n}}\right)^{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\lambda_k} <$$

$$< \left(\frac{ed\,|\alpha_k|\,\lambda_{k+2}^{1-\frac{1}{\rho}}}{\lambda_{k+2}-\lambda_k}\right)^{\lambda_{k+n}-\lambda_k}\cdot\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+n}}\right)^{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\lambda_k} =$$

$$= \left\{2^{-\left(-1+\frac{1}{\rho}\right)n}\left(2^{2\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{ed2^{-\frac{k}{\rho}}|\alpha_k|}{3}\right)^{2^n-1}\right\}^{2^k} <$$

$$< \left\{2^{1-\frac{1}{\rho}}\cdot 2^{-\frac{2^n-1}{n}}\right\}^{n2^k} < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n2^k}, \tag{3.12}$$

так как, по (3.11),

$$2^{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\frac{ed2^{-\frac{k}{\rho}}|\alpha_k|}{3} < \frac{1}{2},$$

если $k \geqslant k_0$.

Из (3.6) и (3.12) следует, что

$$I_k(d) - 1 < A\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n2^k} < A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k},$$

т. е. условие (3.2).

4°. Две леммы о бесконечных системах линейных уравнений. Рассмотрим бесконечную систему линейных уравнений специального вида:

$$x_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_{k,\,i} x_i + \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

где свободные члены $\{\gamma_k\}$ ограничены, $|\gamma_k| \leqslant P$, и

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |a_{k,\,i}| \leqslant 1 - \vartheta \quad (0 < \vartheta < 1,\ k = p,\ p+1, \ldots), \tag{4.2}$$

а для $1 \leqslant k \leqslant p-1$ ряды сходятся.

Из общей теории бесконечных систем линейных уравнений следует, что при таких условиях система (4.1) имеет единственное ограниченное решение [см. ([4]), гл. 1].

Рассмотрим для любого N укороченную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_k^{(N)} &= \sum_{i=k+1}^{N+p-1} a_{k,\,i} x_i^{(N)} + \gamma_k \quad (k = p, \ldots, N+p-2), \\ x_{N+p-1}^{(N)} &= \gamma_{N+p-1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (4.2) следует, что при любом фиксированном $k \geqslant p$

$$\lim_{N \to \infty} x_k^{(N)} = x_k. \tag{4.4}$$

ЛЕММА 1. *Существует константа M, не зависящая от N, такая, что*

$$|x_i^{(N)}| \leqslant M \quad (i = p,\ p+1, \ldots, N+p-1). \tag{4.5}$$

Доказательство. Обозначим

$$\sup \{|x_n|\} = A;$$

тогда, рассматривая последнее из уравнений (4.3) совместно с уравнением

$$x_{N+p-1} = \sum_{i=N+p}^{\infty} a_{N+p-1,i}\, x_i + \gamma_{N+p-1},$$

в силу (4.2) имеем:

$$|x_{N+p-1} - x_{N+p-1}^{(N)}| \leqslant A \sum_{i=N+p}^{\infty} |a_{N+p-1,\,i}| \leqslant A(1-\vartheta). \tag{4.6}$$

Докажем, что вообще

$$\begin{gathered} |x_i - x_i^{(N)}| \leqslant A(1-\vartheta) \\ (i = p,\ p+1, \ldots, N+p-1). \end{gathered} \tag{4.7}$$

Для этого, в силу (4.4), достаточно предполагать справедливость неравенства (4.5) при $p < i = k,\ k+1, \ldots, N+p-1$ и доказать его для $i = k-1$.

С этой целью рассмотрим следующие уравнения соответственно из систем (4.1) и (4.3):

$$x_{k-1} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{k-1,\, i} x_i + \gamma_{k-1},$$

$$x_{k-1}^{(N)} = \sum_{i=k}^{N+p-1} a_{k-1,\, i} x_i^{(N)} + \gamma_{k-1},$$

откуда имеем:

$$\left| x_{k-1} - x_{k-1}^{(N)} \right| \leqslant \sum_{i=k}^{N+p-1} \left| a_{k-1,\, i} \right| \left| x_i - x_i^{(N)} \right| +$$

$$+ \sum_{i=N+p}^{\infty} \left| a_{k-1,\, i} \right| \cdot \left| x_i \right| \leqslant A (1 - \vartheta) \sum_{i=k}^{N+p-1} \left| a_{k-1,\, i} \right| +$$

$$+ A \sum_{i=N+p}^{\infty} \left| a_{k-1,\, i} \right| < A \sum_{i=k}^{\infty} \left| a_{k-1,\, i} \right| \leqslant A (1 - \vartheta).$$

Таким образом, соотношение (4.7) доказано, откуда в силу ограниченности $\{x_n\}$ следует утверждение (4.5) леммы.

ЛЕММА 2. *Система уравнений*

$$\tilde{x}_k^{(N)} = \sum_{i=k+1}^{N+p-1} a_{k,i} \tilde{x}_i^{(N)} + \gamma_k$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N + p - 2) \quad (4.6)$$

$$\tilde{x}_{N+p-1}^{(N)} = \gamma_{N+p-1}$$

имеет определенное решение, причем

$$\lim_{N \to \infty} \tilde{x}_i^{(N)} = x_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.7}$$

где $\{x_k\}$ — *решение системы* (4.1).

Доказательство. Заметим, что из специальной структуры нашей системы следует, что

$$\tilde{x}_i^{(N)} = x_i^{(N)} \quad (i = p,\ p + 1, \ldots, N + p - 1). \tag{4.8}$$

Как было указано в (4.4), из (4.2) следует, что $\lim\limits_{N \to \infty} x_i^{(N)} = x_i$ при $i \geqslant p$. Таким образом, достаточно установить справедливость (4.7) при $1 \leqslant i \leqslant p - 1$.

С этой целью рассмотрим уравнения

$$\tilde{x}_{p-1}^{(N)} = \sum_{i=p}^{N+p+1} a_{p-1,\, i} \tilde{x}_i^{(N)} + \gamma_{p-1},$$

$$x_{p-1} = \sum_{i=p}^{\infty} a_{p-1,\, i} x_i + \gamma_{p-1}.$$

Имея в виду (4.8), получаем при $Q < N + p - 1$:

$$|x_{p-1} - \tilde{x}_{p-1}^{(N)}| \leqslant \sum_{i=p}^{Q} |a_{p-1,\,i}|\,|x_i - x_i^{(N)}| +$$

$$+ \sum_{i=Q+1}^{N+p-1} |a_{p-1,\,i}|\,|x_i - x_i^{(N)}| + \sum_{i=N+p}^{\infty} |a_{p-1,\,i}|\,|x_i| = R_1 + R_2 + R_3.$$

В силу неравенства (4.5),

$$R_2 < A(1 - \vartheta) \sum_{i=Q+1}^{\infty} |a_{p-1,\,i}|,$$

откуда, выбрав Q достаточно большим, будем иметь:

$$R_2 < \frac{\varepsilon(1 - \vartheta)}{3},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Но тогда в силу того что $N + p > Q + 1$, получим также, что $R_3 < \frac{\varepsilon}{3}$. Учитывая (4.4), выбираем N настолько большим, чтобы иметь $R_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Таким образом, при $N \geqslant N(\varepsilon)$

$$|x_{p-1} - \tilde{x}_{p-1}^{(N)}| < \varepsilon.$$

Следовательно, для установления (4.6) при всяком i, $1 \leqslant i \leqslant p - 1$, достаточно положить, что оно доказано для $1 < i = k, \ldots, p - 1$, и доказать его для $i = k - 1$.

С этой целью рассмотрим уравнения

$$\tilde{x}_{k-1}^{(N)} = \sum_{i=k}^{N+p-1} a_{k-1,\,i}\,\tilde{x}_i^{(N)} + \gamma_{k-1},$$

$$x_{k-1} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k-1,\,i}\,x_i + \gamma_{k-1};$$

тогда для разности их левых частей имеем оценку:

$$|x_{k-1} - \tilde{x}_{k-1}^{(N)}| \leqslant \sum_{i=k}^{p-1} |a_{k-1,i}|\,|x_i - \tilde{x}_i^{(N)}| +$$

$$+ \sum_{i=p}^{Q} |a_{k-1,i}|\,|x_i - x_i^{(N)}| + \sum_{i=Q+1}^{N+p-1} |a_{k-1,i}| \cdot |x_i - x_i^{(N)}| +$$

$$+ \sum_{i=N+p}^{\infty} |a_{k-1,i}|\,|x_i| = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \quad (Q + 1 < N + p).$$

В силу (4.5), находим:

$$R_3 < A(1 - \vartheta) \sum_{i=Q+1}^{\infty} |a_{k-1,i}|,$$

откуда, выбирая Q достаточно большим, имеем

$$R_3 < \frac{\varepsilon(1-\vartheta)}{4},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Тем более справедливо будет неравенство

$$R_4 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, если N достаточно велико, то, в силу нашего предположения и соотношения (4.4), будем иметь также $R_1 < \frac{\varepsilon}{4}$ и $R_2 < \frac{\varepsilon}{4}$.

Таким образом,

$$\left| x_{k-1} - \tilde{x}_{k-1}^{(N)} \right| < \varepsilon \text{ при } N \geqslant N(\varepsilon),$$

и лемма полностью доказана.

5°. Теорема разложения в интерполяционный ряд. На основании результатов, приведенных в предыдущем пункте, мы установим общую теорему о разложимости функций класса $A_\lambda(\sigma, \rho)$ в интерполяционный ряд специального вида.

Пусть для последовательности $\{\alpha_n\}$ имеет место достаточное условие единственности для класса $A_\lambda(\sigma, \rho)$:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(\lambda_k - \mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} |\alpha_k|^{\lambda_{n+k} - \mu_k} < 1. \tag{5.1}$$

Пусть полином $Q_p(z)$ степени λ_p представим в виде

$$Q_p(z) = \sum_{i=1}^{p} c_i z^{\lambda_i}$$

и удовлетворяет условиям

$$Q_p^{(\mu_k)}(\alpha_k) = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, p-1, \\ 1 \text{ при } k = p. \end{cases} \tag{5.2}$$

Из условия (E), которому удовлетворяют последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_k\}$ легко следует, что полином $Q_p(z)$ определяется из (5.2) единственным способом.

Нетрудно видеть, что в явном виде полином $Q_p(z)$ напишется в следующей интегральной форме:

$$Q_p(z) = \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \ldots \int_0^{z_{\mu_1-2}} dz_{\mu_1-1} \int_{\alpha_1}^{z_{\mu_1-1}} dz_{\mu_1} \int_0^{z_{\mu_1}} dz_{\mu_1+1} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{z_{\mu_i-2}} dz_{\mu_i-1} \int_{\alpha_i}^{z_{\mu_i-1}} dz_{\mu_i} \int_0^{z_{\mu_i}} dz_{\mu_i+1} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{z_{\lambda_p-2}} dz_{\lambda_p-1} \int_0^{z_{\lambda_p-1}} dz_{\lambda_p} : \int_0^{\alpha_p} dz_{\mu_p} \int_0^{z_{\mu_p}} dz_{\mu_p+1} \ldots \int_0^{z_{\lambda_p-1}} dz_{\lambda_p}. \tag{5.3}$$

Заметим, что в частном случае, когда

$$\lambda_k = \mu_k = k - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

полином $Q_p(z)$ представляет собой известный в теории интерполирования полином Абеля-Гончарова

$$Q_p(z) = \int_{\alpha_1}^{z} dz_1 \int_{\alpha_2}^{z_1} dz_2 \ldots \int_{\alpha_{p-1}}^{z_{p-2}} dz_{p-1}, \tag{5.4}$$

удовлетворяющий условиям:

$$Q_p^{(k-1)}(\alpha_k) = \begin{cases} 0 \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant p-1, \\ 1 \text{ при } k = p. \end{cases}$$

Полином

$$P_k(z) = \sum_{i=1}^{k} b_i Q_i(z), \tag{5.5}$$

очевидно, — степени λ_k и удовлетворяет условиям:

$$P_k^{(i)}(0) = 0 \quad (i \neq \lambda_p), \qquad P_k^{(\mu_p)}(\alpha_p) = b_p \quad (p = 1, 2, \ldots, k). \tag{5.6}$$

Пусть $f(z)$ — произвольная функция класса $A_\lambda(\sigma, \rho)$; тогда полином

$$P_k(z) = \sum_{i=1}^{k} f^{(\mu_i)}(\alpha_i)\, Q_i(z)$$

удовлетворяет условиям:

$$P_k^{(\mu_p)}(\alpha_p) = f^{(\mu_p)}(\alpha_p) \quad (p = 1, 2, \ldots, k). \tag{5.7}$$

ТЕОРЕМА 4. *При выполнении условия* (5.1) *для любой функции* $f(z) \in A_\lambda(\sigma, \rho)$ *имеет место равномерно сходящееся во всякой замкнутой части плоскости разложение по полиномам* $\{Q_i(z)\}$ *вида*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{(\mu_i)}(\alpha_i)\, Q_i(z). \tag{5.8}$$

Доказательство. Обозначим

$$a_{k,i} = \frac{(\lambda_k - \mu_k)!\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{(\lambda_i - \mu_k)!\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}}\, \alpha_k^{\lambda_i - \lambda_k} \tag{5.9}$$

и

$$\gamma_k = \frac{(\lambda_k - \mu_k)!\, f^{(\mu_k)}(\alpha_k)}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k} \alpha_k^{\lambda_k - \mu_k}}. \tag{5.10}$$

Замечая, что функция $f(z)$ представима рядом вида (Д),

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{\lambda_i!} z^{\lambda_i},$$

где последовательность $\{x_i\}$ ограничена, имеем

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k) = \sum_{i=k}^{\infty} x_i \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{(\lambda_i - \mu_k)!} \alpha_k^{\lambda_i - \mu_k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.11}$$

Из (5.9), (5.10) и (5.11) следует, что ограниченная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет следующей бесконечной системе линейных уравнений:

$$x_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_{k,i} x_i + \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.12}$$

Из условия (5.1) следует, что если p достаточно большое, то

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |a_{k,i}| \leqslant 1 - \vartheta, \quad k \geqslant p \quad (0 < \vartheta \leqslant 1),$$

а при значениях $1 \leqslant k \leqslant p - 1$ эти ряды, очевидно, сходятся.

Из обозначения (5.10), условия (5.1) и теоремы 2b) следует, что последовательность $\{\gamma_k\}$ ограничена.

Таким образом, для системы (5.12) справедливы заключения лемм 1 и 2 предыдущего пункта.

Рассмотрим укороченную систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^{(N)} &= \sum_{i=k+1}^{N+p-1} a_{k,i} \tilde{x}_i^{(N)} + \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N + p - 2), \\ \tilde{x}_{N+p-1}^{(N)} &= \gamma_{N+p-1}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Покажем, что

$$P_{N+p-1}(z) = \sum_{i=1}^{N+p-1} f^{(\mu_i)}(\alpha_i) Q_i(z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+p-1} \tilde{x}_i^{(N)} \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{\lambda_i!} z^{\lambda_i}. \tag{5.14}$$

Действительно, обозначая

$$R_{N+p-1}(z) = \sum_{i=1}^{N+p-1} \tilde{x}_i^{(N)} \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{\lambda_i!} z^{\lambda_i}$$

и имея в виду (5.9), (5.10), мы легко заключаем, что система (5.13) эквивалентна уравнениям

$$R_{N+p-1}^{(\mu_k)}(\alpha_k) = f^{(\mu_k)}(\alpha_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, N + p - 1),$$

которым, как было отмечено выше, удовлетворяет и левая часть (5.14). Так как полиномы $R_{N+p-1}(z)$, $P_{N+p-1}(z)$ оба степени λ_{N+p-1}, то они тождественны, т. е. (5.14) доказано.

Составим разность

$$f(z) - P_{N+p-1}(z) = \sum_{i=1}^{Q} (x_i - \widetilde{x}_i^{(N)}) \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{\lambda_i!} z^{\lambda_i} +$$

$$+ \sum_{i=Q+1}^{N+p-1} (x_i - \widetilde{x}_i^{(N)}) \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{\lambda_i!} z^{\lambda_i} + \sum_{i=N+p}^{\infty} x_i \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{\lambda_i!} z^{\lambda_i} =$$

$$= U_1(z) + U_2(z) + U_3(z). \qquad (5.15)$$

Пусть $|z| \leqslant R$, где R произвольно, но фиксировано. Выберем $Q \geqslant p-1$ так, чтобы

$$\sum_{i=Q+1}^{\infty} \frac{\left(d\lambda_i^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_i}}{\lambda_i!} R^{\lambda_i} < \frac{\varepsilon}{3A};$$

тогда при $|z| \leqslant R$ имеем $|U_3(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Но по лемме 1 (п. 4°)

$$\left|x_i - \widetilde{x}_i^{(N)}\right| \leqslant A(1-\vartheta) \quad (p \leqslant i \leqslant N+p-1),$$

следовательно, при $|z| \leqslant R$,

$$|U_2(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как по лемме 2,

$$\lim_{N\to\infty} \widetilde{x}_i^{(N)} = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

и Q у нас фиксировано, то можно выбрать N так, чтобы при $|z| \leqslant R$

$$|U_1(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при $|z| \leqslant R$

$$|f(z) - P_{N+p-1}(z)| < \varepsilon, \quad \text{если } N \geqslant N_0(\varepsilon),$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствие из теорем 3 и 4. *Если $\{\alpha_n\}$ определяется из (3.1), а последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ такие, что при $k \to \infty$*

$$I_k(d) - 1 < Aq^{\lambda_k} \quad (0 < q < 1),$$

то существует функция $f_1(z) \in A_\lambda(\sigma, \rho)$ такая, что ассоциированный с нею интерполяционный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_1^{(\mu_k)}(\alpha_k) Q_k(z)$$

в любой замкнутой части плоскости равномерно сходится к функции $f_2(z) \not\equiv f_1(z)$.

Действительно, пользуясь обозначениями п. 3°, можно взять

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d_1\lambda_n^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_n!} z^{\lambda_n},$$

где $d_1 = (\sigma_1 \rho e)^{\frac{1}{\rho}} e^{-1} < d$, а функция $f_2(z) \in A_\lambda(\sigma_1, \rho)$ и удовлетворяет условиям

$$f_2^{(\mu_k)}(\alpha_k) = f_1^{(\mu_k)}(\alpha_k) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как

$$\limsup_{k \to \infty} I_k(d_1) \leqslant \frac{d_1}{d} < 1,$$

то, по теореме 4,

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_2^{(\mu_k)}(\alpha_k) Q_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_1^{(\mu_k)}(\alpha_k) Q_k(z),$$

и очевидно, что $f_2(z) \not\equiv f_1(z)$.

Таким образом, достаточное условие разложимости, приведенное в теореме 4, вообще говоря, и необходимо.

Заметим, что в случае, когда

$$\mu_k = \lambda_k = k - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

интерполяционные ряды вида (5.8) для целых функций были детально изучены в исследованиях В. Л. Гончарова ([1]) совершенно отличным методом. Полученные им достаточные условия разложимости, например, в случае, когда не делается никаких предположений об аргументах последовательности $\{\alpha_n\}$, могут сильно отличаться от необходимых условий.

В последующем будет показано, что для некоторых случаев, рассмотренных В. Л. Гончаровым, теорема 4 дает более сильные достаточные условия разложимости.

§ 2. Некоторые следствия из общего критерия единственности

В настоящем параграфе приводится ряд следствий из общего критерия единственности, данного в § 1 (1°), при частных предположениях о распределении последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$. При этом сохраняются все обозначения § 1.

Из результата § 1 следует, что каждой теореме о единственности для класса $A_\lambda(\sigma, \rho)$, являющейся следствием из общего критерия при тех или иных дополнительных предположениях о характере последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, будет соответствовать теорема о разложимости функций указанного класса в интерполяционный ряд рассмотренного в § 1 вида. Поэтому в дальнейшем изложении будем формулировать лишь теоремы единственности.

1°. Случай, когда $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ представляют собой арифметические прогрессии.

Предположим, что последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, начиная с некоторого n, представляют собой арифметические прогрессии с одной и той же разностью p. Именно, пусть

$$\begin{aligned} \mu_n &= pn + r \quad (0 \leqslant r \leqslant p - 1), \\ \lambda_n &= pn + q \quad (r \leqslant q \leqslant p + r - 1); \end{aligned} \tag{1.1}$$

тогда имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Если для последовательности* $\{\alpha_n\}$

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{|\alpha_k|}{k^{\frac{1}{\rho}-1}} < \frac{\eta_p}{(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}} p^{\frac{1}{\rho}-1}, \tag{1.2}$$

где η_p — *корень трансцендентного уравнения*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \omega^{-i(q-r)} e^{\omega^i \eta_p} = \frac{2p\eta_p^{q-r}}{(q-r)!} \quad \left(\omega = e^{\frac{2\pi}{p} i}\right), \tag{1.3}$$

то $\{\alpha_n\}$ *является множеством единственности для класса функций* $A_\lambda(\sigma, \rho)$.

Доказательство. По теореме 1, $\{\alpha_n\}$ будет множеством единственности для класса функций $A_\lambda(\sigma, \rho)$, если

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{(q-r)!}{\left[d(pk+q)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{pk+q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[d(p(n+k)+q)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{p(n+k)+q}}{(pn+q-r)!} |\alpha_k|^{np} < 1. \tag{1.4}$$

Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{|\alpha_k|}{k^{\frac{1}{\rho}-1}} = c < c_1;$$

тогда при всяком фиксированном N будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{(q-r)!}{\left[d(pk+q)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{pk+q}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\left[d(p(n+k)+q)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{p(n+k)+q}}{(pn+q-r)} |\alpha_k|^{pn} =$$

$$= (q-r)! \sum_{n=1}^{N} \frac{\left[cd\,(pe)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{np}}{(pn+q-r)!} = 0. \tag{1.5}$$

Докажем, что

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{k\to\infty} \sup \frac{(q-r)!}{\left[d(pk+q)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{pk+q}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\left[d(p(n+k)+q)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{p(n+k)+q}}{(pn+q-r)!} \cdot |\alpha_k|^{pn} = 0. \tag{1.6}$$

Обозначая через $R_k(N)$ выражение, стоящее под знаком двойного предела в (1.6), при достаточно большом k имеем:

$$R_k(N) \leqslant (q-r)! \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{\left[\frac{p(n+k)+q}{pk+q}\right]^{p(n+k)+q}\right\}^{1-\frac{1}{\rho}} \frac{\left(c_1 dp^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{np}}{(pn+q-r)!}.$$

Если $\rho \leqslant 1$, то отсюда следует:

$$R_k(N) < (q-r)! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\left(c_1 d p^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{np}}{(pn+q-r)!},$$

и после предельного перехода получаем (1.6).

Пусть $\rho > 1$; тогда из неравенства

$$\left[\frac{p(n+k)+q}{pk+q}\right]^{p(n+k)+q} < (pn)^n e^{pn},$$

справедливого при $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$, получаем по формуле Стирлинга:

$$R_k(N) < (q-r)! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\left(c_1 d p^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{np}}{(pn+q-r)!} (pne)^{pn\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} < A \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c_2^{pn}}{n^{\frac{pn}{\rho}}},$$

где A и c_2 — постоянные, не зависящие от N. Отсюда опять получаем (1.6).

Из (1.4), (1.5) и (1.6) следует, что при

$$(q-r)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[cd(pe)^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{pn}}{(pn+q-r)!} < 1$$

$\{\alpha_n\}$ будет последовательностью единственности.

Теорема доказана, если иметь в виду формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{pn+q-r}}{(pn+q-r)!} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \omega^{-i(q-r)} e^{\omega^i z}. \tag{1.7}$$

Замечание. Для корня η_p трансцендентного уравнения (1.3) имеем

$$\eta_p < \left\{\frac{(p+q-r)!}{(q-r)!}\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{1.8}$$

и если $\lim\limits_{p\to\infty} (q-r)\cdot p^{-1} = \gamma$, то

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\eta_p}{p} = \frac{(1-\gamma)^{1+\gamma}}{e\gamma^\gamma} \quad (0 \leqslant \gamma \leqslant 1). \tag{1.9}$$

Действительно, по формуле (1.7) имеем следующее уравнение для η_p:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_p^{np}}{(np+q-r)!} = \frac{1}{(q-r)!}, \tag{1.10}$$

откуда и следует (1.8).

В случае же существования предела

$$\lim_{p\to\infty} (q-r)\, p^{-1} = \gamma,$$

по формуле Стирлинга из (1.8) получаем

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{\eta_p}{p} \leqslant \frac{(1+\gamma)^{1+\gamma}}{e\gamma^\gamma}. \tag{1.11}$$

Далее, из (1.10) следует неравенство

$$\frac{1}{(q-r)!} < \frac{\eta_p^p}{(p+q-r)!} + \frac{\eta_p^{2p}}{(2p+q-r)!} e^{\eta_p}. \tag{1.12}$$

Имея в виду (1.11), легко убеждаемся, что предел второго слагаемого в правой части (1.12) равен нулю. Следовательно, из (1.12) получаем

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{\eta_p}{p} \geqslant \frac{(1+\gamma)^{1+\gamma}}{e\gamma^\gamma},$$

что вместе с (1.11) дает нам (1.9).

Укажем теперь некоторые следствия из приведенной теоремы.

Следствие 1. *Если* $f(z)$ — *целая функция порядка* ρ *и типа* $<\sigma$, *удовлетворяющая условиям вида* $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *где*

$$\limsup_{k\to\infty} k^{1-\frac{1}{\rho}} |\alpha_k| < \frac{\log 2}{(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}}, \tag{1.13}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Действительно, достаточно заметить, что при $p = 1$ трансцендентное уравнение (1.3) примет вид $e^\eta = 2$.

Заметим, что при $\rho = 1$ этот результат был ранее установлен другим способом [см. ([5])].

Случай любого $\rho > 0$ был рассмотрен В. Л. Гончаровым методом разложения функций в интерполяционный ряд (Абеля-Гончарова).

Предположим, что

$$\lim_{k\to\infty} k^{1-\frac{1}{\rho}} |\alpha_k| = c$$

и последовательности $\{\alpha_{2n}\}$ и $\{\alpha_{2n+1}\}$ лежат соответственно на лучах $\arg z = \varphi$, $\arg z = -\varphi$ $\left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Нетрудно видеть, что в данном случае

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \alpha_{k-1}|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = 2c\rho \sin\varphi.$$

По критерию В. Л. Гончарова при сделанных допущениях единственность для целых функций порядка ρ и типа $<\sigma$ имеет место, если $\tau < (\sigma\rho e)^{-\frac{1}{\rho}}$, т. е. если

$$\lim_{k\to\infty} k^{1-\frac{1}{\rho}} |\alpha_k| = c < \frac{\left(2\rho e^{\frac{1}{\rho}} \sin\varphi\right)^{-1}}{(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}}. \tag{1.14}$$

Сопоставляя (1.14) с (1.13), мы видим, что при

$$\sin\varphi > \left(2\rho e^{\frac{1}{\rho}} \log 2\right)^{-1}$$

критерий (1.13) сильнее.

Следствие 2. *Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ и типа $<\sigma$, удовлетворяющая условиям:*

$$\begin{aligned} &f^{(2n)}(0) = f^{(2n+1)}(\alpha_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ &f^{(2n+1)}(0) = f^{(2n)}(\alpha_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$\limsup_{k\to\infty} k^{1-\frac{1}{\rho}} |\alpha_k| < \frac{\log(2+\sqrt{3})}{(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}} 2^{\frac{1}{\rho}-1}, \tag{1.16}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Действительно, в обоих случаях уравнение (1.3) примет вид

$$e^{\eta} + e^{-\eta} = 4,$$

откуда

$$\eta = \log(2+\sqrt{3}).$$

Следствие 3. *Если при тех же предположениях условия* (1.15) *заменены условиями*

$$f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(\alpha_n) = 0$$

или $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$f^{(2n+1)}(0) = f^{(2n+1)}(\alpha_n) = 0,$$

где

$$\limsup_{k\to\infty} k^{1-\frac{1}{\rho}} |\alpha_k| < \frac{\eta}{(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}} 2^{\frac{1}{\rho}-1},$$

то $f(z) \equiv 0$; *при этом* η — *корень уравнения*

$$e^{\eta} - e^{-\eta} = 4\eta.$$

Наконец, отметим, что при существенном дополнительном ограничении $\alpha_n = \alpha$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $q = r$ в случае $\rho = 1$ аналогичная задача рассмотрена и в работе ([2]). При этом, когда p достаточно велико, приведенное там условие единственности $\alpha < \frac{p}{e}$ совпадает с результатом, который следует из теоремы 5 в силу (1.9).

2°. Случай, когда $\lambda_{k+1} - \lambda_k \to \infty$. Приведем следствия из общей теоремы единственности, предполагая, что $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \infty$.

ТЕОРЕМА 6. *Если*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|\alpha_k|}{\lambda_{k+1}^{\frac{1}{\rho}-1} (\lambda_{k+1} - \mu_k)} < \frac{1}{(\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}}}, \tag{2.1}$$

то $\{\alpha_n\}$ *будет множеством единственности для класса функций* $A_\lambda(\sigma, \rho)$ *при* $\rho \leqslant 1$.

Доказательство. В данном случае в обозначениях § 1 (формула (2.1)) имеем:

$$I_k(d) < (\lambda_k - \mu_k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(d \mid \alpha_k \mid \lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}-\lambda_k}}{(\lambda_{n+k} - \mu_k)!} <$$

$$< \frac{(\lambda_k - \mu_k)!\, e^{\lambda_k - \mu_k}}{\sqrt{\pi}\,(\lambda_{k+1} - \mu_k)^{\lambda_k - \mu_k + \frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{ed \mid \alpha_k \mid \lambda_{k+1}^{1-\frac{1}{\rho}}}{\lambda_{k+1} - \mu_k}\right\}^{\lambda_{k+n}-\lambda_k} \tag{2.2}$$

Но нетрудно видеть, что

$$\frac{(\lambda_k - \mu_k)!\, e^{\lambda_k - \mu_k}}{\sqrt{\pi}\,(\lambda_{k+1} - \mu_k)^{\lambda_k - \mu_k + \frac{1}{2}}} \leqslant A, \tag{2.3}$$

где A — постоянная, не зависящая от k.

Если теперь заметить, что $d = (\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}} e^{-1}$, то для любого $d_1 > d$, в силу (2.1), при $k \geqslant k_0$ будем иметь:

$$\frac{ed \mid \alpha_k \mid}{\lambda_{k+1}^{\frac{1}{\rho}-1} (\lambda_{k+1} - \mu_k)} < \frac{d}{d_1} = q < 1. \tag{2.4}$$

Из (2.2), (2.3) и (2.4) при $k \geqslant k_0$ имеем:

$$I_k(d) < A \sum_{n=1}^{\infty} q^{\lambda_{n+k}-\lambda_k} < A \sum_{i=\lambda_{k+1}-\lambda_k}^{\infty} q^i,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} I_k(d) = 0$ и, по теореме 1, можно утверждать, что $f(z) \equiv 0$.

Следствие. *Если*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\mu_k}{\lambda_{k+1}} < \delta < 1, \tag{2.5}$$

то для единственности достаточно иметь

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\mid \alpha_k \mid}{\lambda_{k+1}^{\frac{1}{\rho}}} < \frac{1-\delta}{(\sigma\rho e)^{\frac{1}{\rho}}}. \tag{2.6}$$

При более сильных требованиях относительно роста последовательности $\{\lambda_n\}$ можно указать простой критерий единственности для класса функций $A_\lambda(\sigma, \rho)$ при $\rho > 1$.

Предположим, что

$$0<\omega<\lim_{k\to\infty}\inf\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\leqslant\lim_{k\to\infty}\sup\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}<\Omega<1. \tag{2.7}$$

Из условия $\mu_k\leqslant\lambda_k<\mu_{k+1}$ $(k=1,2\ldots)$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{\mu_k}{\lambda_{k+1}}\leqslant\lim_{k\to\infty}\sup\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}. \tag{2.8}$$

В случае, когда в (2.8) не имеет места знак равенства, допустим, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{\mu_k}{\lambda_{k+1}}<\delta<\Omega. \tag{2.9}$$

Пусть, далее, $\Delta=\delta$, если в (2.8) не имеет места знак равенства, и $\Delta=\Omega$, если он имеет место.

При сделанных предположениях и обозначениях докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *Если*

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{|\alpha_k|}{\lambda_{k+1}^{\frac{1}{\rho}}}<\frac{1-\Delta}{(e\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}}\,\omega^{\frac{(\rho-1)\Omega}{(1-\Omega)\rho}}, \tag{2.10}$$

то $\{\alpha_n\}$ *будет множеством единственности для класса функций* $A_\lambda(\sigma,\rho)$ *при* $\rho>1$.

Доказательство. Заметим, что если $k\geqslant k_0$, то

$$\frac{\lambda_{k+n}^{1-\frac{1}{\rho}}}{\lambda_{k+n}-\mu_k}<\frac{1}{\lambda_{k+1}^{\frac{1}{\rho}}\left(1-\frac{\mu_k}{\lambda_{k+1}}\right)}<\frac{1}{\lambda_{k+1}^{\frac{1}{\rho}}(1-\Delta)}$$

и

$$\frac{\lambda_{k+n}}{\lambda_k}<\omega^{-n}\quad(n=1,2,\ldots). \tag{2.11}$$

Далее,

$$\lambda_{k+n}-\lambda_k\geqslant n(\lambda_{p+1}-\lambda_p)\quad(p\geqslant k), \tag{2.12}$$

где

$$\lambda_{p+1}-\lambda_p=\min(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\quad(k\leqslant i\leqslant k+n-1).$$

Из (2.11) и (2.12) имеем при $k\geqslant k_0$

$$\left(\frac{\lambda_{k+n}}{\lambda_k}\right)^{\frac{\lambda_k(1-\rho^{-1})}{\lambda_{k+n}-\lambda_k}}<\omega^{-\frac{\lambda_k(1-\rho^{-1})}{\lambda_{p+1}-\lambda_p}}\leqslant\omega^{-\frac{\lambda_p(1-\rho^{-1})}{\lambda_{p+1}-\lambda_p}}<\omega^{-\frac{1-\rho^{-1}}{\Omega^{-1}-1}}=\varkappa. \tag{2.13}$$

Из выражения

$$I_k(d)=\frac{(\lambda_k-\mu_k)!}{\left(d\lambda_k^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(d\lambda_{n+k}^{1-\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda_{n+k}}}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!}\,|\alpha_k|^{\lambda_{n+k}-\lambda_k},$$

в силу (2.3), (2.11) и (2.13), при $k\geqslant k_0$ имеем:

$$I_k(d)<A\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{de\,|\alpha_k|\,\varkappa}{\lambda_{k+1}^{\frac{1}{\rho}}(1-\Delta)}\right\}^{\lambda_{n+k}-\lambda_k}$$

Но по условию (2.10) теоремы выражение

$$\frac{de\,|\alpha_k|\,\varkappa}{\lambda_{k+1}^{\rho-1}(1-\Delta)}\leqslant q<1$$

при $k\geqslant k_0$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} I_k(d)=0$ и теорема доказана.

§ 3. Теоремы единственности и представимости для функций, голоморфных в круге конечного радиуса

Отнесем к классу $B_\lambda(R)$ функции, голоморфные в круге радиуса, большего R, и представимые рядом Тейлора вида:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{\lambda_n}z^{\lambda_n}, \tag{A'}$$

где, как всегда, $\{\lambda_n\}$ — произвольная последовательность натуральных чисел.

Таким образом,

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[\lambda_n]{|b_{\lambda_n}|}<\frac{1}{R}, \tag{B'}$$

и если обозначить

$$x_n=b_{\lambda_n}R^{\lambda_n},$$

то всякую функцию $f(z)\subset B_\lambda(R)$ можно будет представить в виде

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\left(\frac{z}{R}\right)^{\lambda_n}. \tag{C'}$$

Из (B′) следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена (больше того, она стремится к нулю, как геометрическая прогрессия).

Как и в начале § 1, предположим, что $\{\mu_n\}$ — другая последовательность натуральных чисел, для которой

$$\mu_n\leqslant\lambda_n<\mu_{n+1}\quad(n=1,2,\ldots). \tag{E'}$$

Наконец, последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$ мы назовем множеством единственности для класса функций $B_\lambda(R)$, если для всякой функции $f(z)\subset B_\lambda(R)$ из условий

$$f^{(\mu_n)}(\alpha_n)=0\quad(n=1,2,\ldots) \tag{F'}$$

будет следовать, что $f(z)\equiv 0$.

Способ исследования единственности и разложимости в интерполяционный ряд, развитый в § 1 и § 2, может быть применен также для функций класса $B_\lambda(R)$. При этом большинство теорем доказывается аналогичными рассуждениями и выкладками. Поэтому в настоящем параграфе нами приводятся лишь формулировки главных результатов для функций класса $B_\lambda(R)$ и только в некоторых случаях даются этапы доказательств.

1°. Теорема единственности и существования для функций класса $B_\lambda(R)$.

ТЕОРЕМА 1′. *Для того чтобы $\{\alpha_n\}$ было множеством единственности для класса функций $B_\lambda(R)$, достаточно и, вообще говоря, необходимо выполнение условия*

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{(\lambda_k-\mu_k)!}{\lambda_k!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+k}!}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!}\left(\frac{|\alpha_k|}{R}\right)^{\lambda_{n+k}-\lambda_k}<1. \tag{1.1}$$

Доказательство достаточности условия (1.1) при помощи представления (C′) проводится вполне аналогично теореме 1.

Для установления необходимости условия (1.1), а также с целью получения соответствующего результата о разложении в интерполяционный ряд доказывается следующая теорема.

Пусть

$$I_k(R)=\frac{(\lambda_k-\mu_k)!}{\lambda_k!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+k}!}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!}\left(\frac{|\alpha_k|}{R}\right)^{\lambda_{n+k}-\lambda_k}. \tag{1.2}$$

ТЕОРЕМА 2′. a) *Если $\limsup\limits_{k\to\infty} I_k(R_1)<1$ и $\{b_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой*

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{(\lambda_k-\mu_k)!\,R_1^{\lambda_k}}{\lambda_k!\,|\alpha_k|^{\lambda_k-\mu_k}}|b_k|<+\infty, \tag{1.3}$$

где $R_1>R$, то существует функция $f(z)\subset B_\lambda(R)$, удовлетворяющая условию

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k)=b_k\quad(k=1,2,\ldots). \tag{1.4}$$

b) *Если $\limsup\limits_{k\to\infty} I_k(R)<+\infty$, то для любой функции $f(z)\in B_\lambda(R)$ имеем:*

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{(\lambda_k-\mu_k)!\,R^{\lambda_k}}{\lambda_k!\,|\alpha_k|^{\lambda_k-\mu_k}}\,|f^{(\mu_k)}(\alpha_k)|<+\infty. \tag{1.5}$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 2.

В качестве следствия из теоремы 2′ доказывается, что условие (1.1), вообще говоря, и необходимо.

Именно, если

$$\alpha_k=R\left\{e^{i\pi}\frac{(\lambda_{k+1}-\mu_k)!\,\lambda_k!}{(\lambda_k-\mu_k)!\,\lambda_{k+1}!}\right\}^{\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}}, \tag{1.6}$$

то имеет место

ТЕОРЕМА 3'. *Если при* $k \to \infty$

$$I_k(R) - 1 < Aq^{\lambda_k} \quad (0 < q < 1), \tag{1.7}$$

то существует функция $f(z) \subset B_\lambda(R)$, *для которой*

$$f^{(\mu_k)}(\alpha_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

причем $f(z) \not\equiv 0$.

Эта теорема доказывается аналогично теореме 3, причем в качестве примера последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, для которых выполняется условие (1.7), можно указать случай

$$\lambda_n = \mu_n = 2^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Наконец, используя результат п. 5° § 1 о бесконечных уравнениях, мы доказываем теорему о разложимости функций класса $B_\lambda(R)$ в интерполяционный ряд, рассмотренный в теореме 4.

Если последовательность полиномов $\{Q_\nu(z)\}$ удовлетворяет условиям п. 5° § 1, то имеет место

ТЕОРЕМА 4'. *Если для последовательности* $\{\alpha_n\}$

$$\limsup_{k\to\infty} I_k(R) < 1,$$

то для всякой функции $f(z) \subset B_\lambda(R)$ *имеет место разложение в ряд вида*

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} f^{(\mu_p)}(\alpha_p)\, Q_p(z), \tag{1.8}$$

равномерно сходящееся в каждой замкнутой части круга $|z| < R$.

Заметим также, что при $\limsup\limits_{k\to\infty} I_k(R) = 1$ разложение (1.8) может не сходиться к соответствующей функции. Такой пример строится аналогично примеру из § 1.

2°. Случай арифметической прогрессии. Предположим, как и в п. 1° § 2, что последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, начиная с некоторого n, представляют арифметические прогрессии с одной и той же разностью p. Именно, пусть

$$\begin{aligned} \mu_n &= pn + r \quad (0 \leqslant r \leqslant p-1), \\ \lambda_n &= pn + q \quad (r \leqslant q \leqslant p + r - 1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ТЕОРЕМА 5'. *Если для последовательности* $\{\alpha_n\}$

$$\limsup_{k\to\infty} k\,|\alpha_k| < R\,\frac{\eta_p}{p}, \tag{2.2}$$

где η_p, *как и в теореме 5,— корень трансцендентного уравнения*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \omega^{-i(q-r)} e^{\omega^i \eta_p} = \frac{2p\eta_p^{q-r}}{(q-r)!}, \tag{2.3}$$

то $\{\alpha_n\}$ *является множеством единственности для класса функций* $B_\lambda(R)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5, но мы отметим его основные моменты.

В силу теоремы 1′, $\{\alpha_n\}$ будет множеством единственности для класса функций $B_\lambda(R)$, если

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{(q-r)!}{(pk+q)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[p(n+k)+q]!}{(pn+q-r)!}\left(\frac{|\alpha_k|}{R}\right)^{pn}<1. \tag{2.4}$$

Пусть $\limsup_{k\to\infty} k|\alpha_k| = Rc < Rc_1$; тогда при всяком фиксированном N будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(q-r)!}{(pk+q)!}\sum_{n=1}^{N}\frac{[p(n+k)+q]!}{(pn+q-r)!}\left(\frac{|\alpha_k|}{R}\right)^{pn}=(q-r)!\sum_{n=1}^{N}\frac{(cp)^{pn}}{(pn+q-r)!}. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$R_k(N)=\frac{(q-r)!}{(pk+q)!}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{[p(n+k)+q]!}{(pn+q-r)!}\left(\frac{|\alpha_k|}{R}\right)^{pn}$$

и заметим, что по формуле Стирлинга при $n\geqslant N+1$ и $k\geqslant k_0$

$$\frac{[p(n+k)+q]!}{k^{pn}(pk+q)!\,(pn+q-r)!}<A\left[e\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{k_0}\right)\right]^{pn}.$$

Выберем теперь N и k_0 так, чтобы

$$|\alpha_k|<R\frac{c_1}{k},\quad c_1e\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{k_0}\right)\leqslant\gamma<1;$$

тогда получим:

$$0\leqslant\lim_{N\to\infty}R_k(N)\leqslant A\limsup_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\gamma^{np}=0. \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.6) следует, что при

$$(q-r)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(cp)^{pn}}{(pn+q-r)!}<1$$

имеет место единственность. Теорема доказана, если иметь в виду формулу (1.7) § 2.

Следствие 1. *Если* $f(z)$ *голоморфна в круге* $|z|<\rho\ (\rho>R)$ *и* $f^{(n)}(\alpha_n)=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, *где*

$$\limsup_{k\to\infty}k|\alpha_k|R<\log 2, \tag{2.7}$$

то $f(z)\equiv 0$.

Этот результат другим методом был ранее получен Какеуа [6]. Для его установления надо заметить, что при $p=1$ для η_p получаем уравнение $e^{\eta}=2$.

Следствие 2. *Если* $f(z)$ *голоморфна в круге* $|z| < \rho\ (\rho > R)$ *и*

$$f^{(2n)}(0) = f^{(2n+1)}(\alpha_n) = 0$$

или $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (2.8)

$$f^{(2n+1)}(0) = f^{(2n)}(\alpha_n) = 0,$$

где $\limsup\limits_{k\to\infty} k|\alpha_k| < \frac{R}{2}\log(2+\sqrt{3})$, *то* $f(z) \equiv 0$.

Действительно, в обоих случаях уравнение (2.3) примет вид

$$e^{\eta} + e^{-\eta} = 4,$$

откуда имеем

$$\eta = \log(2+\sqrt{3}).$$

Следствие 3. *Если при тех же предположениях условия* (2.8) *заменены условиями*

$$f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(\alpha_n) = 0,$$

или $(\alpha_n \neq 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$f^{(2n+1)}(0) = f^{(2n+1)}(\alpha_n) = 0$$

где $\limsup\limits_{k\to\infty} k|\alpha_k| < \frac{R}{2}\eta$, *то* $f(z) \equiv 0$; *при этом* η — *корень уравнения*

$$e^{\eta} - e^{-\eta} = 4\eta.$$

3°. Случай, когда $\lambda_{k+1} - \lambda_k \to \infty$. Переходя к случаю, когда $\lambda_{k+1} - \lambda_k \to \infty$, предположим, что последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ удовлетворяют неравенствам (2.7), (2.8), (2.9) из п. 2° § 2. Сохраняя обозначения, принятые нами в п. 2° § 2, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6′. *Если*

$$\limsup_{k\to\infty} |\alpha_k| < R(1-\Delta)\,\omega^{\frac{\Omega}{1-\Omega}}, \tag{3.1}$$

то $\{\alpha_n\}$ *будет множеством единственности для функций класса* $B_\lambda(R)$.

Доказательство. Пусть число $\varkappa$ выбрано так, что при $k \geqslant k_0$

$$|\alpha_k| < \varkappa R < R(1-\Delta)\,\omega^{\frac{\Omega}{1-\Omega}}; \tag{3.2}$$

тогда по формуле Стирлинга имеем

$$I_k(R) \leqslant \frac{(\lambda_k-\mu_k)!}{\lambda_k!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+k}!}{(\lambda_{n+k}-\mu_k)!}\,\varkappa^{\lambda_{n+k}-\lambda_k} <$$

$$< \frac{(\lambda_k-\mu_k)!\,e^{\lambda_k-\mu_k}}{\sqrt{\pi}\,(\lambda_{k+1}-\mu_k)^{\lambda_k-\mu_k+\frac{1}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{n+k}\varkappa}{\lambda_{n+k}-\mu_k}\right)^{\lambda_{n+k}-\lambda_k}\cdot\left(\frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_k}\right)^{\lambda_k+\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Но, как было отмечено в § 2, п. 2°, выражение, стоящее в правой части неравенства (3.3) вне знака суммы, ограничено.

Далее,

$$\lambda_{k+n} - \lambda_k \geqslant n(\lambda_{p+1} - \lambda_p) \quad (p \geqslant k), \tag{3.4}$$

где

$$\lambda_{p+1} - \lambda_p = \min(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \ \ (i = k, \ldots, k+n-1),$$

$$\frac{\lambda_{n+k}}{\lambda_{n+k} - \mu_k} \leqslant \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - \mu_k}, \quad \frac{\lambda_{k+n}}{\lambda_k} < \omega^{-n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.5}$$

Из (3.3), (3.4) и (3.5) имеем:

$$I_k(R) < A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varkappa \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - \mu_k} \, \omega^{-\frac{\lambda_k + \frac{1}{2}}{\lambda_{p+1} - \lambda_p}} \right\}^{\lambda_{k+n} - \lambda_k}. \tag{3.6}$$

Замечая, что $p \geqslant k$, в силу принятых нами обозначений можем утверждать, что при $k \geqslant k_0$

$$\omega^{-\frac{\lambda_k + \frac{1}{2}}{\lambda_{p+1} - \lambda_p}} \leqslant \omega^{-\frac{\lambda_p + \frac{1}{2}}{\lambda_{p+1} - \lambda_p}} < \omega^{-\frac{1}{\Omega^{-1} - 1}} \tag{3.7}$$

и

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - \mu_k} = \frac{1}{1 - \frac{\mu_k}{\lambda_{k+1}}} < \frac{1}{1 - \Delta}. \tag{3.8}$$

Из (3.6), (3.7) и (3.8) заключаем, что при $k \geqslant k_0$

$$I_k(R) < A \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\varkappa \omega^{-\frac{1}{\Omega^{-1} - 1}}}{1 - \Delta} \right\}^{\lambda_{k+1} - \lambda_k};$$

отсюда и из (3.2) следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} I_k(R) = 0$. Теорема доказана.

При дополнительных ограничениях $\mu_k = \lambda_k$, $\alpha_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, которые существенны для метода, примененного в работе ([2]), приведен другой критерий единственности, причем не установлено, является ли он критерием разложимости.

Сектор математики и механики
Ак. Наук Арм. ССР

Поступило
13. XII. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гончаров В., a) Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques, Généralisation de la série d'Abel, Ann. Ec. Norm., 47 (1930), 1—78.

b) Интерполяционные процессы и целые функции, Усп. мат. наук, вып. 3 (1937), 113—143.

[2] Гельфонд А. О. и Ибрагимов И. И., О функциях, производные которых равны нулю в двух точках, Изв. Ак. Наук СССР, сер. мат. 11 (1947), 547—560.

[3] Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Мат. института им. Стеклова, т. XXVI, 1949.

[4] Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., ГТТИ, 1949.

[5] Takenaka S., On the expansion of analytic functions in generalized Taylor's series, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, 14 (1932), 529-542.

[6] Kakeya S., An extension of power series, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, 14 (1932), 125—138.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 259—280

Г. И. БАРЕНБЛАТТ и Б. М. ЛЕВИТАН

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(*Представлено академиком* С. Н. **Бернштейном**)

В работе изучается разложение функций, заданных в интервале $(0, \infty)$, в интеграл типа интеграла Фурье по собственным функциям уравнения $y'' + \mu^{m+2} q(x) y = 0$ в предположении, что функция $q(x)$ удовлетворяет условиям 1) — 5) § 1. Полученные результаты применяются затем к решению уравнения теплопроводности или диффузии в турбулентном потоке.

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[A(z)\frac{\partial R}{\partial z}\right] = u(z)\frac{\partial R}{\partial t},$$

приближенно описывающее стационарные процессы переноса в турбулентно движущейся жидкости, обтекающей цилиндрическую поверхность. Здесь R — температура или концентрация диффундирующего вещества; z — координата, отсчитываемая по нормали к обтекаемой поверхности; t — координата, отсчитываемая вдоль поверхности; $A(z) = \lambda + D(z)$, где λ — коэффициент молекулярного переноса, $D(z)$ — коэффициент турбулентного переноса, $D(0) = 0$; $u(z)$ — средняя скорость потока.

Полагая $x = \int\limits_0^z \frac{dz}{A(z)}$, $q(x) = u(z) A(z)$, приведем это уравнение к виду:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = q(x)\frac{\partial R}{\partial t},$$

который и будет изучаться в дальнейшем в предположении, что $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \infty$. В работе будут построены решения некоторых краевых задач для этого уравнения при определенных предположениях относительно $q(x)$, а также решения краевых задач для соответствующего неоднородного уравнения.

Представляет интерес также следующая форма рассматриваемого уравнения. Полагая $dy = \sqrt{q(x)}\,dx$, приведем последнее уравнение к виду:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{q(x)}\;\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \sqrt{q(x)}\,\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Это уравнение, если рассматривать y как координату, а t как время, можно истолковать как уравнение теплопроводности для стержня пере-

менной теплоемкости и теплопроводности, однако такого, что его коэффициент температуропроводности постоянен и равен единице. Такое представление позволит нам физически интерпретировать ряд свойств рассматриваемого уравнения. Упомянутый стержень в дальнейшем мы будем называть «эквивалентным стержнем».

§ 1

1. Положим в уравнении

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = q(x)\frac{\partial R}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$R(x, t) = y(x, \mu)\, e^{-\mu^{m+2} t};$$

тогда для $y(x, \mu)$ получим уравнение:

$$y'' + \mu^{m+2} q(x)\, y = 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим некоторые свойства уравнения (1.2) в предположении, что $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям, которые мы будем считать выполненными во всем дальнейшем изложении:

1) $q(x) \geqslant 0$, $q(x)$ может обращаться в нуль лишь при $x = 0$;

2) $q(x)$ имеет непрерывную вторую производную везде, кроме, быть может, точки $x = 0$;

3) Вблизи начала координат

$$q(x) = x^m(1 + p(x)), \quad p(0) = 0, \quad m \geqslant 0;$$

4)
$$\int^{\infty} \sqrt{q(x)}\, dx = \infty;$$

5)
$$\int^{\infty} \left| \frac{5}{16} \frac{q'^2(x)}{q^{\frac{5}{2}}(x)} - \frac{q''(x)}{4q^{\frac{3}{2}}(x)} \right| dx < \infty.$$

Пусть $y = \varphi_\alpha(x, \mu)$ — интеграл уравнения (1.2), удовлетворяющий условиям

$$\varphi_\alpha(0, \mu) = \sin\alpha, \quad \frac{d\varphi_\alpha(0, \mu)}{dx} = \cos\alpha.$$

Рассмотрим его асимптотическое поведение при $x \to \infty$. Для этого преобразуем переменные следующим образом:

$$s^{\frac{m}{4}} z = q^{\frac{1}{4}}(x)\, y; \quad \frac{2}{m+2} s^{\frac{m+2}{2}} = \int_0^x \sqrt{q(x)}\, dx.$$

Уравнение (1.2) при этом перейдет в следующее:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \mu^{m+2} s^m z = R(s)\, z,$$
$$R(s) = \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4} + 1\right)\frac{1}{s^2} - \frac{5}{16}\,\frac{s^m q'^2(x)}{q^3(x)} + \frac{1}{4}\,\frac{s^m q''(x)}{q^2(x)}. \tag{1.3}$$

Считая правую часть уравнения (1.3) известной, ищем z методом вариации

произвольной постоянной:

$$z = A(s)\, a\sqrt{\mu s}\, J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right] + B(s)\, b\sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right], \tag{1.4}$$

$$a = \Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)(m+2)^{-\frac{1}{m+2}}; \quad b = \Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)(m+2)^{-\frac{m+1}{m+2}},$$

$$A(s) = \sin\alpha - \frac{b}{\mu}\int_0^s R(\sigma)\, z(\sigma)\sqrt{\mu\sigma}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu\sigma)^{\frac{m+2}{2}}\right] d\sigma,$$

$$B(s) = -\frac{\cos\alpha}{\mu} + \frac{a}{\mu}\int_0^s R(\sigma)\, z(\sigma)\sqrt{\mu\sigma}\, J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu\sigma)^{\frac{m+2}{2}}\right] d\sigma.$$

Можно показать [см. (9)], что

$$s^{\frac{m}{4}}\sqrt{\mu s}\, J_{\pm\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]$$

ограничено. Покажем, что

$$s^{\frac{m}{4}} z = q^{\frac{1}{4}}(x)\, y$$

также ограничено. В самом деле, имеет место [см. (10)]

ЛЕММА. *Пусть в интервале* $0 \leqslant x \leqslant X$ $f(x)$ *непрерывна и неотрицательна,* $g(x)$ *интегрируема и неотрицательна и пусть*

$$f(x) \leqslant C + \int_0^x f(x)\, g(x)\, dx;$$

тогда

$$f(x) \leqslant C e^{\int_0^x g(x)\, dx}.$$

Предположим, что

$$M = \max\left\{\left|a s^{\frac{m}{4}}\sqrt{\mu s}\, J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]\right|, \left|b s^{\frac{m}{4}}\sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]\right|\right\}.$$

Пусть $\mu \geqslant \rho > 0$; тогда

$$\left|s^{\frac{m}{4}} z\right| \leqslant \left|A(s)\, a s^{\frac{m}{4}}\sqrt{\mu s}\, J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right] +\right.$$

$$\left. + B(s)\, b s^{\frac{m}{4}}\sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]\right| \leqslant M\{|A(s)| + |B(s)|\} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) + M^2\int_0^s \left|s^{-\frac{m}{2}} R(s)\right| \left|s^{\frac{m}{4}} z(s)\right| ds.$$

По лемме отсюда следует, что

$$|s^{\frac{m}{4}} z| \leqslant M\left(1+\frac{1}{\rho}\right) e^{M^{2}\int\limits_{0}^{s}\left|s^{-\frac{m}{2}} R(s)\right| ds}.$$

Но из условия 5) вытекает, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left|s^{-\frac{m}{2}} R(s)\right| ds<\infty;$$

поэтому $|s^{\frac{m}{4}} z|$ ограничено, и притом равномерно по μ при $\mu \geqslant \rho > 0$.

Используя свойство 5), мы можем теперь показать, что при $x \to \infty$ интегралы в выражениях для $A(s)$ и $B(s)$ сходятся. В самом деле, например,

$$\left|a\int\limits_{0}^{s} R(s)\, z(s) \sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right] ds\right|<M\left|\int\limits_{0}^{s}|s^{\frac{m}{4}} z|\,|s^{-\frac{m}{2}} R(s)|\, ds\right|<$$

$$<MN\int\limits_{0}^{\infty}\left|s^{-\frac{m}{2}} R(s)\right| ds,$$

если $|s^{\frac{m}{4}} z|<N$; таким образом, имеем при $x \to \infty$:

$$z(s, \mu)=[A(\infty)+o(1)]\, a \sqrt{\mu s}\, J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]+$$

$$+[B(\infty)+o(1)]\, b \sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right].$$

Используя свойство 4) и асимптотические представления бесселевых функций при больших значениях аргумента [см. ([9])], получим при $x \to \infty$:

$$z(s, \mu)=\sqrt{\frac{m+2}{\pi}}(\mu s)^{-\frac{m}{4}}\left\{M(\mu) \cos \mu^{\frac{m+2}{2}} \int\limits_{0}^{x} \sqrt{q}\, dx+\right.$$

$$\left.+N(\mu) \sin \mu^{\frac{m+2}{2}} \int\limits_{0}^{x} \sqrt{q}\, dx+o(1)\right\},$$

где

$$M(\mu)=A(\infty)\, a \sin \frac{m+4}{4(m+2)} \pi+B(\infty)\, b \cos \frac{m+4}{4(m+2)} \pi;$$

$$N(\mu)=A(\infty)\, a \cos \frac{m+4}{4(m+2)} \pi+B(\infty)\, b \sin \frac{m+4}{4(m+2)} \pi.$$

Окончательно получаем искомое асимптотическое представление для $y=\varphi_{\alpha}(x, \mu)$ при $x \to \infty$:

$$y(x, \mu) = \sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\, \mu^{-\frac{m}{4}} q^{-\frac{1}{4}}(x) \left\{ M(\mu) \cos \mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx + \right.$$

$$\left. + N(\mu) \sin \mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx + o(1) \right\}. \qquad (1.5)$$

2. Изучим, далее, асимптотическое поведение решения $\varphi_\alpha(x, \mu)$ и его производной $\frac{d\varphi_\alpha(x, \mu)}{dx}$ при $\mu \to \infty$. Пусть $x \neq 0$ и $\sin\alpha$ сперва также не равен нулю. Тогда легко видеть, что

$$A(s) = \sin\alpha + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad B(s) = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Из формулы (1.4) поэтому следует, что при $\mu \to \infty$

$$z(s, \mu) = a \sin\alpha \sqrt{\mu s}\, J_{-\frac{1}{m+2}} \left[\frac{2}{m+2} (\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\mu}\right) \sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}} \left[\frac{2}{m+2} (\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right].$$

Пользуясь асимптотическим представлением бесселевых функций при больших значениях аргумента, получаем:

$$z = \sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\, \mu^{-\frac{m}{4}} s^{-\frac{m}{4}} \left\{ a \sin\alpha \sin\left[\frac{2}{m+2} (\mu s)^{\frac{m+2}{2}} + \frac{m+4}{4(m+2)}\pi\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \cos\left[\frac{2}{m+2} (\mu s)^{\frac{m+2}{2}} - \frac{m+4}{4(m+2)} \pi\right] \right\}.$$

Таким образом, асимптотическое представление для $\varphi_\alpha(x, \mu)$ при $\mu \to \infty$ и $x \neq 0$ имеет вид:

$$\varphi_\alpha(x, \mu) = \sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\, q^{-\frac{1}{4}}(x)\, \mu^{-\frac{m}{4}} \left\{ P(\mu) \cos \mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx + \right.$$

$$\left. + Q(\mu) \sin \mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx \right\}, \qquad (1.6)$$

где

$$P(\mu) = a \sin\alpha \sin \frac{m+4}{4(m+2)} \pi + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad Q(\mu) = a \sin\alpha \cos \frac{m+4}{4(m+2)} \pi + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Вполне аналогично получаем, что при $\mu \to \infty$ и $x \neq 0$

$$\frac{d\varphi_\alpha(x, \mu)}{dx} = \sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\, q^{\frac{1}{4}}(x)\, \mu^{\frac{m}{4}+1} \left\{ -P(\mu) \sin \mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx + \right.$$

$$\left. + Q(\mu) \cos \mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx \right\}. \qquad (1.7)$$

Пусть $\sin\alpha = 0$. Тогда легко видеть, что $z = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$,

$$A(s) = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \quad B(s) = -\frac{b}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

и мы получаем:

$$\varphi_\alpha(x, \mu) = -\sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\, q^{-\frac{1}{4}}(x)\, \mu^{-\frac{m}{4}-1}\left\{b\cos\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{m+4}{4(m+2)}\pi\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\sin\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}} + \frac{m+4}{4(m+2)}\pi\right]\right\} =$$

$$= -\sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\, q^{-\frac{1}{4}}(x)\, \mu^{-\frac{m}{4}-1}\left\{S(\mu)\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x \sqrt{q}\,dx + T(\mu)\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x \sqrt{q}\,dx\right\}, \tag{1.8}$$

где

$$S(\mu) = b\cos\frac{m+4}{4(m+2)}\pi + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad T(\mu) = b\sin\frac{m+4}{4(m+2)}\pi + O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

$$\frac{d\varphi_\alpha(\mu, x)}{dx} = \sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\, q^{\frac{1}{4}}(x)\, \mu^{\frac{m}{4}}\left\{-S(\mu)\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x \sqrt{q}\,dx + \right.$$

$$\left. + T(\mu)\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x \sqrt{q}\,dx\right\}. \tag{1.9}$$

3. Займемся теперь вопросом о разложении по собственным функциям уравнения (1.2) в полубесконечном интервале $(0, \infty)$. Используя метод, предложенный в работе [2], мы будем вводить фиктивный конец $x = b$ и рассматривать пределы соответствующих разложений на конечном интервале $(0, b)$ при $b \to \infty$.

Рассмотрим в связи с этим задачу Штурма-Лиувилля на конечном интервале $(0, b)$ для уравнения (1.2) и краевых условий:

$$y(0, \mu)\cos\alpha - y'(0, \mu)\sin\alpha = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{1.10}$$

$$y(b, \mu)\cos\beta - y'(b, \mu)\sin\beta = 0, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{1.11}$$

Рассмотренное выше решение $y = \varphi_\alpha(x, \mu)$ удовлетворяет условию (1.10); из условия (1.11) определяются собственные числа μ_n.

Для любой непрерывной функции $f(x)$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_0^b f^2(x)\, q(x)\, dx = \int_0^\infty F^2(\mu)\, d\rho_b(\mu), \quad F(\mu) = \int_0^b q(x)\, f(x)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, dx,$$

$$\rho_b(\mu) = \sum_{0 \leqslant \mu_n \leqslant \mu} \frac{1}{\alpha_n^2}, \quad \alpha_n^2 = \int_0^b q(x)\, \varphi_\alpha^2(x, \mu_n)\, dx.$$

Подобно тому как это делается в работе (²), можно показать, что существует монотонно-неубывающая функция $\rho(\mu)$, не зависящая от $f(x)$, так что $\rho_b(\mu)$ стремится к $\rho(\mu)$ при $b \to \infty$, и если $\int\limits_0^\infty f^2(x)\, q(x)\, dx$ существует, то

$$\int\limits_0^\infty f^2(x)\, q(x)\, dx = \int\limits_0^\infty F^2(\mu)\, d\rho(\mu),$$

$$F(\mu) = \underset{b \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int\limits_0^b q(x)\, f(x)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, dx. \, *$$

Отсюда следует, что если

$$\int\limits_0^\infty F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu)$$

сходится равномерно в каждом конечном интервале, то

$$f(x) = \int\limits_0^\infty F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu). \tag{1.12}$$

Действительно, пусть $g(x)$ — непрерывная функция, равная нулю вне интервала $(0, n)$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\int\limits_0^n q(x)\, f(x)\, g(x)\, dx = \int\limits_0^\infty F(\mu) \left\{ \int\limits_0^n g(x)\, q(x)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, dx \right\} d\rho(\mu).$$

В силу равномерной сходимости, можно изменить порядок интегрирования, и мы получаем, что

$$\int\limits_0^n q(x)\, g(x) \left\{ f(x) - \int\limits_0^\infty F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right\} dx = 0.$$

Интеграл в правой части равенства (1.12), в силу равномерной сходимости, непрерывен. Отсюда, из непрерывности $f(x)$ и произвольности $g(x)$ мы получаем (1.12).

Докажем теперь лемму, которая будет использована в дальнейшем.

ЛЕММА. *Пусть* $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$. *Тогда при* $x \overline{\in} [a, b]$

$$\int\limits_0^\infty F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) = 0, \quad F(\mu) = \int\limits_a^b q(x)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, dx.$$

Положим $a = 0$ и $b < \infty$ и введем функцию $h_b(x) = [1\ (0 \leqslant x \leqslant b),\ 0\ (x > b)]$. Если мы покажем, что при $x \in [0, c]$ (c — любое число $< b$) или $x \in [d, \infty]$ (d — любое число $> b$) интеграл в левой части предыдущего равенства сходится равномерно, то из равенства (1.12) будет следовать, что

$$\int\limits_0^\infty F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) = \begin{cases} 1 & (x < b), \\ 0 & (x > b). \end{cases}$$

* Знаком l.i.m. обозначается предел в смысле сходимости в среднем квадратичном.

Комбинируя функции $h_a(x)$ и $h_b(x)$, легко докажем лемму полностью.

Рассмотрим

$$F(\mu)=\int_0^b q(x)\,\varphi_\alpha(x,\mu)\,dx.$$

В силу уравнения (1.2),

$$F(\mu)=-\frac{\varphi_x'(b,\mu)}{\mu^{m+2}}+\frac{\varphi'(0,\mu)}{\mu^{m+2}}=-\frac{\varphi_x'(b,\mu)}{\mu^{m+2}}+\frac{O(1)}{\mu^{m+2}}.$$

Пользуясь асимптотической формулой (1,7), получаем

$$F(\mu)=-\sqrt{\frac{m+2}{\pi}}\frac{q^{\frac{1}{4}}(b)\,\mu^{\frac{m}{4}+1}}{\mu^{m+2}}\Big\{-P(\mu)\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx+$$

$$+Q(\mu)\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx\Big\}+O\Big(\frac{1}{\mu^{m+2}}\Big).$$

Отсюда следует, что

$$\int^{\infty}F(\mu)\,\varphi_\alpha(x,\mu)\,d\rho(\mu)=\int^{\infty}-\frac{1}{\mu^{m+2}}\frac{m+2}{\pi}\Big\{q^{\frac{1}{4}}(b)\,q^{-\frac{1}{4}}(x)\,\mu\Big[-P\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx+$$

$$+Q\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx\Big]\Big[P\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x\sqrt{q}\,dx+$$

$$+Q\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x\sqrt{q}\,dx\Big]+o(1)\Big\}\mu^m\,d\mu\Big[1+O\Big(\frac{1}{\mu}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{m+2}{\pi}q^{\frac{1}{4}}(b)q^{-\frac{1}{4}}(x)\int^{\infty}\Big[P\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx-$$

$$-Q\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx\Big]\Big[P\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x\sqrt{q}\,dx+Q\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x\sqrt{q}\,dx\Big]\frac{d\mu}{\mu}+\cdots$$

Равномерная сходимость отброшенных членов очевидна. Так как $P, Q=O(1)$, то получающиеся интегралы сводятся к интегралам вида

$$\int^{\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big(\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx\Big)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big(\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^x\sqrt{q}\,dx\Big)\frac{d\mu}{\mu},$$

а эти последние — к интегралам

$$\int^{\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big(\delta\mu^{\frac{m+2}{2}}\Big)\frac{d\mu}{\mu},$$

где $|\delta|$ превосходит некоторое $k>0$, в силу предположений относительно интервалов изменения x. Пусть $\nu=\mu^{\frac{m+2}{2}}$; тогда

$$\int^{\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,\delta\mu^{\frac{m+2}{2}}\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2}{m+2}\int^{\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,\delta\nu\frac{d\nu}{\nu},$$

что и доказывает лемму, так как этот последний интеграл сходится равномерно в рассматриваемых интервалах изменения x. Если $\sin\alpha = 0$, то доказательство без труда модифицируется.

Будем называть спектром оператора $q^{-1}(x)\frac{d^2}{dx^2}$ множество точек роста функции $\rho(\mu)$. Построим $\rho(\mu)$ и одновременно докажем теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $q(x)$ удовлетворяет условиям 1) — 5), то спектр оператора $q^{-1}(x)\frac{d^2}{dx^2}$ непрерывен.*

Рассмотрим определитель Вронского двух линейно независимых решений уравнения (1.2):

$$y = \varphi_\alpha(x, \mu) \quad \text{и} \quad y = \varphi_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(x, \mu).$$

Этот определитель должен равняться единице, но при $x \to \infty$ он, как нетрудно показать, равен

$$\frac{m+2}{\pi}\{MN_1 - M_1N\} + o(1), \tag{1.13}$$

где M_1, N_1 соответствуют M, N для $\varphi_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(x, \mu)$. Отсюда следует, что

$$MN_1 - M_1N = \frac{\pi}{m+2},$$

и, таким образом, M и N не могут обратиться в нуль для одного и того же значения μ.

Введем второй конец $x = b$ и на нем условие (1.11). При $b \to \infty$ это условие запишется в виде:

$$\mathfrak{M}(\mu)\cos\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx + \mathfrak{N}(\mu)\sin\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx = o(1), \tag{1.14}$$

$$\mathfrak{M}(\mu) = M(\mu)\cos\beta + M(\mu)\frac{\sin\beta}{4q(b)} - \mu^{\frac{m+2}{2}}q^{\frac{1}{2}}(b)N(\mu)\sin\beta.$$

$$\mathfrak{N}(\mu) = N(\mu)\cos\beta + N(\mu)\frac{\sin\beta}{4q(b)} + \mu^{\frac{m+2}{2}}q^{\frac{1}{2}}(b)M(\mu)\sin\beta.$$

Очевидно, что одновременное обращение в нуль $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ влечет за собой одновременное обращение в нуль M и N и, следовательно, невозможно. Положим поэтому:

$$\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}} = \sin\omega(\mu), \qquad \frac{\mathfrak{N}}{\sqrt{\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}} = \cos\omega(\mu);$$

тогда условие (1.14) запишется в виде:

$$\sin\left[\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx + \omega(\mu)\right] = o(1). \tag{1.15}$$

Пусть μ_{k-1} и μ_k — последовательные корни уравнения (1.15); тогда

$$\mu^{\frac{m+2}{2}}\int_0^b\sqrt{q}\,dx + \omega(\mu_{k-1}) = l\pi + o(1), \tag{1.16}$$

где l — целое число. Для следующего за μ_{k-1} корня μ_k либо справедлива формула

$$\mu_k^{\frac{m+2}{2}} \int_0^b \sqrt{q}\, dx + \omega(\mu_k) = l\pi + o(1)$$

с тем же l, что и в формуле (1.16), либо формула

$$\mu_k^{\frac{m+2}{2}} \int_0^b \sqrt{q}\, dx + \omega(\mu_k) = (l+1)\pi + o(1).$$

Первый случай невозможен *. В самом деле, если бы он имел место, то, в силу теоремы Ролля, $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mu}$ обращалась бы в нуль для некоторого μ_s, удовлетворяющего формуле (1.16), или, так как $q(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то $\frac{\partial q^{\frac{1}{4}} \varphi_\alpha}{\partial \mu}$ обращалась бы в нуль. Покажем, что это не так. Для этого продифференцируем уравнение (1.2) по μ:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) + \mu^{m+2} q(x) \frac{\partial y}{\partial \mu} = -(m+2)\mu^{m+1} q y.$$

Применяя метод вариаций произвольных постоянных и учитывая, что $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ удовлетворяет начальным условиям

$$\frac{\partial y(0,\mu)}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y(0,\mu)}{\partial \mu}\right) = 0$$

$\left(\text{так как } y(0,\mu) = \sin\alpha,\ \frac{dy(0,\mu)}{dx} = \cos\alpha\right)$, мы получим:

$$\frac{\partial \left(q^{\frac{1}{4}} \varphi_\alpha\right)}{\partial \mu} = q^{\frac{1}{4}}(x)\, \varphi_\alpha(x,\mu)\,(m+2)\,\mu^{m+1} \int_0^x q(s)\, \varphi_\alpha(s,\mu)\, \varphi_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(s,\mu)\, ds -$$

$$- q^{\frac{1}{4}}(x)\, \varphi_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(x,\mu)\,(m+2)\,\mu^{m+1} \int_0^x q(s)\, \varphi_\alpha^2(s,\mu)\, ds.$$

Подставляя в это выражение асимптотическую формулу (1.5), получаем:

$$\frac{\partial q^{\frac{1}{4}} \varphi_\alpha}{\partial \mu} = \frac{(m+2)^2}{\pi} q^{\frac{1}{4}}(x)\, \varphi_\alpha(x,\mu) \int_0^{\zeta(x)} d\zeta(s) \{M M_1 \cos^2 \zeta(s) + N N_1 \sin^2 \zeta(s)\} -$$

$$- \frac{(m+2)^2}{\pi} q^{\frac{1}{4}}(x)\, \varphi_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(x,\mu) \int_0^{\zeta(x)} d\zeta(s) \{M^2 \cos^2 \zeta(s) + N^2 \sin^2 \zeta(s)\} + O(1) =$$

$$= \frac{(m+2)^2}{\pi} q^{\frac{1}{4}}(x) \left\{\varphi_\alpha(x,\mu) \frac{MM_1 + NN_1}{2} - \varphi_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(x,\mu) \frac{M^2+N^2}{2}\right\} \zeta(x) + O(1) =$$

$$= \frac{\mu^{-\frac{m}{4}} (m+2)^{\frac{5}{2}}}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \{M N_1 - M_1 N\} \{-M \sin \zeta(x) + N \cos \zeta(x)\} \zeta(x) + O(1),$$

* В монографии (2) доказательство этого не рассмотрено.

где

$$\zeta(s) = \mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^s \sqrt{q(s)}\, ds,$$

а M_1, N_1 соответствуют M и N для $\varphi_{\alpha-\frac{\pi}{2}}(x, \mu)$. Так как при $x \to \infty$ $\zeta(x) \to \infty$, то, пользуясь формулой (1.13), получаем окончательно:

$$\frac{1}{\zeta(x)} \frac{\partial q^{\frac{1}{4}} \varphi_\alpha(x, \mu)}{\partial \mu} = \mu^{-\frac{m}{4}} \frac{(m+2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \{-M \sin\zeta(x) + N \sin\zeta(x) + o(1)\} =$$

$$= \mu^{-\frac{m}{4}} \frac{(m+2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \sqrt{M^2+N^2} \cos\left(\mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx + \omega(\mu)\right) + o(1).$$

Отсюда видно, что если μ удовлетворяет уравнению (1.16), то

$$\left| \frac{\partial q^{\frac{1}{4}} \varphi_\alpha(x, \mu)}{\partial \mu} \cdot \frac{1}{\zeta(x)} \right| \approx \mu^{-\frac{m}{4}} \frac{(m+2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \sqrt{M^2+N^2} \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Легко видеть, что при $b \to \infty$

$$\mu_{k+1} - \mu_k = o(1);$$

отсюда и из непрерывности $\omega(\mu)$ следует:

$$\mu_{k+1}^{\frac{m+2}{2}} - \mu_k^{\frac{m+2}{2}} = \frac{\pi}{\int_0^b \sqrt{q}\, dx} + o\left\{\left[\int_0^b \sqrt{q}\, dx\right]^{-1}\right\}.$$

Построим теперь функцию $\rho(\mu)$. По определению,

$$\rho_b(\mu + \Delta) - \rho_b(\mu) = \sum_{\mu \leq \mu_n < \mu+\Delta} \frac{1}{\int_0^b q(x)\, \varphi_\alpha^2(x, \mu_n)\, dx}.$$

При $x \to \infty$

$$\varphi_\alpha^2(x, \mu_n) = [(M + o(1))\cos\zeta(x) + (N + o(1))\sin\zeta(x)]^2 \frac{m+2}{\pi} q^{-\frac{1}{2}}(x)\, \mu^{-\frac{m}{2}} =$$

$$= \frac{m+2}{\pi} q^{-\frac{1}{2}}(x)\, \mu^{-\frac{m}{2}} \left\{\frac{M^2+N^2}{2} + [M^2 - N^2 + o(1)]\cos 2\zeta(x) + \right.$$

$$\left. + [2MN + o(1)]\sin 2\zeta(x)\right\}.$$

Очевидно, что

$$\int_0^b {\sin \atop \cos} 2\zeta(x) \sqrt{q}\, dx = O(1).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^b q(x)\,\varphi_\alpha^2(x,\mu)\,dx = \frac{m+2}{\pi}\cdot\mu^{-\frac{m}{2}}\frac{M^2+N^2}{2}\int_0^b \sqrt{q}\,dx + O(1).$$

В силу последних соотношений, при $b\to\infty$ имеем:

$$\rho_b(\mu+\Delta)-\rho_b(\mu) = \sum_{\mu\leqslant\mu_n<\mu+\Delta}\frac{1}{\int_0^b q(x)\varphi_\alpha^2(x,\mu_n)\,dx} =$$

$$= \sum\frac{\left(\mu_k^{m+2}-\mu_{k-1}^{m+2}\right)\int_0^b \sqrt{q}\,dx\cdot\mu^{\frac{m}{2}}}{\frac{\mu_k^{\frac{m+2}{2}}+\mu_{k-1}^{\frac{m+2}{2}}}{2}\cdot\frac{m+2}{\pi}\cdot\pi\cdot(M^2+N^2)\int_0^b\sqrt{q}\,dx} =$$

$$= \sum\frac{\left(\mu_k^{m+2}-\mu_{k-1}^{m+2}\right)}{(m+2)(M^2+N^2)\,\mu} + o(1) = \int_\mu^{\mu+\Delta}\frac{\mu^m d\mu}{M^2(\mu)+N^2(\mu)} + o(1).$$

Окончательно получаем:

$$\rho(\mu+\Delta)-\rho(\mu) = \int_\mu^{\mu+\Delta}\frac{\mu^m\,d\mu}{M^2+N^2},\quad d\rho(\mu) = \frac{\mu^m\,d\mu}{M^2+N^2}.$$

Таким образом, множеством точек роста функции $\rho(\mu)$ будет вся полупрямая $(0,\infty)$, что и доказывает теорему. Мы видим, что при условиях теоремы 1 $\rho(\mu)$ не зависит от условия на конце $x=b$, устремляемом в бесконечность, т. е. от β. Далее, очевидно, что при невыполнении условия 4) независимо от условия 5) спектр рассматриваемого оператора будет дискретен, а $\rho(\mu)$ будет зависеть от условия на конце $x=b$, устремляемом в бесконечность. Это значит, что в задаче Штурма-Лиувилля на интервале $(0,\infty)$ для уравнения (1.2) и условия (1.10) функция $\rho(\mu)$ определяется неоднозначно. Физический смысл этого нетрудно определить, пользуясь эквивалентным стержнем, так как интеграл $\int_0^\infty \sqrt{q}\,dx$ означает полную длину стержня. Теорема 1 и утверждает, что при бесконечно длинном стержне и выполнении условия 5) дело обстоит качественно так же, как в случае бесконечного стержня в классической теории теплопроводности $(q\equiv 1)$. В случае конечного эквивалентного стержня мы просто получаем задачу на конечном интервале, где спектр дискретен и существенны оба краевые условия.

4. Дадим некоторые асимптотические оценки для $\rho(\mu)$. Пусть $\sin\alpha\neq 0$. В этом случае

$$M^2+N^2 = A^2(\infty)\,a^2 + B^2(\infty)\,b^2 + 2A(\infty)\,B(\infty)\,ab\sin\frac{m+4}{m+2}\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= a^2\sin^2\alpha + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Поэтому при $\mu \to \infty$

$$d\rho(\mu) = \frac{\mu^m d\mu}{a^2 \sin^2 \alpha + O\left(\frac{1}{\mu}\right)} = \frac{\mu^m d\mu}{a^2 \sin^2 \alpha}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\rho(\mu) \sim \frac{\mu^{m+1}}{(m+1)\, a^2 \sin^2 \alpha} + O(\mu^m).$$

Точно так же можно показать, что в случае $\sin \alpha = 0$

$$\rho(\mu) \sim \frac{\mu^{m+3}}{(m+3)\, b^2} + O(\mu^{m+2}).$$

§ 2

Для дальнейшего нам понадобится формула, аналогичная формуле Пуассона, известной из классической теории теплопроводности:

$$\lim_{\tau \to t} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{\varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } x \overline{\in} [a, b], \\ \dfrac{\varphi(a+0)}{2}, & \text{если } x = a, \\ \dfrac{\varphi(b-0)}{2}, & \text{если } x = b, \\ \dfrac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2}, & \text{если } x \in (a, b). \end{cases} \qquad (2.1)$$

Именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть при* $\tau < t$

$$S = \int_a^b f(\xi, \tau)\, q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu), \qquad 0 \leqslant a < b \leqslant \infty,$$

где $f(x, t)$ — *ограниченная, кусочно-непрерывная по* x *и непрерывная по* t *функция. Тогда*

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau \to t} S = 0 && \text{при} \quad x \overline{\in} [a, b], \\ &\lim_{\tau \to t} S = \frac{1}{2} f(a+0, t) && \text{при} \quad x = a, \\ &\lim_{\tau \to t} S = \frac{1}{2} f(b-0, t) && \text{при} \quad x = b, \\ &\lim_{\tau \to t} S = \frac{f(x+0, t) + f(x-0, t)}{2} && \text{при} \quad x \in (a, b). \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Положим сперва $f(x, t) \equiv 1$. Докажем (2.2) для $x \overline{\in} [a, b]$. Имеем:

$$S = \int_a^b q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu),$$

где

$$F(\mu) = \int_a^b q(\xi)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\xi.$$

Перемена порядка интегрирования законна, так как при $\tau < t$ внутренний интеграл левой части сходится равномерно по ξ. Покажем, что при $\tau \to t$ $\lim S = 0$. В самом деле, для любого M справедливо равенство:

$$S = \int_0^M e^{-\mu^{m+2(t-\tau)}} F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) + \int_M^\infty e^{-\mu^{m+2(t-\tau)}} F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu).$$

Оценим величину второго слагаемого. Пусть $\sigma = t - \tau$; тогда

$$I = \int_M^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) =$$

$$= \sigma \int_M^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} (m+2) \left\{ \int_M^\mu F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right\} \mu^{m+1}\, d\mu +$$

$$+ e^{-\mu^{m+2}\sigma} \left\{ \int_M^\mu F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right\} \Bigg|_{\mu=M}^{\mu=\infty}.$$

Второе слагаемое обращается в нуль. Далее, в силу леммы § 1,

$$\int_0^\infty F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu)$$

сходится при $x \overline{\in} [a, b]$ к нулю. Поэтому

$$\int_M^\mu F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu)$$

при достаточно большом M и всех $\mu > M$ становится по абсолютной величине меньше любого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Следовательно,

$$|I| \leqslant \sigma \int_M^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} (m+2)\, \mu^{m+1} \left| \int_M^\mu F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right| d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем M так, чтобы

$$\left| \int_0^M F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

что, по предыдущему, возможно. Возьмем σ столь малым, чтобы

$$1 - e^{-M^{m+2}\sigma} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \int_0^M |F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)|\, d\rho(\mu).$$

Тогда

$$\left| \int_0^M e^{-\mu^{m+2}\sigma} F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right| \leqslant \left| \int_0^M F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^M (1 - e^{-\mu^{m+2}\sigma}) F(\mu)\, \varphi_\alpha(x, \mu)\, d\rho(\mu) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это показывает, что $\lim S = 0$ при $\sigma \to 0$, что и требовалось доказать.

Покажем, что при достаточно малом Δ

$$\lim_{\sigma \to 0} \int_x^{x+\Delta} q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) = \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Положим $x \neq 0$, а также $\sin\alpha \neq 0$. Тогда, воспользовавшись асимптотической формулой (1.6) для $\varphi_\alpha(x, \mu)$ при $\mu \to \infty$, а также тем, что при $\mu \to \infty$

$$d\rho(\mu) = \frac{\mu^m\, d\mu}{a^2 \sin^2\alpha + O\left(\frac{1}{\mu}\right)},$$

можно привести внутренний интеграл в левой части равенства (2.3) к виду:

$$\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \mu^{\frac{m}{2}} \sin\left[\mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx + \frac{m+4}{4(m+2)}\pi\right] \sin\left[\mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^\xi \sqrt{q}\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{m+4}{4(m+2)}\pi\right] \cdot \frac{a^2 \sin\alpha + O\left(\frac{1}{\mu}\right)}{a^2 \sin a + O\left(\frac{1}{\mu}\right)}\, d\mu.$$

Главный член интеграла (2.3) равен

$$I = \int_x^{x+\Delta} q^{\frac{3}{4}}(\xi)\, q^{-\frac{1}{4}}(x)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \frac{m+2}{\pi} \mu^{\frac{m}{2}} \cos\left[\mu^{\frac{m+2}{2}} \int_x^\xi \sqrt{q}\, dx\right] d\mu. \tag{2.4}$$

Выберем Δ столь малым, что если $\xi \in [x, x+\Delta]$, то

1) $q^{\frac{3}{4}}(\xi) = q^{\frac{3}{4}}(x)\,(1+r), \quad |r| < \varepsilon;$

2) $\int_x^\xi \sqrt{q}\, dx = \sqrt{q(x)}\,(\xi - x)\,(1+s), \quad |s| < \varepsilon.$

Тогда

$$I = \frac{q^{\frac{1}{2}}(x)\,(1+r)}{\pi} \int_x^{x+\Delta} d\xi \int_0^\infty e^{-z^2\sigma}\, dz \cos\left[z\sqrt{q(x)}\,(\xi - x)\,(1+s)\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{1+s}.$$

Таким образом, при достаточно малом Δ этот интеграл сколь угодно близок к $\frac{1}{2}$. Как легко видеть, остаточные члены при $\sigma \to 0$ стремятся к нулю. В самом деле, эти остаточные члены суть величины порядков:

$$\int^{x+\Delta} d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \mu^{\frac{m}{2}} \cos\left[\mu^{\frac{m+2}{2}} \int_x^\xi \sqrt{q}\, dx\right] \frac{d\mu}{\mu},$$

$$\int_x^{x+\Delta} d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \mu^{\frac{m}{2}} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left[\mu^{\frac{m+2}{2}}\, \Phi(x, \xi)\right] d\mu,$$

где $\Phi(x, \xi) \neq 0$ при $x = \xi$. При нашем выборе Δ и $\sigma \to 0$ эти величины стремятся к нулю.

Рассмотрим теперь случай $\sin\alpha = 0$. В этом случае асимптотическое поведение функции $\varphi_\alpha(x, \mu)$ при $\mu \to \infty$ дается формулой (1.8), а

$$d\rho(\mu) = \frac{\mu^m \, d\mu}{\frac{b^2}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right)}.$$

Внутренний интеграл в равенстве (2.3) принимает вид:

$$\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \mu^{\frac{m}{2}} \cos\left[\mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^x \sqrt{q}\, dx - \frac{m+4}{4(m+2)}\pi\right] \cos\left[\mu^{\frac{m+2}{2}} \int_0^\xi \sqrt{q}\, dx - \right.$$

$$\left. - \frac{m+4}{4(m+2)}\pi\right] \frac{\frac{b^2}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right)}{\frac{b^2}{\mu^2} + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right)} \, d\mu.$$

Главный член интеграла (2.3) в этом случае совпадает с выражением (2.4), и доказательство заканчивается так же, как в случае $\sin\alpha \neq 0$.

Случай $x = 0$ легко доказывается непосредственно, и мы можем считать формулу (2.3) доказанной.

Перейдем к общему случаю. Пусть $x \in (a, b)$,

$$\int_a^b f(\xi, \tau)\, q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) = \int_a^{x-\Delta} + \int_{x-\Delta}^{x} + \int_x^{x+\Delta} + \int_{x+\Delta}^{b},$$

где Δ будем предполагать удовлетворяющим высказанным выше требованиям. Заметим, что внутренний интеграл в последнем равенстве положителен, поэтому если $|f(x, t)| < A$, то

$$\left| \int_a^{x-\Delta} f(\xi, \tau)\, q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) \right| <$$

$$< A \int_a^{x+\Delta} q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu),$$

а величина справа, по доказанному, при достаточно малом σ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{4}$. Далее,

$$I = \int_x^{x+\Delta} f(\xi, \tau)\, q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) =$$

$$= f(x+0, t) \int_x^{x+\Delta} q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) +$$

$$+ \int_x^{x+\Delta} [f(\xi, \tau) - f(x+0, t)]\, q(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu).$$

Первое слагаемое при достаточно малом σ отличается от $\frac{f(x+0, t)}{2}$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{8}$, а второе слагаемое выбором достаточно малых Δ и σ

может быть сделано меньшим по модулю, чем $\frac{\varepsilon}{8}$. Таким образом,

$$\left| I - \frac{f(x+0, t)}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Вполне аналогично покажем, что при достаточно малом σ

$$\left| \int_{x-\Delta}^{x} f(\xi, \tau) q(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu) \varphi_\alpha(\xi, \mu) d\rho(\mu) - \frac{f(x-0, t)}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| \int_{x+\Delta}^{b} f(\xi, \tau) q(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}\sigma} \varphi_\alpha(x, \mu) \varphi_\alpha(\xi, \mu) d\rho(\mu) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Этим формула (2.2) для случая $x \in (a, b)$ доказана. Пусть теперь $x = a$. Тогда

$$I = \int_a^b f(\xi, \tau) q(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2(t-\tau)}} \varphi_\alpha(x, \mu) \varphi_\alpha(\xi, \mu) d\rho(\mu) = \int_a^{a+\Delta} + \int_{a+\Delta}^{b}.$$

Подобно предыдущему, можно показать, что в этом случае

$$\lim_{\tau \to t} I = \frac{f(a+0, t)}{2}.$$

Аналогично доказываются и все остальные случаи формулы (2.2).

Формула (2.2), таким образом, доказана полностью.

§ 3

Перейдем к рассмотрению различных краевых задач для уравнения (1.1). Рассмотрим прежде всего следующую краевую задачу для этого уравнения:

$$R(0, t)\cos\alpha - \frac{\partial R(0, t)}{\partial x}\sin\alpha = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{3.1}$$

$$R(x, 0) = f(x). \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, применяя обобщенную формулу Пуассона (2.2), что решением этой краевой задачи будет:

$$R(x, t) = \int_0^\infty f(\xi) q(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}t} \varphi_\alpha(x, \mu) \varphi_\alpha(\xi, \mu) d\rho(\mu). \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что «основным решением» для уравнения (1.1), т. е. решением рассмотренной краевой задачи, отвечающим такому начальному (т. е. при $t = \tau$) распределению $f(x)$, что $f(x) = 0$ при $x \neq \xi$ и $\int_0^\infty f(\xi) q(\xi) d\xi = 1$, будет:

$$\Phi(x, t, \xi, \tau) = \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \mu) \varphi_\alpha(\xi, \mu) d\rho(\mu). \tag{3.4}$$

Физически это решение означает температуру в момент t в точке $y = \int_0^x \sqrt{q}\, dx$ эквивалентного стержня, если в момент τ температура стержня

везде равнялась нулю, кроме точки $\eta = \int_0^{\xi} \sqrt{q}\, dx$, где была сосредоточена одна единица тепла.

Перейдем к построению решений уравнения (1.1) при неоднородном граничном условии:

$$R(0, t)\cos\alpha - \frac{\partial R(0, t)}{\partial x}\sin\alpha = \varphi(t) \tag{3.5}$$

и при условии (3.2). Пусть сперва $\sin\alpha\cos\alpha = 0$; дело сводится, таким образом, к решению двух следующих краевых задач для уравнения (1.1):

$$R^{(1)}(0, t) = \varphi(t), \qquad R^{(1)}(x, 0) = f(x), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial R^{(2)}(0, t)}{\partial x} = -\Psi(t), \qquad R^{(2)}(x, 0) = f(x). \tag{3.7}$$

Положим $R^{(1)} = R_1^{(1)} + R_2^{(1)}$; $R^{(2)} = R_1^{(2)} + R_2^{(2)}$, где $R_j^{(i)}$ удовлетворяют уравнению (1.1) и условиям:

$$R_1^{(1)}(0, t) = \varphi(t), \qquad R_1^{(1)}(x, 0) = 0, \tag{3.8}$$

$$R_2^{(1)}(0, t) = 0, \qquad R_2^{(1)}(x, 0) = f(x), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial R_1^{(2)}(0, t)}{\partial x} = -\Psi(t), \qquad R_1^{(2)}(x, 0) = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial R_2^{(2)}(0, t)}{\partial x} = 0, \qquad R_2^{(2)}(x, 0) = f(x). \tag{3.11}$$

Из предыдущего ясно, что

$$R_2^{(1)}(x, t) = \int_0^{\infty} f(\xi)\, q(\xi)\, d\xi \int_0^{\infty} e^{-\mu^{m+2}t}\, \varphi_2(x, \mu)\, \varphi_2(\xi, \mu)\, d\rho_2(\mu),$$

$$R_2^{(2)}(x, t) = \int_0^{\infty} f(\xi)\, q(\xi)\, d\xi \int_0^{\infty} e^{-\mu^{m+2}t}\, \varphi_1(x, \mu)\, \varphi_1(\xi, \mu)\, d\rho_1(\mu),$$

где $\varphi_1(x, \mu)$ — решение уравнения (1.2) такое, что $\varphi_1(0, \mu) = 1$, $\varphi'_{1x}(0, \mu) = 0$; $\varphi_2(x, \mu)$ — решение этого же уравнения такое, что $\varphi_2(0, \mu) = 0$, $\varphi'_{2x}(0, \mu) = 1$; $\rho_1(\mu)$, $\rho_2(\mu)$ — соответствующие им функции $\rho(\mu)$. Покажем, что

$$R_1^{(1)}(x, t) = \int_0^{t} \varphi(\tau)\, d\tau \int_0^{\infty} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\, \varphi_2(x, \mu)\, d\rho_2(\mu), \tag{3.12}$$

$$R_1^{(2)}(x, t) = \int_0^{t} \Psi(\tau)\, d\tau \int_0^{\infty} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\, \varphi_1(x, \mu)\, d\rho_1(\mu). \tag{3.13}$$

В самом деле, обозначим левую часть (3.12) через $I(x, t)$. Очевидно, что $I(x, t)$ является решением уравнения (1.1). Очевидно, далее, что I стремится к нулю при $t \to 0$ $(x \neq 0)$. Рассмотрим поведение $I(x, t)$ при $x \to 0$.

Как легко видеть, при $x\to 0$

$$\varphi_2(x, \mu) = \frac{b}{\mu}\sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right] q^{-\frac{1}{4}}(x)\, s^{\frac{m}{4}} + \frac{o(x)}{\mu},$$

$$b = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{(m+2)^{\frac{m+1}{m+2}}}, \quad s = \left[\frac{m+2}{2}\int_0^x \sqrt{q}\, dx\right]^{\frac{2}{m+2}}.$$

Далее,

$$d\rho_2(\mu) = \frac{\mu^m d\mu}{\frac{b^2}{\mu^2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right).$$

Отсюда следует, что при $x\to 0$

$$J(x, t) = q^{-\frac{1}{4}}(x)\, s^{\frac{m}{4}}\int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]\frac{\mu^{m+1} d\mu}{b} +$$

$$+ O\left\{\int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]\mu^m d\mu\right\} +$$

$$+ o(x)\left\{\int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\mu^m d\mu\right\}.$$

Множитель $q^{-\frac{1}{4}}(x)\, s^{\frac{m}{4}}$ при $x\to 0$ стремится к единице. Как будет показано в § 4, первый интеграл при $x\to 0$ стремится к $\varphi(t)$. Третий интеграл — величина ограниченная и при $x\to 0$ все третье слагаемое стремится к нулю. Оценим второй интеграл. Не уменьшая общности, можно полагать $\varphi(t)\geqslant 0$. Очевидно, что

$$\left|\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\sqrt{\mu s}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu s)^{\frac{m+2}{2}}\right]\mu^m d\mu\right|,$$

в силу ограниченности $J_{\frac{1}{m+2}}$, меньше, чем

$$C\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\sqrt{\mu s}\, \mu^m d\mu,$$

где C — некоторая константа, т. е. меньше, чем $C_1\sqrt{s}\,(t-\tau)^{-\frac{2m+3}{2m+4}}$. Стало быть, второе слагаемое не превосходит

$$C_1\sqrt{s}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\frac{2m+3}{2m+4}}}.$$

Ясно, что при $x\to 0$, т. е. при $s\to 0$, оно также стремится к нулю. Таким образом, $J(x, t)$ удовлетворяет условию (3.8). Отсюда следует, что $R_1^{(1)}(x, t) = J(x, t)$, что и требовалось доказать.

Вполне аналогично можно показать, что $R_1^{(2)}(x, t)$, определяемое формулой (3.13), удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (3.10).

3. Построим решения уравнения (1.1) при общем неоднородном условии (3.5) ($\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$) и условии (3.2). Будет указано два способа решения этой задачи.

Первый способ. Положим $R = R_1 + R_2$, где R_1 и R_2 удовлетворяют уравнению (1.1) и условиям:

$$R_1(0, t)\cos\alpha - \frac{\partial R_1(0, t)}{\partial x}\sin\alpha = 0, \qquad R_1(x, 0) = f(x), \tag{3.14}$$

$$R_2(0, t)\cos\alpha - \frac{\partial R_2(0, t)}{\partial x}\sin\alpha = \varphi(t), \quad R_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial R_2(\infty, t)}{\partial x} = 0. \tag{3.15}$$

Решение уравнения (1.1) при условиях (3.14) $R_1(x, t)$ дается формулой (3.3). Построим решение $R_2(x, t)$.

Пусть $\frac{\partial R_2(0, t)}{\partial x} = -\Phi(t)$, пока неизвестному. Зная $\Phi(t)$, мы можем определить $R_2(x, t)$ по формуле (3.13):

$$R_2(x, t) = \int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_1(x, \mu)\, d\rho_1(\mu). \tag{3.16}$$

Построим уравнение для определения $\Phi(t)$. При $x = 0$ имеем:

$$R_2(0, t) = \int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\, d\rho_1(\mu).$$

Подставляя это в первое уравнение (3.15), мы получим для $\Phi(t)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\Phi(t) + h\int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\, d\rho_1(\mu) = s(t), \tag{3.17}$$

$$h = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad s = \frac{\varphi(t)}{\sin\alpha}.$$

Решив это уравнение, мы получим $R_2(x, t)$ по формуле (3.16).

Второй способ. Положим $R = R_1 + R_2$, где R_1 и R_2 удовлетворяют уравнению (1.1) и условиям:

$$R_1(0, t)\cos\alpha - \frac{\partial R_1(0, t)}{\partial x}\sin\alpha = 0, \qquad R_1(x, 0) = f(x) - K, \tag{3.18}$$

$$R_2(0, t)\cos\alpha - \frac{\partial R_2(0, t)}{\partial x}\sin\alpha = \varphi(t), \quad R_2(x, 0) = K, \quad \frac{\partial R_2(\infty, t)}{\partial x} = 0, \tag{3.19}$$

где K — некоторая константа, пока неопределенная. Строим решение $R_2(x, t)$. Пусть $R_2(0, t) = \Psi(t)$, пока неизвестному. Возьмем $K = \Psi(0)$. Тогда, пользуясь формулой (3.12), имеем:

$$R_2(x, t) = \Psi(0) + \int_0^t [\Psi(\tau) - \Psi(0)]\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_2(x, \mu)\, d\rho_2(\mu). \tag{3.20}$$

Рассмотрим выражение

$$Q(t)=\int_0^\infty q(\xi)\left[R_2(\xi,\ t)-\Psi(0)\right]d\xi,$$

которое представляет собой количество тепла, притекшее внутрь эквивалентного стержня вследствие изменения температуры на его нулевом конце.

Чтобы вычислить $Q(t)$, введем фиктивный конец $x=b$ и на нем условие $\frac{\partial R_2(b,\ t)}{\partial x}=0$. Выражение для $Q(t)$ мы получим как предельное для соответствующих выражений на конечном интервале $(0,\ b)$ при $b\to\infty$. Для конечного интервала $(0,\ b)$ можно показать, что

$$R_2(x,\ t)=\Psi(0)+\int_0^t\left[\Psi(\tau)-\Psi(0)\right]d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\varphi_2(x,\ \mu)\,d\rho_{2b}(\mu),$$

$$Q(t)=\int_0^b q(\xi)\left[R_2(\xi,\ t)-\Psi(0)\right]d\xi;$$

здесь $\varphi_2(x,\ \mu)$ дополнительно удовлетворяет условию $\varphi'_{2x}(b,\ \mu)=0$, а

$$\rho_{2b}(\mu)=\sum_{0<\mu_n<\mu}\left\{\int_0^b q(x)\,\varphi_2^2(x,\ \mu_n)\,dx\right\}^{-1}$$

(μ_n — собственные числа).

Изменяя порядок интегрирования в выражении $Q(t)$, возможность чего будет следовать из дальнейшего, имеем

$$Q(t)=\int_0^t\left[\Psi(\tau)-\Psi(0)\right]d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\left[\int_0^b q(\xi)\,\varphi_2(\xi,\ \mu)\,d\xi\right]d\rho_{2b}(\mu).$$

Но

$$\int_0^b q(\xi)\,\varphi_2(\xi,\ \mu)\,d\xi=\frac{1}{\mu^{m+2}}\left[\varphi'_{2x}(0,\ \mu)-\varphi'_{2x}(b,\ \mu)\right]=\frac{1}{\mu^{m+2}},$$

так как $\varphi_2(x,\ \mu)$ удовлетворяет уравнению (1.2), поэтому

$$Q(t)=\int_0^t\left[\Psi(\tau)-\Psi(0)\right]d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\frac{1}{\mu^{m+2}}\,d\rho_{2b}(\mu).$$

Устремляем теперь b к бесконечности. В силу теоремы 1, предельная функция $\rho_2(\mu)$ не зависит от условия на конце, устремляемом в бесконечность. Поэтому

$$Q(t)=\int_0^t\left[\Psi(\tau)-\Psi(0)\right]d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}. \tag{3.21}$$

Но

$$\frac{dQ}{dt}=\int_0^\infty q(\xi)\frac{\partial R_2}{\partial t}=-\frac{\partial R_2(0,\ t)}{\partial x}.$$

Для вычисления $\frac{dQ}{dt}$ подвергнем формулу (3.21) некоторому преобра-

зованию. Пусть

$$S=\int_{t}^{\tau}d\sigma\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}.$$

Полагая $\sigma=t-\varepsilon$, легко получим, что S зависит только от разности $t-\tau$.

Интегрируем в формуле (3.21) по частям:

$$Q(t)=\int_{0}^{t}[\Psi(\tau)-\Psi(0)]\,dS=[\Psi(\tau)-\Psi(0)]\,S(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-$$

$$-\int_{0}^{t}\frac{d\Psi}{d\tau}d\tau\int_{t}^{\tau}d\sigma\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}.$$

Как легко видеть, первое слагаемое равно нулю. Отсюда следует, что

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{d\Psi}{dt}\left[\int_{t}^{\tau}d\sigma\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}\right]_{\tau=t}-\int_{0}^{t}\frac{d\Psi}{d\tau}d\tau\cdot\frac{dS}{dt}.$$

Но $\frac{dS}{dt}=-\frac{dS}{d\tau}$; таким образом, окончательно имеем:

$$\frac{dQ}{dt}=-\frac{\partial R_2(0,t)}{\partial x}=\int_{0}^{t}\frac{d\Psi}{d\tau}d\tau\frac{dS}{d\tau}=\int_{0}^{t}\frac{d\Psi}{d\tau}d\tau\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}.$$

Подставляя это в первое условие (3.19), придем к интегродифференциальному уравнению для $\Psi(t)$:

$$\Psi(t)+h\int_{0}^{t}\frac{d\Psi}{d\tau}d\tau\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}=p(t),\quad h=\operatorname{tg}\alpha,\quad p=\frac{\varphi(t)}{\cos\alpha}. \quad (3.22)$$

Решив это уравнение, мы получим $\Psi(t)$, а следовательно, и $\Psi(0)$, и можем построить решение $R_2(x,t)$ по формуле (3.20) и решение $R_1(x,t)$ по формуле (3.3).

Пользуясь оценками для функций $\rho(\mu)$, данными в § 1, мы можем получить оценки для ядер интегрального уравнения (3.17) и интегродифференциального уравнения (3.22). В самом деле, интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\,d\rho_1(\mu)=e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\rho_1(\mu)\Big|_{0}^{\infty}+$$

$$+(t-\sigma)\int_{0}^{\infty}\mu^{m+2}e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\rho_1(\mu)\,d(\mu^{m+2})<N_1(t-\sigma)^{-\frac{m+1}{m+2}},$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}=\frac{e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}}\Bigg|_{0}^{\infty}+$$

$$+(t-\sigma)\int_{0}^{\infty}e^{-\mu^{m+2}(t-\sigma)}\rho_2(\mu)\,d(\mu^{m+2})<N_2(t-\sigma)^{-\frac{1}{m+2}},$$

где N_1 и N_2 — некоторые константы. Эти оценки и упомянутые оценки для $\rho_1(\mu)$ и $\rho_2(\mu)$ делают законными все операции п. 3. Они могут быть полезны при оценке сходимости метода последовательных приближений для решения упомянутых уравнений.

4. Построим решение краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = q(x)\frac{\partial R}{\partial t} - Q(x, t) \tag{3.23}$$

при условиях (3.5) и (3.2). Пусть $Q(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Положим $R = R_1 + R_2$, где R_1 удовлетворяет уравнению (1.1) при граничных условиях (3.5) и (3.2), а $R_2(x, t)$ — уравнению (3.23) при условиях:

$$R_2(0, t)\cos\alpha - \frac{\partial R_2(0, t)}{\partial x}\sin\alpha = 0, \quad R_2(x, 0) = 0. \tag{3.24}$$

Решение $R_1(x, t)$ получается по методу пп. 1—3. Покажем, что

$$R_2(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty Q(\xi, \tau)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu). \tag{3.25}$$

В самом деле, выполнение условий (3.24) очевидно; нам надо показать, что $R_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.23). Имеем:

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty Q(\xi, \tau)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi''_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) =$$

$$= -\int_0^t d\tau \int_0^\infty Q(\xi, \tau)\, d\xi \int_0^\infty \mu^{m+2} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu),$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} = \lim_{\tau \to t} \int_0^\infty Q(\xi, \tau)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^\infty Q(\xi, \tau)\, d\xi \int_0^\infty \mu^{m+2} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu).$$

Но первое слагаемое в выражении для $\frac{\partial R_2}{\partial t}$, по обобщенной формуле Пуассона, равно $\frac{Q(x, t)}{q(x)}$, что и доказывает требуемое.

5. Рассуждения пп. 2—3 можно значительно обобщить. Именно, рассмотрим уравнение (3.23) при условиях (3.2), (3.5) и одном из следующих условий:

1) решение $R_1(x, t)$ всюду непрерывно; производная его $\frac{\partial R_1}{\partial x}$ имеет в точке $x = \xi$ разрыв данной величины $\varphi(t)$, а во всех остальных точках непрерывна;

2) в точке $x = \xi$ решение $R_2(x, t)$ имеет разрыв данной величины $\psi(t)$, в остальных точках оно непрерывно; его производная $\frac{\partial R_2}{\partial x}$ везде непрерывна.

Легко свести решение этих задач к решению краевых задач, рассмотренных в пп. 1—4, и к решению уравнению (1.1) при условиях:

$$\left.\begin{aligned}&R_1(0,\ t)\cos\alpha-\frac{\partial R_1(0,\ t)}{\partial x}\sin\alpha=0,\\&R_1(x,\ 0)=0,\\&\frac{\partial R_1(\xi+0,\ t)}{\partial x}-\frac{\partial R_1(\xi-0,\ t)}{\partial x}=-\varphi(t)\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

или при условиях *:

$$\left.\begin{aligned}&R_2(0,\ t)\cos\alpha-\frac{\partial R_2(0,\ t)}{\partial x}\sin\alpha=0,\\&R_2(x,\ 0)=0,\\&R_2(\xi+0,\ t)-R_2(\xi-0,\ t)=\psi(t).\end{aligned}\right\}\tag{3.27}$$

Покажем, что решениями этих задач являются соответственно:

$$R_1(x,\ t)=\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\varphi_\alpha(x,\ \mu)\,\varphi_\alpha(\xi,\ \mu)\,d\rho(\mu),\tag{3.28}$$

$$R_2(x,\ t)=\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\varphi_\alpha(x,\ \mu)\,\varphi_\alpha'(\xi,\ \mu)\,d\rho(\mu).\tag{3.29}$$

То, что оба эти выражения суть решения (1.1) и удовлетворяют первым двум условиям (3.26) и (3.27), очевидно. Проверим выполнение третьих условий. Заметим при этом, что достаточно проверить это для решения (3.28), отсюда будет сразу же следовать выполнение третьего условия (3.27) для решения (3.29), так как $R_2(x,\ t)=-\dfrac{\partial R_1}{\partial\xi}$.

Рассмотрим величины:

$$Q_1(t)=\int_\xi^\infty q(\zeta)\,d\zeta\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\varphi_\alpha(\zeta,\ \mu)\,\varphi_\alpha(\xi,\ \mu)\,d\rho(\mu),$$

$$Q_2(t)=\int_0^\xi q(\zeta)\,d\zeta\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\varphi_\alpha(\zeta,\ \mu)\,\varphi_\alpha(\xi,\ \mu)\,d\rho(\mu).$$

Физический смысл этих величин — общее количество тепла в части эквивалентного стержня соответственно за точкой $\eta=\int_0^\xi\sqrt{q}\,dx$ и перед этой точкой. Рассуждениями, подобными проведенным в п. 2, можно показать, что

$$\frac{dQ_1}{dt}=-\frac{\partial R_1(\xi+0,\ t)}{\partial x},\qquad\frac{dQ_2}{dt}=\frac{\partial R_1(\xi-0,\ t)}{\partial x}-\frac{\partial R_1(0,\ t)}{\partial x},$$

так что

$$\frac{\partial R_1(\xi-0,\ t)}{\partial x}-\frac{\partial R_1(\xi+0,\ t)}{\partial x}=\frac{dQ_1}{dt}+\frac{dQ_2}{dt}+\frac{\partial R_1(0,\ t)}{\partial x}.$$

---

* Если бы решение было непрерывным с непрерывной производной $\dfrac{\partial R}{\partial x}$, то из первых двух условий (3.26) и (3.27) легко следовало бы, что $R\equiv0$ (теорема единственности).

Но

$$\frac{dQ_1}{dt} = \int\limits_{\xi}^{\infty} q(\zeta)\, d\zeta \left\{ \varphi(\tau) \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(\zeta, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) \right\}_{\tau=t} -$$

$$- \int\limits_{\xi}^{\infty} q(\zeta)\, d\zeta \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int\limits_0^{\infty} \mu^{m+2} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(\zeta, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu),$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \int\limits_0^{\xi} q(\zeta)\, d\zeta \left\{ \varphi(\tau) \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(\zeta, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) \right\}_{\tau=t} -$$

$$- \int\limits_0^{\xi} q(\zeta)\, d\zeta \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int\limits_0^{\infty} \mu^{m+2} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(\zeta, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu).$$

Первое слагаемое в обеих последних формулах, по обобщенной формуле Пуассона, равно $\frac{\varphi(t)}{2}$. Поэтому

$$\frac{\partial R_1(\xi - 0, t)}{\partial x} - \frac{\partial R_1(\xi + 0, t)}{\partial x} = \varphi(t) -$$

$$- \int\limits_0^{\infty} q(\zeta)\, d\zeta \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int\limits_0^{\infty} \mu^{m+2} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(\zeta, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu) + \frac{\partial R_1(0, t)}{\partial x}.$$

Вводя (как это мы делали в п. 3) фиктивный конец $x = b$ и на нем условие $\frac{\partial R_1(b, t)}{\partial x} = 0$ и устремляя затем b к бесконечности, можно получить, что

$$\frac{\partial R_1(0, t)}{\partial x} = \int\limits_0^{\infty} q(\zeta)\, d\zeta \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int\limits_0^{\infty} \mu^{m+2} e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \varphi_\alpha(\zeta, \mu)\, \varphi_\alpha(\xi, \mu)\, d\rho(\mu)$$

и, таким образом, показать, что третье условие (3.26) действительно выполнено, что и требовалось доказать.

Решения (3.28) и (3.29) играют для уравнения (1.1) ту же роль, что потенциалы соответственно простого и двойного слоя для уравнения Лапласа.

§ 4

Рассмотренные в § 3 методы построения решений краевых задач для уравнения (1.1) предполагают известными решение уравнения (1.2) и коэффициенты его асимптотического представления M и N. В ряде случаев эти величины могут быть определены.

Разберем, например, построение решений краевых задач при неоднородных граничных условиях для важного частного случая $q(x) \equiv x^m$.

Можно показать [см. ([1])], что

$$M_1^2 + N_1^2 = \Gamma^2\left(\frac{m+1}{m+2}\right)(m+2)^{-\frac{2}{m+2}} \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right),$$

$$M_2^2 + N_2^2 = \frac{1}{\mu^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{m+2}\right)(m+2)^{-2\frac{m+1}{m+2}} \quad (\alpha = 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} d\rho_1(\mu) = \frac{(m+2)^{-\frac{m}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)(t-\tau)^{\frac{m+1}{m+2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \frac{d\rho_2(\mu)}{\mu^{m+2}} = \frac{(m+2)^{\frac{m}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)(t-\tau)^{\frac{1}{m+2}}},$$

$$\varphi_1(x, \mu) = a\sqrt{\mu x}\, J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu x)^{\frac{m+2}{2}}\right],$$

$$\varphi_2(x, \mu) = \frac{b}{\mu}\sqrt{\mu x}\, J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu x)^{\frac{m+2}{2}}\right].$$

Согласно формуле (3.12), решение уравнения

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = x^m \frac{\partial R}{\partial t} \tag{4.1}$$

при условиях

$$R(0, t) = \varphi(t), \quad R(x, 0) = 0$$

будет равно:

$$R_2^{(1)}(x, t) =$$

$$= \frac{x(m+2)^{\frac{m+1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)} \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \mu^{m+\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu x)^{\frac{m+2}{2}}\right] d\mu. \tag{4.2}$$

Согласно формуле (3.13), решение уравнения (4.1) при условиях

$$\frac{\partial R_2^{(2)}(0, t)}{\partial x} = -\psi(t), \quad R_2^{(2)}(x, 0) = 0$$

будет равно:

$$R_2^{(2)}(x, t) =$$

$$= \frac{(m+2)^{\frac{1}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)} \mu^{m+\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu x)^{\frac{m+2}{2}}\right] d\mu. \tag{4.3}$$

Внутренние интегралы в формулах (4.2) и (4.3) представляют собой обобщение известных интегралов Пуассона классической теории теплопроводности, получающихся при $m = 0$. Вычисление их проводится в точности по той же схеме [см. например, ([7])], и мы получаем:

$$\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\mu^{m+\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu x)^{\frac{m+2}{2}}\right]d\mu = \frac{e^{-\frac{x^{m+2}}{(m+2)^2(t-\tau)}}}{[(m+2)(t-\tau)]^{\frac{m+3}{m+2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu^{m+2}(t-\tau)}\mu^{m+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\mu x)^{\frac{m+2}{2}}\right]d\mu = \frac{e^{-\frac{x^{m+2}}{(m+2)^2(t-\tau)}}}{[(m+2)(t-\tau)]^{\frac{m+1}{m+2}}}.$$

Окончательно имеем:

$$R_2^{(2)}(x, t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)(m+2)^{\frac{m}{m+2}}}\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\,(t-\tau)^{-\frac{m+1}{m+2}}e^{-\frac{x^{m+2}}{(m+2)^2(t-\tau)}}, \tag{4.4}$$

$$R_2^{(1)}(x, t) = \frac{x}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)(m+2)^{\frac{2}{m+2}}}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\,(t-\tau)^{-\frac{m+3}{m+2}}e^{-\frac{x^{m+2}}{(m+2)^2(t-\tau)}}. \tag{4.5}$$

Справедливость этих формул может быть усмотрена непосредственно, совершенно так же, как в классической теории.

Перейдем к рассмотрению неоднородных граничных условий (3.5) при произвольном α.

Интегральное уравнение (3.17) в данном случае имеет вид:

$$\Phi(t) + \rho\int_0^t \Phi(\tau)(t-\tau)^{-\frac{m+1}{m+2}}d\tau = s(t), \quad \rho = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\,(m+2)^{\frac{m}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}. \tag{4.6}$$

В несколько ином виде это уравнение имеется у Саттона ([8]); он строит его решение методом последовательных приближений:

$$\Phi(t) = \Phi_0(t) + \rho\Phi_1(t) + \cdots + \rho^n\Phi_n(t) + \cdots, \tag{4.7}$$

$$\Phi_0(t) = s(t), \ldots, \; \Phi_n(t) = -\int_0^t \Phi_{n-1}(\tau)(t-\tau)^{-\frac{m+1}{m+2}}d\tau.$$

В этой же работе изучается сходимость ряда (4.7).

Но для рассматриваемого частного случая второй способ п. 3 часто оказывается удобнее. Интегродифференциальное уравнение (3.22) для данного случая принимает вид:

$$\Psi(t) + \rho\int_0^t \frac{d\Psi}{d\tau}(t-\tau)^{-\frac{1}{m+2}}d\tau = p(t), \quad \rho = \frac{\operatorname{tg}\alpha\,(m+2)^{\frac{m}{m+2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}. \tag{4.8}$$

Пусть $p(t)$ может быть представлено в виде ряда по степеням $t^{\frac{1}{m+2}}$:

$$p(t) = \sum_\beta a_\beta t^{\frac{\beta}{m+2}}$$

(β — целые положительные числа). Положим $\Psi = \sum a_\beta \Psi_{m,\beta}$, где $\Psi_{m,\beta}$ удовлетворяет уравнению:

$$\Psi_{m,\beta}(t) + \rho \int_0^t \frac{d\Psi_{m,\beta}}{d\tau} (t-\tau)^{-\frac{1}{m+2}} d\tau = t^{\frac{\beta}{m+2}}.$$

Будем искать $\Psi_{m,\beta}$ в виде ряда по степеням ρ:

$$\Psi_{m,\beta}(t) = \Psi_0(t) + \rho \Psi_1(t) + \cdots + \rho^n \Psi_n(t) + \cdots.$$

Мы получаем:

$$\Psi_0(t) = t^{\frac{\beta}{m+2}}, \ldots, \quad \Psi_n(t) = -\int_0^t \frac{d\Psi_{n-1}}{d\tau} (t-\tau)^{-\frac{1}{m+2}} d\tau.$$

Таким образом,

$$\Psi_1(t) = -\frac{\beta}{m+2} t^{\frac{\beta-1}{m+2}} \int_0^1 \tau^{\frac{\beta}{m+2}-1} (1-\tau)^{-\frac{1}{m+2}} d\tau =$$

$$= -\frac{\beta}{m+2} t^{\frac{\beta-1}{m+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1+\beta}{m+2}\right)},$$

. . . .

$$\Psi_{\beta+1}(t) = 0, \ldots, \quad \Psi_{\beta+k}(t) = 0 \quad (k \geqslant 1).$$

Это показывает, что $\Psi_{m,\beta}$ суть полиномы по степеням $t^{\frac{1}{m+2}}$, а именно

$$\Psi_{m,\beta}(t) = t^{\frac{\beta}{m+2}} - \frac{\beta}{m+2} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1+\beta}{m+2}\right)} t^{\frac{\beta-1}{m+2}} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\beta+1} \Gamma\left(\frac{\beta+m+2}{m+2}\right) \Gamma^\beta\left(\frac{m+1}{m+2}\right).$$

Построение решения при неоднородном граничном условии этим способом значительно проще, чем применение интегрального уравнения (4.6).

Поступило
1. XI. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Прандтль Л., Гидроаэромеханика, М., 1949.

[2] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М., ГТТИ, 1950.

[3] Левитан Б. М., К теореме разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Доклады Ак. Наук. СССР, т. 71 (1950), 605—608.

[4] Баренблатт Г. И. и Левитан Б. М., Об одном обобщении формулы Пуассона из теории теплопроводности, Доклады Ак. Наук СССР, т. 79 (1951), 917—920.

[5] Баренблатт Г. И., Об одном методе решения уравнения теплопроводности, Доклады Ак. Наук СССР, т. 72 (1950), 667—670.

[6] Баренблатт Г. И., О решении уравнения теплопроводности при неоднородном граничном условии, Доклады Ак. Наук СССР, т. 74 (1950), 201—204.

[7] Карслоу Х., Теория теплопроводности, М., 1947.

[8] Sutton W. G. L., On the equation of diffusion in a turbulent medium, Proc. Roy. Soc., Ser. A, t. 182 (1943), 48—75.

[9] Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы специальных функций, М., 1950.

[10] Айнс Э., Дифференциальные уравнения, М., 1936.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 281—292

Ю. В. ПРОХОРОВ

НЕКОТОРЫЕ УТОЧНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе показано, что хорошо известное асимптотическое разложение (1) сохраняет силу (с небольшим ухудшением остаточного члена) для обширного класса дискретных распределений $F_\xi(x)$. Распределения этого класса образуют в некотором смысле «общий случай» среди дискретных распределений (см. замечание к теореме 1). Пример 1 из § 5 показывает, что для исключительных (не входящих в общий случай, рассмотренный в теореме 1) дискретных нерешетчатых распределений функция $F_n(x)$ вообще не может быть аппроксимирована с точностью, существенно большей, чем $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, функциями $G_n(x)$ с ограниченными производными.

§ 1. Введение. Пусть ξ — случайная величина. Обозначим через $P\{A\}$ вероятность события A и через $F_\xi(x)$ — функцию распределения ξ:

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}.$$

Все встречающиеся в настоящей заметке случайные величины ξ предполагаются имеющими конечное математическое ожидание $M\xi$ и конечную дисперсию

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Функции с ограниченным изменением мы будем обозначать прописными латинскими буквами, а их характеристические функции — соответствующими строчными буквами, исключая лишь так называемую *нормальную* функцию распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Определение 1. Распределение $F_\xi(x)$ удовлетворяет условию (C), если для его характеристической функции $f_\xi(x)$

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| < 1. \tag{C}$$

Замечание. Условию (C) удовлетворяют, например, все абсолютно-непрерывные распределения $F_\xi(x)$.

Определение 2. Назовем распределение $F_\xi(x)$ решетчатым, если существуют такие постоянные a и $h > 0$, что с вероятностью единица ξ принимает значения вида $a + kh$, где k пробегает все целые числа. Величина h называется шагом распределения.

Замечание. Известно, что каждое решетчатое распределение имеет один *максимальный* шаг h_ξ, т. е. шаг, который больше или равен любому другому шагу распределения.

Рассмотрим теперь последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x)$, и составим последовательность «нормированных сумм»

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - nM\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}}.$$

Функцию распределения $F_{\eta_n}(x)$ будем для краткости обозначать $F_n(x)$.

Известно, что при $M\xi_1^2 < +\infty$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Предположим теперь, что $M|\xi_1|^\nu < +\infty$, $\nu \geqslant 3$, и рассмотрим отдельно три случая:

1) Для нерешетчатых распределений при $\nu = 3$ и для распределений $F(x)$ со свойством (С) при $\nu > 3$ равномерно по x

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{j=1}^{\nu-2} \frac{P_j(-\Phi)}{n^{j/2}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right), \tag{1}$$

где $P_j(-\Phi)$ — линейная комбинация производных функции $\Phi(x)$ с коэффициентами, зависящими *только* от моментов распределения $F(x)$ [см. ([1]) и ([2])].

2) Для решетчатых распределений оказывается целесообразным перейти на «локальную» точку зрения и изучать асимптотическое поведение вероятностей:

$$P_n(k) = \mathrm{P}\left\{\frac{na + kh - nM\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} = \eta_n\right\} = \mathrm{P}\{\xi_1 + \cdots + \xi_n = na + kh\}$$

[см. ([1]), § 48]. Распределение $F_n(x)$ имеет в этом случае разрывы порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$, так что представление (1) невозможно. Более того, каковы бы ни были функции $G_n(x)$ с ограниченными в совокупности производными,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sup_x |F_n(x) - G_n(x)|}{1/\sqrt{n}} > 0. \tag{2}$$

3) Нерешетчатые распределения $F(x)$ с

$$\varlimsup_{|t|\to\infty} |f(t)| = 1$$

составляют предмет изучения настоящей заметки.

§ 2. Теоремы. В случае 3) могут встретиться разложения типа 1), как показывает

ТЕОРЕМА 1. Предположения:

а) $M|\xi_1|^\nu < +\infty$;

б) *$F(x)$ можно представить в виде*

$$F(x) = pF_1(x) + qF_2(x),$$

где $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ — *функции распределения*;

в) $F_1(x)$ — *дискретное распределение с возможными значениями*

$$z,\ z_0,\ z_1, \dots z_\mu \quad (\mu \geqslant 1);$$

г) *величины* $\lambda_k = \frac{z_k - z}{z_0 - z}$, $1 \leqslant k \leqslant \mu$, *таковы, что неравенство*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant \mu} \left| \lambda_k - \frac{r_k}{s} \right| < \frac{1}{s^{1+\frac{1}{\mu}} (\log s)^{\frac{1}{\mu}+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \tag{3}$$

имеет лишь конечное число решений в целых r_k *и* s.

Утверждение. *В высказанных предположениях равномерно по* x *при* $n \to \infty$

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{P_j(-\Phi)}{n^{\frac{j}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{\nu-2}{2}}} + \frac{(\log n)^{1+\frac{\mu}{2}+\mu\varepsilon'}}{n^{\frac{\mu+1}{2}}} \right), \tag{4}$$

где $\rho = \min\{\nu - 2, \mu\}$, *а* ε' *может быть взято любым при условии* $\varepsilon' > \varepsilon$.

Замечание. Известно [см., например, ([3])], что множество точек $(\lambda_1, \dots \lambda_\mu)$, координаты которых удовлетворяют (3), имеет в μ-мерном пространстве полную меру (т. е. его дополнение имеет лебеговскую меру нуль).

Порядок остаточного члена в (4) не может быть существенно понижен, как показывает

ТЕОРЕМА 2. Предположения:

а) *Случайная величина принимает значения*

$$0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_\mu \quad (\mu \geqslant 1)$$

с вероятностями, равными соответственно

$$p, p_0, p_1, \dots, p_\mu,$$

б) $p > 0, \quad p_k > 0 \quad (0 \leqslant k \leqslant \mu), \quad \sum_{k=0}^{\mu} p_k + p = 1;$

в) *неравенство*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant \mu} \left| \lambda_k - \frac{r_k}{s} \right| < \frac{1}{s^{1+\frac{1}{\mu}} (\log s)^{\frac{1}{\mu}}} \tag{5}$$

имеет бесконечное число решений в целых числах r_k *и* s.

Утверждение. *Каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и функции* $G_n(x)$ *с ограниченными в совокупности производными,*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sup |F_n(x) - G_n(x)|}{n^{-\frac{\mu+1}{2}} (\log n)^{-\frac{\mu}{2}+1-\varepsilon}} = +\infty. \tag{6}$$

Замечание. Точки $(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu)$ с координатами, удовлетворяющими неравенству (5), образуют в μ-мерном пространстве множество полной меры [см. ([3])].

Из 1) следует, что для нерешетчатых распределений $F_\xi(x)$ с $M|\xi|^3 < \infty$ имеет место:

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{P_1(-\Phi)}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

В § 5 для любой функции $\psi(n) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ указываются:

(а) сингулярная непрерывная функция распределения $F(x)$;

(б) дискретная функция распределения $F(x)$, у которой все попарные разности возможных значений соизмеримы, причем указанные распределения имеют все моменты конечными и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sup\limits_x |F_n(x) - G_n(x)|}{\psi(n)} = +\infty, \tag{7}$$

каковы бы ни были функции $G_n(x)$ с ограниченными в совокупности производными.

§ 3. Доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 1. *Пусть A, T и $\varepsilon > 0$ — постоянные, $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция с ограниченным изменением. Если*

1. $F(-\infty) = G(-\infty), \quad F(+\infty) = G(+\infty)$,
2. $\int |F(x) - G(x)|\, dx < +\infty$,
3. *$G'(x)$ существует при всех x и $|G'(x)| \leqslant A$,*
4. $\int\limits_{-T}^{+T} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| dt = \varepsilon$,

то каждому числу $k > 1$ соответствует конечное положительное число $c(k)$, зависящее только от k, такое, что

$$|F(x) - G(x)| \leqslant k \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k) \cdot \frac{A}{T}.$$

ЛЕММА 2. *Если $M|\xi_1|^\nu < +\infty$, $\nu \geqslant 3$, то при*

$$|t| \leqslant T_{\nu n} = \frac{\sqrt{n}\,(D\xi_1)^{\nu/2}}{8\nu\,(M|\xi_1 - M\xi_1|^\nu)^{3/\nu}}$$

имеет место неравенство

$$|f_n(t) - u_{\nu,n}(t)| \leqslant \frac{c_1(\nu)\cdot\delta(n)}{T_{\nu,n}^{\nu-2}} \left(|t|^\nu + |t|^{3(\nu-1)}\right) e^{-\frac{t^2}{4}},$$

где $u_{\nu,n}$ — характеристическая функция для

$$U_{\nu,n} = \Phi(x) + \sum_{j=1}^{\nu-2} \frac{P_j(-\Phi)}{n^{\frac{j}{2}}}, \tag{8}$$

$c_1(\nu)$ зависит только от ν, а $\delta(n)$ — только от n и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(n) = 0$.

Доказательство лемм 1 и 2 можно найти, например, в ([1]), §§ 32 и 41.

ЛЕММА 3. *При* $p+q=1$, $p>0$, $q>0$

$$\sum_{|m-np|>x} C_n^m p^m q^{n-m} < 2e^{-\frac{x^2}{4npq}}, \quad |x| \leqslant npq.$$

Доказательство леммы 3 можно найти в ([4]).

ЛЕММА 4. *Пусть*

$$v(t) = p + p_0 e^{2\pi i t} + \sum_{k=1}^{n} p_k e^{2\pi i \lambda_k t},$$

$$p > 0, \quad p_k > 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \quad p + \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

и пусть функция $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям:* $\varphi(x) > 0$, $x\varphi(x)$ *монотонно убывает с возрастанием* x; *далее, пусть, начиная с достаточно больших целых* s, *при всех целых* r_k *выполнено неравенство*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \lambda_k - \frac{r_k}{s} \right| > \varphi(s). \tag{9}$$

Тогда при $|t| \geqslant \theta > 0$

$$|v(t)| \leqslant 1 - ([|t|+1]\,\varphi([|t|+1]))^2 \cdot \omega, \tag{10}$$

где $[z]$ — *целая часть числа* z, *а* ω *зависит только от* $\theta, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, p_1, \ldots, p_n$.

Доказательство. Каково бы ни было k, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$|v(t)| \leqslant |p + p_0 e^{2\pi i t} + p_k e^{2\pi i \lambda_k t}| + 1 - (p + p_0 + p_k). \tag{11}$$

Далее,

$$|p + p_0 e^{2\pi i t} + p_k e^{2\pi i \lambda_k t}|^2 = p^2 + p_0^2 + p_k^2 + 2pp_0 \cos 2\pi t +$$
$$+ 2pp_k \cos 2\pi\lambda_k t + 2p_0 p_k \cos 2\pi t_k(\lambda_k - 1) \leqslant (p + p_0 + p_k)^2 +$$
$$+ 2pp_0(\cos 2\pi t - 1) + 2pp_k(\cos 2\pi\lambda_k t - 1) =$$
$$= (p + p_0 + p_k)^2 \left(1 - \frac{4pp_0 \sin^2 \pi t + 4pp_k \sin^2 \lambda_k \pi t}{(p + p_0 + p_k)^2}\right).$$

Поэтому

$$|p + p_0 e^{2\pi i t} + p_k e^{2\pi i \lambda_k t}| \leqslant p + p_0 + p_k -$$
$$- \frac{2p \cdot \min(p_0, p_k)}{(p + p_0 + p_k)^2} [\sin^2 \pi t + \sin^2 \lambda_k \pi t]. \tag{12}$$

Если $\{z\}$ обозначает расстояние от z до ближайшего целого, то

$$\sin^2 \pi z = \sin^2 \pi \{z\}.$$

Но $\{z\} \leqslant \frac{1}{2}$, следовательно,

$$\sin^2 \pi \{z\} \geqslant \left(\frac{2}{\pi} \cdot \pi \{z\}\right)^2 = 4\{z\}^2.$$

Принимая во внимание неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, $a>0$, $b>0$, находим

$$\sin^2 \pi t + \sin^2 \lambda_k \pi t \geqslant 2(\{t\} + \{\lambda_k t\})^2. \tag{13}$$

Если $\{t\} + \{\lambda_k t\} \geqslant \frac{1}{4}$, то

$$\sin^2 \pi t + \sin^2 \lambda_k \pi t \geqslant \frac{1}{8}.$$

Пусть теперь $\{t\} + \{\lambda_k t\} < \frac{1}{4}$. Тогда ближайший к точке t нуль функции $\{t\}$ (обозначим его через $n_1(t)$) находится от нее на расстоянии $<\frac{1}{4}$, а ближайший к точке t нуль функции $\{\lambda_k t\}$ (обозначим его через $n_{2,k}(t)$) — на расстоянии $<\frac{1}{4|\lambda_k|}$.

Рассмотрим четыре возможности:

$1''$ $\quad n_1 \leqslant t, \quad n_{2,k} \leqslant t,$
$2''$ $\quad n_1 \geqslant t, \quad n_{2,k} \geqslant t,$
$3''$ $\quad n_1 \leqslant t, \quad n_{2,k} \geqslant t,$
$4''$ $\quad n_1 \geqslant t, \quad n_{2,k} \leqslant t.$

Так как рассуждения во всех четырех случаях почти одинаковы, то мы рассмотрим лишь первый. Если $n_1 \leqslant t$, $n_{2,k} \leqslant t$, то по крайней мере одна из точек n_1 и $n_{2,k}$ удалена от точки t на расстояние $\geqslant |n_1 - n_{2,k}|$, а тогда

$$\{t\} + \{\lambda t\} \geqslant \min(|\lambda_k|, 1)\cdot|n_1 - n_{2,k}|. \tag{14}$$

Собирая вместе неравенства (11), (12), (13) и (14), получим:

$$|v(t)| \leqslant 1 - \frac{4p\cdot\min(p_0, p_k)\cdot(\min(|\lambda_k|, 1))^2}{(p+p_0+p_k)^2}|n_1(t) - n_{2,k}(t)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 1 - 4\cdot p\cdot\min(p_0, p_k)(\min(|\lambda_k|, 1))^2|n_1(t) - n_{2,k}(t)|^2. \tag{15}$$

Не ограничивая общности, можно допустить, что $t>0$. Тогда $n_1(t)$ есть некоторое целое число k_1, не превосходящее $[t+1]$, а $n_{2,k}(t)$ есть не превосходящее $t + \frac{1}{4|\lambda_k|}$ число вида $\frac{k_2}{\lambda_k}$, где k_2 — целое. Таким образом,

$$|n_1(t) - n_{2,k}(t)| = \left|k_1 - \frac{k_2}{\lambda}\right| = \frac{k_1}{|\lambda_k|}\left|\lambda_k - \frac{k_2}{k_1}\right|.$$

Предположим, что неравенство (9) выполнено при $s \geqslant s_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда при $t \geqslant s_0 + 1$ будет $k_1 \geqslant s_0$, и, следовательно,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|n_1(t) - n_{2,k}(t)| \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{|\lambda_k|}\cdot k_1\varphi(k_1),$$

т. е., в силу (15), при $t \geqslant s_0 + 1$ будет

$$|v(t)| \leqslant 1 - 4p\min_{0\leqslant k\leqslant n} p_k \min_{1\leqslant k\leqslant n}(|\lambda_k|, 1)\cdot\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{|\lambda_k|}k_1^2\varphi^2(k_1). \tag{16}$$

Заметим, что при выводе формулы (16) мы предполагали, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(\{t\}+\{\lambda_k t\})<\frac{1}{4}.$$

Таким образом, обозначая

$$\omega_1=4p\min_{0\leqslant k\leqslant n}p_k\min_{1\leqslant k\leqslant n}(|\lambda_k|,1)\cdot\min_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{|\lambda_k|}$$

и учитывая, что $x\varphi(x)$ не возрастает, получим:

$$|v(t)|\leqslant 1-\omega_1([t+1]\varphi([t+1]))^2 \tag{17}$$

при $\{t\}+\{\lambda_k t\}<\frac{1}{4}$, $1\leqslant k\leqslant n$. Если же хотя бы при одном k

$$\{t\}+\{\lambda_k t\}\geqslant\frac{1}{4},$$

то из (11), (12) и (13) следует

$$|v(t)|\leqslant 1-\frac{1}{4}p\cdot\min_{0\leqslant k\leqslant n}p_k. \tag{18}$$

Из неравенства (9) следует, что по крайней мере одно из λ_k иррационально, а потому при $\theta\leqslant t\leqslant s_0+1$

$$|v(t)|\leqslant 1-\omega_2, \tag{19}$$

где ω_2 зависит от θ, $p_0, p_1, \ldots, p_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Беря

$$\omega=\min\left\{\omega_1,\frac{\omega_2}{\varphi(1)},\frac{p\cdot\min\limits_{0\leqslant k\leqslant 1}p_k}{\varphi(1)}\right\},$$

из (17), (18) и (19) получаем (10), что и требовалось доказать.

Переходим теперь к доказательству самой теоремы 1. Выберем $T>0$ так, чтобы $T_{\nu,n}\leqslant T\leqslant n^\alpha$, где α — положительное число, точное значение которого мы укажем впоследствии. Оценим интеграл

$$I=\int\limits_{-T}^{+T}\frac{|f_n(t)-u_{\nu,n}|}{|t|}dt=\int\limits_{-T_{\nu,n}}^{+T_{\nu,n}}+\int\limits_{T_{\nu,n}\leqslant|t|\leqslant T} \tag{20}$$

В силу леммы 2,

$$\left|\int\limits_{-T_{\nu,n}}^{+T_{\nu,n}}\right|\leqslant\frac{\delta(n)}{n^{\frac{\nu-2}{2}}}K_1(\nu), \tag{21}$$

где $K_1(\nu)$ — не зависящая от n постоянная. Легко показать далее, что

$$\int\limits_{T_{\nu,n}\leqslant|t|\leqslant T}\frac{|u_{\nu,n}(t)|}{|t|}dt=O(e^{-K_2 n}), \tag{22}$$

где K_2 — не зависящая от n постоянная. Таким образом, оценка интеграла I сводится к оценке интеграла

$$I_1=\int\limits_{T_{\nu,n}\leqslant|t|\leqslant T}\frac{|f_n(t)|}{|t|}dt=\int\limits_{K_3\leqslant|t|\leqslant\frac{T}{\sqrt{nD\xi_1}}}\frac{|f(t)|^n}{|t|}dt,$$

где через K_3 обозначена постоянная $\frac{T_{\nu, n}}{\sqrt{nD\xi_1}}$. В силу леммы 3,

$$|f(t)|^n = |pf_1(t) + qf_2(t)|^n \leqslant \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} |f_1(t)|^m =$$

$$= \sum_{|m-np|\leqslant\frac{npq}{2}} + \sum_{|m-np|>\frac{npq}{2}} \leqslant |f_1(t)|^{np-\frac{npq}{2}} + 2e^{-\frac{npq}{16}}.$$

Следовательно,

$$I_1 \leqslant \int\limits_{K_3\leqslant |t|\leqslant \frac{T}{\sqrt{nD\xi_1}}} \frac{|f_1(t)|^{np\left(1-\frac{q}{2}\right)}}{|t|} dt + 4\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{D\xi_1}} e^{-\frac{npq}{16}}. \tag{23}$$

Наконец, в силу леммы 4,

$$I_2 = \int\limits_{K_3\leqslant |t|\leqslant \frac{T}{\sqrt{nD\xi_1}}} \frac{|f_1(t)|^{np\left(1-\frac{q}{2}\right)}}{|t|} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\log\frac{T}{K_3\sqrt{nD\xi_1}}\{1-\omega T'^2\varphi^4(T')\}^{np\left(1-\frac{q}{2}\right)},$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\mu}}(\log x)^{\frac{1}{\mu}+\varepsilon}}$$

и

$$T' = \left[\frac{T|z_0 - z|}{2\pi\sqrt{nD\xi_1}} + 1\right].$$

Выбирая

$$T = \frac{n^{\frac{\mu+1}{2}}}{(\log n)^{1+\mu\varepsilon'+\frac{\mu}{2}}},$$

получаем, как легко проверить,

$$I_2 = o(n^{-\beta}) \tag{24}$$

при любом фиксированном β. Из соотношений (20)—(24) и леммы 1 следует утверждение теоремы.

§ 4. Доказательство теоремы 2.

ЛЕММА 5. *Пусть $F(x)$ — решетчатое распределение с шагом h и дисперсией σ^2. Тогда* *

$$\sup_x (F_n(x+0) - F_n(x-0)) > \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}.$$

---

* Мы не ссылаемся здесь на обычную локальную теорему, так как она доказывается при фиксированном h, нам же потребуется рассмотреть случай переменного h.

Доказательство. Возможные значения случайной величины η_n отстоят друг от друга на расстояние, не меньшее чем $\Delta_n = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}}$. Так как дисперсия $F_n(x)$ равна единице, то, по неравенству Чебышева,

$$P\{|\eta_n| > \sqrt{2}\} \leqslant \frac{1}{2} \text{ и } P\{|\eta_n| \geqslant \sqrt{2}\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Но на интервале $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ укладывается не более чем $\frac{2\sqrt{2}}{\Delta_n}$ возможных значений η_n, следовательно, по крайней мере одно из них имеет вероятность $\geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_n}{2\sqrt{2}}$.

Перейдем теперь к доказательству самой теоремы 2. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что среди чисел λ_k имеется хотя бы одно иррациональное. В противном случае мы имели бы решетчатое распределение и справедливость утверждения теоремы следовала бы из леммы 5.

Приняв указанное предположение, занумеруем системы чисел, удовлетворяющих неравенству (5), в порядке возрастания соответствующих s. Числа m-й системы обозначим через

$$(r_{m,1}, r_{m,2}, \ldots, r_{m,\mu}; s_m). \tag{25}$$

Мы предположим числа системы (25) взаимно простыми. Определим случайные величины $\xi_{p,m}$:

$$\xi_{p,m} = \xi_p, \quad \text{если } \xi_p = 0 \text{ или } 1,$$
$$\xi_{p,m} = \frac{r_{m,k}}{s_m}, \quad \text{если } \xi_p = \lambda_k$$

и случайные величины $\alpha_{p,m}$:

$$\alpha_{p,m} = \frac{\xi_p - \xi_{p,m} - M(\xi_p - \xi_{p,m})}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant \mu}\left|\lambda_k - \frac{r_{m,k}}{s_m}\right|}.$$

Нетрудно подсчитать, что $M\alpha_{p,m} = 0$ и $\frac{1}{4}\min p_k \leqslant D\alpha_{p,m} \leqslant 1$. Полагая

$$p_m = s_m^{\frac{2}{\mu}} (\log s_m)^{-\frac{2}{\mu}-1-\varepsilon'}$$

и применяя к величинам $\alpha_{p,m}$ известное неравенство А. Н. Колмогорова [см. ([5])], получаем

$$\mathrm{P}\left\{\left|\sum_{p=1}^{p_m}\alpha_{p,m}\right| \leqslant x\right\} \geqslant 1 - 2e^{-\frac{x^2}{4p_m}} \quad \text{при} \quad x \leqslant \frac{p_m}{4}\min_k p_k. \tag{26}$$

Подставляя в (26) $x = 4\mu\sqrt{p_m \log p_m}$, находим

$$\mathrm{P}\left\{\left|\sum_{p=1}^{p_m}\alpha_{p,m}\right| \leqslant 4\mu\sqrt{p_m \log p_m}\right\} \geqslant 1 - p_m^{-4\mu^2}. \tag{27}$$

Величины $\xi_{p,m}$ имеют решетчатое распределение с шагом *

* $a_n \sim b_n$ означает, что $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$.

$$h_m = \frac{1}{s_m} \sim \frac{1}{p_m^{\frac{\mu}{2}} (\log p_m)^{\frac{\mu}{2}-1}}.$$

Величина

$$\eta_{p_m, m} = \frac{\sum_{p=1}^{p_m} \xi_{p, m} - p_m M\xi_{1, m}}{\sqrt{p_m D\xi_{1, m}}}$$

принимает хотя бы одно из своих возможных значений с вероятностью $\sim \frac{h_m}{\sqrt{p_m}}$ (как это следует из леммы 5). В силу (5) и (27), в правой части равенства

$$\eta_{p_m} = \eta_{p_m, m} \sqrt{\frac{D\xi_{1, m}}{D\xi_1}} + \left(\sum_{p=1}^{p_m} \alpha_{p, m}\right) \max_k \left|\lambda_k - \frac{r_{m, k}}{s_m}\right| \frac{1}{\sqrt{p_m D\xi_{1, m}}}$$

второе слагаемое с вероятностью, превосходящей $1 - p_m^{-4\mu^2} = 1 - o\left(\frac{h_m}{\sqrt{p_m}}\right)$, есть

$$O\left(\frac{1}{s_m^{1+\frac{1}{\mu}} (\log s_m)^{\frac{1}{\mu}}} \cdot \sqrt{\log p_m}\right) = O\left(\frac{h_m}{p_m^{\frac{1}{2}} (\log p_m)^{\frac{\varepsilon'}{2}}}\right),$$

а первое слагаемое принимает некоторое значение (обозначим его через y_m) с вероятностью $\sim \frac{h_m}{\sqrt{p_m}}$. Отсюда следует, что η_{p_m} попадает в интервал длины

$$O\left(\frac{h_m}{p_m^{\frac{1}{2}} (\log p_m)^{\frac{\varepsilon'}{2}}}\right) = O\left(\frac{(\log p_m)^{1-\frac{\mu}{2}-\varepsilon}}{p_m^{\frac{\mu+1}{2}}}\right), \qquad \varepsilon = (\mu - 1)\frac{\varepsilon'}{2}.$$

окружающий точку y_m с вероятностью $\sim \frac{h_m}{\sqrt{p_m}}$.

Отметим, что если $\{G_n(x)\}$ — последовательность функций, имеющих ограниченные в совокупности производные $|G_n(x)| < A$ и

$$|F_n(x) - G_n(x)| \leqslant K \cdot \delta_n,$$

то при любом x

$$|F_n(x + \delta_n) - F_n(x)| \leqslant 2K\delta_n + A\delta_n.$$

Полагая

$$\delta_m = \frac{(\log p_m)^{1-\frac{\mu}{2}-\varepsilon}}{p_m^{\frac{\mu+1}{2}}},$$

видим, что неравенство

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{|F_{p_m}(x) - G_{p_m}(x)|}{\delta_m} < K$$

невозможно, что и требовалось доказать.

§ 5. Примеры. Мы закончим заметку построением двух примеров, о которых было сказано в конце § 2.

Пример 1 *. Пусть $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Пусть, далее, $\{\mu_n\}$ — последовательность целых чисел

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_{n+1} \geqslant 2\mu_n.$$

Положим

$$f(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} e^{it\zeta_p^{-1}}\right), \quad \zeta_p = \mu_1 \cdots \mu_p.$$

Нетрудно показать [ср. ([2]), стр. 28)], что $f(t)$ есть характеристическая функция. Соответствующая $F(x)$ — непрерывная сингулярная функция распределения.

Дискретное распределение $F_{(N)}(x)$ с характеристической функцией

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} e^{it\zeta_n^{-1}}\right)$$

решетчатое с шагом $\frac{1}{\zeta_N}$, следовательно, функция распределения $F_{m_N}(x)$ имеет разрывы порядка $\frac{1}{\zeta_N \sqrt{m_N}}$. Распределение $F(x)$ сосредоточено на множестве точек вида

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_k}, \quad a_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

а распределение $F_{(N)}(x)$ — на множестве точек $x_{a_1 \cdots a_N}$ вида

$$x_{a_1 \cdots a_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_k}{\mu_1 \cdots \mu_k}, \qquad a_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

причем

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\mu_1 \cdots \mu_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_1 \cdots \mu_k} \right| \leqslant \frac{1}{\zeta_{N+1}} + \frac{1}{\zeta_{N+2}} + \cdots \leqslant \frac{2}{\zeta_{N+1}}.$$

* Этот пример сообщен автору А. Н. Колмогоровым.

Положим $\mu_1 = m_1 = 1$ и пусть $\mu_1 \ldots \mu_N$ и $m_1 \ldots m_N$ уже выбраны. Тогда выбираем μ_{N+1} так, чтобы было

$$\frac{\sqrt{m_N}}{\zeta_{N+1}} \leqslant \psi(m_N),$$

а затем m_{N+1} — так, чтобы было

$$\frac{1}{\zeta_{N+1}\sqrt{m_{N+1}}} > \lambda_{N+1}\psi(m_{N+1}).$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$\lim_{N \to \infty} \frac{|F_{m_N}(x) - G_{m_N}(x)|}{\psi(m_N)} = +\infty, \tag{28}$$

каковы бы ни были функции $G_n(x)$ с ограниченными в совокупности производными.

Пример 2. Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность целых чисел

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_{n+1} \geqslant 2\mu_n.$$

Распределение $F(x)$ имеет в точке

$$x_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\mu_1 \cdots \mu_k}$$

разрыв размера $\frac{1}{2^p}$. Пусть $m_1 = 1$ и $\mu_1 \ldots \mu_N$, $m_1, \ldots, m_N$ уже выбраны. Тогда выбираем μ_{N+1} так, чтобы было

$$\frac{\sqrt{m_N}}{\zeta_{N+1}} \leqslant \psi(m_N),$$

а затем — m_{N+1} так, чтобы

$$\frac{1}{\zeta_{N+1}\sqrt{m_{N+1}}} \geqslant \mu_{N+1}\psi(m_{N+1}).$$

Легко проверить, что (28) выполнено.

Поступило
18. XII. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б. и Колмогоров А., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. — Л., ГТТИ, 1949.

[2] Essen K. G., Fourier Analysis of Distribution Functions, Acta Mathem., 77 (1945), 1—125.

[3] Хинчин А., Zur metrischen Theorie der Diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr., 24 (1926), 706—714.

[4] Бернштейн С., Теория вероятностей, М. — Л., ГТТИ, 1946.

[5] Колмогоров А. Н., Über das Gesetz des iterierten Logarithmus, Math. Ann., 109 (1928), 27—37.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 293—324

М. Г. КРЕЙН

О НЕОПРЕДЕЛЕННОМ СЛУЧАЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ИНТЕРВАЛЕ $(0, \infty)$

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В статье устанавливаются характеристики спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ в неопределенном случае.

Введение

1. В этой статье будут изучаться спектры краевых задач, порождаемых уравнением

$$y'' + q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty). \tag{!}$$

Относительно коэффициентов $q(x)$ и $\rho(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ уравнения (!) будет предполагаться следующее:

а) обе функции $q(x)$ и $\rho(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале;

б) при любых $(0 \leqslant)\ a < b\ (< \infty)$

$$\int_a^b \rho(x)\,dx > 0.\ *$$

Обозначим через $L_\rho^{(2)}$ гильбертово пространство всех измеримых функций $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$, имеющих интегрируемый квадрат по весу $\rho(x)$:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \rho(x)\,dx < \infty.$$

Известно, что для уравнения (!) имеет место следующая альтернатива, обнаруженная Г. Вейлем [см. ([1]), ([2]), ([3])]:

Либо для каждого невещественного λ уравнение (!) имеет с точностью до скалярного множителя только одно решение, принадлежащее $L_\rho^{(2)}$, либо для всякого λ все решения уравнения (!) принадлежат $L_\rho^{(2)}$.

Во втором случае (называемом *неопределенным*) уравнению (!) соответствует двупараметрическое семейство краевых задач, получаемых следующим образом:

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — два ненулевые (возможно линейно зависимые) решения уравнения (!) при $\lambda = 0$.

---

* Вместо условия б) можно было бы потребовать только неотрицательность функции $\rho(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ и ее положительность на множестве положительной меры; при этом все доказываемые нами теоремы сохранят полную силу, но потребуются некоторые дополнительные замечания при их доказательстве.

Тогда в неопределенном случае имеет смысл краевая задача, задаваемая следующей системой *:

$$\begin{gathered} y'' + q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \\ W(y,\ \varphi)\,|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} W(y,\ \psi) = 0. \end{gathered} \tag{!!}$$

Спектр краевой задачи (!!) (т. е. совокупность значений λ, для которых система (!!) имеет нетривиальное решение в классе $L_\rho^{(2)}$) образует счетное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности, причем каждому числу λ спектра отвечает единственная с точностью до скалярного множителя фундаментальная функция (решение из $L_\rho^{(2)}$ системы (!!)). Эти фундаментальные функции дают полную ортогональную систему в $L_\rho^{(2)}$.

Еще из первой работы Г. Вейля ([1]) известно, что в неопределенном случае спектр $\{\lambda_j\}_1^\infty$ краевой задачи (!!) не может быть сколь угодно густым, так как в этом случае всегда

$$\sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{1}{\lambda_j^2} < \infty. \tag{0.1}$$

Это, между прочим, обнаруживается следующим образом.

Если решение ψ линейно независимо от φ, то его можно пронормировать так, чтобы

$$W(\varphi,\ \psi) = \varphi(x)\,\psi'(x) - \varphi'(x)\,\psi(x) = 1 \quad (0 \leqslant x < \infty),$$

и тогда краевая задача (!!) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty G(x,\ s)\,y(s)\,\rho(s)\,ds, \tag{0.2}$$

где

$$G(x,\ s) = \begin{cases} \varphi(x)\,\psi(s) & (x \leqslant s), \\ \varphi(s)\,\psi(x) & (x \geqslant s). \end{cases} \tag{0.3}$$

Так как $\varphi,\ \psi \in L_\rho^{(2)}$, то легко видеть, что

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty G^2(x,\ s)\,\rho(x)\,\rho(s)\,dx\,ds < \infty,$$

откуда и вытекает (0.1).

При двух различных выборах функции ψ спектры получающихся различных краевых задач (!!) строго перемежаются, а поэтому условие (0.1) выполняется и тогда, когда $\psi = c\varphi$ (в этом случае $\lambda = 0$ есть характеристическое число системы (!!)).

В нашей заметке ([4]) мы получили значительно более точный результат, показав, что спектр $\{\lambda_j\}$ представляет собой множество нулей некоторой целой функции не выше экспоненциального типа, обладающей рядом специальных свойств.

Однако и этот результат может быть улучшен.

Здесь будет доказано следующее предложение.

* Через $W(y,\ z)$ обозначается вронскиан $yz' - zy'$.

ТЕРЕМА I. *В неопределенном случае спектр* $\{\lambda_j\}$ *краевой задачи* (!!) *всегда совпадает с множеством всех нулей некоторой целой функции* $D(\lambda)$ $(D(0) = 1)$ *, *обладающей свойствами:*

1) $\overline{\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}} \dfrac{\log|D(\lambda)|}{|\lambda|} = 0,$ (0.4)

2) $\dfrac{1}{D(\lambda)} = 1 + \lambda \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_j D'(\lambda_j)(\lambda - \lambda_j)} \quad \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_j^2 |D'(\lambda_j)|} < \infty\right).$ (0.5)

По теореме Линделёфа [см. ([5]), стр. 94—99], условие 1) означает следующее:

1а) *существует предел*

$$\gamma = \lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_j|<r} \frac{1}{\lambda_j};$$

1б) *количество* $n(r)$ $(0 < r < \infty)$ *чисел* λ_j, *заключенных в интервале* $(-r, r)$, *удовлетворяет условию*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = 0$$

и

1в) $D(\lambda) = \lim\limits_{r\to\infty} \prod\limits_{|\lambda_j|<r} \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_j}\right).$

2. Интересно, что при определенных условиях относительно функции ρ спектр $\{\lambda_j\}$, независимо от выбора функции q (лишь бы имел место неопределенный случай), не может быть и очень *редким*.

Для формулировки относящихся сюда результатов обозначим через $n_+(r)$ $(0 < r < \infty)$ количество чисел λ_j, заключенных в интервале $(0, r)$. Имеет место следующее предложение:

ТЕОРЕМА II. *Если в неопределенном случае*

$$\sum_{\lambda_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} < \infty,$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} = \int_0^{\infty} \sqrt{\rho}\, dx < \infty. \qquad (0.6)$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает первая часть теоремы III.

---

* Мы предполагаем, что $W(\varphi, \psi) \neq 0$ и, следовательно, нуль не входит в спектр $\{\lambda_j\}$. В случае $W(\varphi, \psi) = 0$ нормировку $D(0) = 1$ следует отбросить и вместо разложения (0.4) будет иметь место (при соответствующей нормировке $D(\lambda)$) разложение:

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + c_0 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j D'(\lambda_j)(\lambda - \lambda_j)}.$$

В заметке ([4]) был указан более слабый результат, чем (0.5), а именно, что имеет место абсолютно сходящееся разложение

$$\frac{1}{D(\lambda)} = 1 + c_1\lambda + \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 D'(\lambda)} \frac{1}{\lambda - \lambda_j}.$$

ТЕОРЕМА III.* *Если в неопределенном случае*

$$\int_0^\infty \sqrt{\rho}\, dx = \infty, \tag{0.7}$$

то

$$\sum_{\lambda_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} = \infty \tag{0.8}$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} = \infty. \tag{0.9}$$

Вторая часть теоремы III, т. е. соотношение (0.9), непосредственно следует из (0.7), так как нетрудно обнаружить (см. § 5), что всегда

$$\int_0^\infty \sqrt{\rho}\, dx \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}}.$$

3. Если в интегральном уравнении (0.2) произвести замену переменных

$$t = \frac{1}{I}\int_0^x \{\varphi^2(\xi) + \psi^2(\xi)\}\rho(\xi)\, d\xi,$$

где

$$I = \int_0^\infty \{\varphi^2(\xi) + \psi^2(\xi)\}\rho(\xi)\, d\xi,$$

и положить

$$\Psi(t) = \frac{\sqrt{I}\,\psi(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}, \qquad \Phi(t) = \frac{\sqrt{I}\,\varphi(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}},$$

$$Y(t) = \frac{y(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$$

и, наконец,

$$K(s, t) = \begin{cases} \Phi(s)\Psi(t) & (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1), \\ \Phi(t)\Psi(s) & (0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1), \end{cases} \tag{0.10}$$

то уравнение (0.2) перейдет в следующее:

$$Y(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t)\, Y(t)\, dt. \tag{0.11}$$

Целая функция $D(\lambda)$ будет не чем иным, как детерминантом Фредгольма уравнения (0.10).

---

* Теорема III указана в нашей заметке ([4]), однако там допущена досадная описка, а именно, в интеграле (0.7) опущен знак извлечения корня из ρ.

Интегральное уравнение (0.10) можно было бы рассматривать независимо от какой-либо краевой задачи Штурма-Лиувилля, определяя его ядро $K(s, t)$ по формуле (0.10), где $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — какие-либо измеримые функции, удовлетворяющие условию

$$\Phi^2(s) + \Psi^2(s) = \text{const} \quad (0 \leqslant s \leqslant 1). \tag{0.12}$$

Интегральное уравнение (0.11) представляет интерес тем, что для него также справедлива теорема I и, более того, она допускает полное обращение. Как мы покажем в другом месте, *для того чтобы целая функция* $D(\lambda)$ $(D(0) = 1)$ *была детерминантом Фредгольма некоторого интегрального уравнения* (0.11) *с ядром* $K(s, t)$, *удовлетворяющим условиям* (0.10) *и* (0.12), *необходимо и достаточно, чтобы эта целая функция удовлетворяла условиям* 1) *и* 2) *теоремы* I.

Уравнение (0.11) представляет интерес еще по другой причине.

Читатель, знакомый с классической степенной проблемой моментов, легко обнаружит, что наш вывод свойства 1) функции $D(\lambda)$ протекает (если не считать некоторых осложнений, связанных с континуальностью проблемы и потребовавших новых средств теории функций) аналогично доказательству М. Рисса [см. ([6]) и ([7])] его теоремы о том, что в неопределенном случае проблемы моментов точки сосредоточения масс всякого канонического решения проблемы моментов суть нули целой функции, удовлетворяющей условию (0.4).

В заметке ([4]) мы указали путь, который позволяет с единой, более общей точки зрения трактовать как неопределенный случай уравнения (I), так и неопределенный случай проблемы моментов.

Вместо того чтобы отправляться от краевой задачи (II), мы предложили исходить из нагруженного интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty G(x, s)\, y(s)\, d\sigma(s), \tag{0.13}$$

где $\sigma(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$ — произвольная неубывающая функция, а $G(x, s)$ — ядро вида (0.3), причем теперь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные вещественные σ-измеримые функции такие, что

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\, d\sigma(x) < \infty, \quad \int_0^\infty \psi^2(x)\, d\sigma(x) < \infty.$$

Неопределенному случаю проблемы моментов, можно считать, будет соответствовать тот случай интегрального уравнения (0.13), когда $\sigma(x)$ — чистая функция скачков с точками скачков, имеющих единственную точку сгущения на бесконечности.

Но легко показать, что и самый общий случай уравнения (0.13) соответствующими подстановками приводится к уравнению (0.11) с ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условиям (0.10) и (0.12).

Таким образом, теория уравнений (0.11), по сути, содержит в себе теорию неопределенного случая проблемы моментов.

§ 1. Отправные соотношения

1. Нам придется напомнить ряд соотношений теории уравнения

$$y'' + q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0. \qquad (!)$$

Пусть α — некоторое вещественное число, а $\varphi(x;\ \lambda)$ и $\psi(x;\ \lambda)$ — два линейно независимых решения уравнения (!), удовлетворяющих начальным условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0;\lambda) &= \cos\alpha, & \varphi'(0;\lambda) &= \sin\alpha,\\ \psi(0;\lambda) &= -\sin\alpha, & \psi'(0;\lambda) &= \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Как известно, имеет место тождество

$$\varphi(x;\lambda)\,\psi'(x;\lambda) - \varphi'(x;\lambda)\,\psi(x;\lambda) \equiv 1. \qquad (1.2)$$

При помощи решений φ и ψ составим третье решение уравнения (!):

$$\chi(x;\lambda) = \psi(x;\lambda) - \omega_\beta(b;\lambda)\,\varphi(x;\lambda), \qquad (1.3)$$

удовлетворяющее в произвольно выбранной точке $x = b$ (> 0) граничному условию

$$\sin\beta y(b) + \cos\beta y'(b) = 0, \qquad (1.4)$$

где β — какое-либо вещественное число.

Очевидно,

$$\omega_\beta(b;\lambda) = \frac{\sin\beta\psi(b;\lambda) + \cos\beta\psi'(\beta;\lambda)}{\sin\beta\varphi(b;\lambda) + \cos\beta\varphi'(\alpha;\lambda)}. \qquad (1.5)$$

Для любых двух решений $y(x;\lambda)$ и $z(x;\lambda)$ уравнения (!) справедливо тождество *:

$$[y'\bar z - y\bar z']_0^b = \int_0^b (y''\bar z - \bar z'' y)\,dx = (\bar\lambda - \lambda)\int_0^b y\bar z\rho\,dx. \qquad (1.6)$$

Из этого тождества легко получается для любого невещественного λ соотношение

$$\frac{\operatorname{Im}\omega_\beta(b;\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} = \int_0^b |\,\psi(x;\lambda) - \omega_\beta(b;\lambda)\,\varphi(x;\lambda)\,|^2\rho\,dx. \qquad (1.7)$$

В самом деле, чтобы его получить, достаточно положить в (1.6) $y = z = \chi(x;\lambda)$ и учесть следующее: при $x = b$ функции χ и $\bar\chi$ удовлетворяют одному и тому же граничному условию (1.4), в силу чего выражение $\chi'\bar\chi - \chi\bar\chi'$ при $x = b$ обращается в нуль; при $x = 0$ это выражение, в силу (1.1) и (1.3), обращается в $\omega_\beta(b;\bar\lambda) - \omega_\beta(b;\lambda)$.

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{\psi(b;\lambda) + t\,\psi'(b;\lambda)}{\varphi(b;\lambda) + t\varphi'(b;\lambda)} \qquad (1.8)$$

при фиксированных b ($0 < b < \infty$) и λ отображает вещественную ось t в некоторую окружность $C(\lambda;\ b)$.

---

* Черта обозначает переход к комплексно сопряженной величине.

При $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ уравнение этой окружности, согласно (1.7), может быть записано в виде:

$$\frac{w-\overline{w}}{\lambda-\overline{\lambda}} = \int_0^b |\psi(x;\lambda) + w\varphi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx. \tag{1.9}$$

Отсюда явствует, что окружность $C(\lambda; b)$ всегда лежит в той же плоскости (нижней или верхней), что и λ. С увеличением b окружность сжимается, т. е. при $b < b'$ окружность $C(b'; \lambda)$ лежит целиком внутри окружности $C(b; \lambda)$.

Исходя из параметрического уравнения (1.8) окружности $C(b; \lambda)$, нетрудно вычислить ее радиус $r(b; \lambda)$. Оказывается, что

$$r^{-1}(b;\lambda) = |\varphi(b;\lambda)\varphi'(b;\overline{\lambda}) - \varphi'(b;\lambda)\varphi(b;\overline{\lambda})|. \tag{1.10}$$

Подстановка в (1.6) $y = z = \varphi(x; \lambda)$ дает:

$$\varphi(b;\lambda)\varphi'(b;\overline{\lambda}) - \varphi'(b;\lambda)\varphi(b;\overline{\lambda}) = (\lambda-\overline{\lambda})\int_0^\infty |\varphi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx, \tag{1.11}$$

а поэтому

$$r^{-1}(b;\lambda) = 2|\operatorname{Im}\lambda| \int_0^b |\varphi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx. \tag{1.12}$$

Обозначим для данного невещественного λ через $C(\lambda)$ границу множества $K(\lambda)$, являющегося пересечением всех кругов $K(b; \lambda)$, ограниченных окружностями $C(b; \lambda)$.

$C(\lambda)$, очевидно, будет *окружностью*, если

$$\int_0^\infty |\varphi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx < \infty, \tag{1.13}$$

и *точкой* — в противном случае.

Г. *Вейль* [см., например, (²), (³)] показал, что если условие (1.13) выполняется для одного какого-либо невещественного значения λ, то оно выполняется для всех значений λ.

Рассмотрение уравнения предельной окружности $C(\lambda)$:

$$\frac{w-\overline{w}}{\lambda-\overline{\lambda}} = \int_0^\infty |\psi(x;\lambda) - w\varphi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx$$

в случае (1.13) приводит к выводу, что в этом случае также

$$\int_0^\infty |\psi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx < \infty. \tag{1.14}$$

Это и есть так называемый *неопределенный случай*, который мы только и будем рассматривать в дальнейшем.

2. Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} D_0(x;\lambda) &= -\lambda\int_0^x \varphi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho\, ds; \quad & D_1(x;\lambda) &= 1+\lambda\int_0^x \varphi(s;\lambda)\psi_0(s)\rho\, ds, \\ E_0(x;\lambda) &= 1-\lambda\int_0^x \psi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho\, ds, \quad & E_1(x;\lambda) &= \lambda\int_0^x \psi(s;\lambda)\psi_0(s)\rho\, ds, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$\varphi_0(x) = \varphi(x; 0), \quad \psi_0(x) = \psi(x; 0).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(x; \lambda) &= \varphi_0(x) D_1(x; \lambda) + \psi_0(x) D_0(x; \lambda), \\ \psi(x; \lambda) &= \varphi_0(x) E_1(x; \lambda) + \psi_0(x) E_0(x; \lambda), \end{aligned} \tag{1.16}$$

которые путем простого дифференцирования дают еще два соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi'(x; \lambda) &= \varphi_0'(x) D_1(x; \lambda) + \psi_0'(x) D_0(x; \lambda), \\ \psi'(x; \lambda) &= \varphi_0'(x) E_1(x; \lambda) + \psi_0'(x) E_0(x; \lambda). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для их доказательства заметим, что функция

$$V(x, s) = \varphi_0(s)\psi_0(x) - \varphi_0(x)\psi_0(s) \tag{1.18}$$

является функцией Коши дифференциального оператора $d^2/dx^2 + q$. Это означает, что для любой функции $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$, измеримой и суммируемой в каждом конечном интервале, единственное решение системы

$$y'' + q(x) y = f(x),$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

может быть получено по формуле

$$y(x) = \int_0^x V(x; s) f(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(x; \lambda) &= \varphi_0(x) - \lambda \int_0^x V(x, s)\varphi(s; \lambda)\rho\, ds, \\ \psi(x; \lambda) &= \psi_0(x) - \lambda \int_0^x V(x, s)\psi(s; \lambda)\rho\, ds. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Внося сюда вместо $V(x, s)$ его выражение из (1.18), после простой перегруппировки членов получим (1.16).

Пользуясь (1.16) и (1.17), мы можем параметрическое уравнение (1.8) окружности $C(b; \lambda)$ преобразовать к виду:

$$w = \frac{E_0(b; \lambda)\tau + E_1(b; \lambda)}{D_0(b; \lambda)\tau + D_1(b; \lambda)}, \tag{1.20}$$

где параметры t и τ связаны следующим соотношением:

$$\tau = [\psi_0'(b)t + \psi_0(b)] / [\varphi_0'(b)t + \varphi_0(b)]. \tag{1.21}$$

В силу определяющих уравнений (1.19), функции $\varphi(x; \lambda)$ и $\psi(x; \lambda)$ и их производные по x суть целые функции, равномерно ограниченные

при изменении x в любом конечном интервале $(0, b)$, а λ — в любом ограниченном множестве комплексной плоскости.

3. Легко выясняется смысл уравнения:

$$D_1(b; \lambda) + \tau D_0(b; \lambda) = 0. \tag{1.22}$$

В силу (1.16) и (1.17),

$$D_1(b; \lambda) + \tau D_0(b; \lambda) = \varphi(b; \lambda)\,\theta_0'(b) - \varphi'(b; \lambda)\,\theta_0(b),$$

где

$$\theta_0(x) = \psi_0(x) - \tau\varphi_0(x).$$

Поэтому корни уравнения (1.22) являются характеристическими числами краевой задачи:

$$\begin{gathered} y'' + q(x)\,y + \lambda\rho y = 0, \\ W(y, \varphi_0)\big|_{x=0} = 0, \quad W(y, \theta)\big|_{x=b} = 0, \end{gathered} \tag{1.23}$$

где $W(y, z)$ обозначает вронскиан $yz' - y'z$.

Краевая задача (1.23), как известно, эквивалентна нагруженному интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda\int_0^b G_\tau(x, s)\,y(s)\,\rho(s)\,ds, \tag{1.24}$$

где

$$G_\tau(x, s) = \begin{cases} \varphi_0(x)\,\theta_0(s) & (x \leqslant s), \\ \varphi_0(s)\,\theta_0(x) & (x \geqslant s). \end{cases}$$

Легко показывается [см. (8), стр. 265—269], что функция

$$D_1(b; \lambda) + \tau D_0(b; \lambda)$$

есть детерминант Фредгольма уравнения (1.24).

Так как система (1.23) и, следовательно, уравнение (1.24) имеют конечное число отрицательных характеристических чисел [см. (8), § 10, гл. IV], то

$$D_1(b; \lambda) + \tau D_0(b; \lambda) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j(b; \tau)}\right), \tag{1.25}$$

где

$$\lambda_1(b; \tau) < \lambda_2(b; \tau) < \lambda_3(b; \tau) < \dots$$

— все характеристические числа системы (1.23).

В дальнейшем нам придется также пользоваться тем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\lambda_n(b; \tau)}} = \frac{1}{\pi}\int_0^b \sqrt{\rho}\,dx. \tag{1.26}$$

Для случая положительной дважды непрерывно дифференцируемой функции ρ это соотношение хорошо известно [см., например, (2), гл. 1, § 1 и § 4]. Оно обобщается на случай любого суммируемого ρ *.

* Соотношение (1.26) является простым следствием общей теоремы 1 нашей заметки (9).

4. В силу (1.13) и (1.14), при любом λ имеют смысл пределы

$$D_j(\lambda) = D_j(\infty; \lambda) = \lim_{b\to\infty} D_j(b; \lambda)$$

$$(j = 0,1), \qquad (1.27)$$

$$E_j(\lambda) = E_j(\infty; \lambda) = \lim_{b\to\infty} E_j(b; \lambda)$$

а именно:

$$D_0(\lambda) = -\lambda \int_0^\infty \varphi(s; \lambda)\,\varphi_0(s)\,\rho\,ds, \quad D_1(\lambda) = 1 + \lambda \int_0^\infty \varphi(s; \lambda)\,\varphi_0(s)\,\rho\,ds,$$

$$E_0(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^\infty \psi(s; \lambda)\,\varphi_0(s)\,\rho\,ds, \quad E_1(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \psi(s; \lambda)\,\psi_0(s)\,\rho\,ds.$$

Отсюда

$$w = \frac{E_0(\lambda)\,\tau + E_1(\lambda)}{D_0(\lambda)\,\tau + D_1(\lambda)} \qquad (1.28)$$

есть уравнение окружности $C(\lambda)$.

Так как определители дробно-линейных преобразований (1.8) и (1.21) равны единице, то и определитель преобразования (1.20) равен единице:

$$E_0(b; \lambda)\,D_1(b; \lambda) - E_1(b; \lambda)\,D_0(b; \lambda) = 1, \qquad (1.29)$$

а следовательно, и

$$E_0(\lambda)\,D_1(\lambda) - E_1(\lambda)\,D_0(\lambda) = 1. \qquad (1.30)$$

Корни уравнения

$$D_1(\lambda) + \tau D_0(\lambda) = 0$$

дают характеристические числа (числа спектра) краевой задачи

$$\begin{gathered} y'' + q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \\ W(y, \varphi_0)\big|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} W(y, \theta_0) = 0; \end{gathered} \qquad (1.31)$$

при этом значение λ называется *характеристическим числом* системы (1.31), если для этого значения λ система (1.31) имеет решение в классе $L^{(\rho 2)}$.

Следует еще заметить, что корни уравнения

$$D_0(\lambda) = 0$$

суть характеристические числа краевой задачи (1.31) для случая, когда $\theta = \varphi$.

При $\theta \neq c\varphi$ ($\tau \neq \infty$) система (1.31) эквивалентна интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty G_\tau(x, s)\,y(s)\,\rho(s)\,ds.$$

§ 2. Вспомогательные предложения теории функций

1. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться следующим предложением Н. Г. Чеботарева [см. ([5]), стр. 197]:

А. *Для того чтобы мероморфная функция* $\Phi(\lambda)$ *обладала свойством*

$$\operatorname{Im}\Phi(\lambda)/\operatorname{Im}\lambda > 0 \tag{2.1}$$

в любой невещественной регулярной точке λ, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала абсолютно сходящееся разложение:*

$$\Phi(\lambda) = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \lambda\sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_j(\alpha_j - \lambda)}, \tag{2.2}$$

где c_0, α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — *вещественные числа,*

$$c_{-1} \leqslant 0, \quad c_1 \geqslant 0, \quad \varkappa_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, мероморфная функция $\Phi(\lambda)$ со свойством (2.1) всегда вещественна (т. е. вещественна при вещественных λ) и обладает только вещественными полюсами и нулями.

Так как

$$\Phi'(\lambda) = \frac{|c_{-1}|}{\lambda^2} + c_1 + \sum_j \frac{\varkappa_j}{(\alpha_j - \lambda)^2},$$

то нули и полюсы функции $\Phi(\lambda)$ строго перемежаются и всегда являются простыми.

Заметим также, что из (2.2) без труда получается следующая оценка:

$$|\operatorname{Im}\Phi(\lambda)| \leqslant \operatorname{Im}|\Phi(i)|\frac{1+|\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{2.3}$$

которой мы воспользуемся в § 4.

По терминологии Н. Г. Чеботарева, две вещественные целые функции $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ образуют вещественную пару $\{f, g\}$, если они не имеют общих нулей и при любом вещественном γ нули функции

$$\cos\gamma f(\lambda) + \sin\gamma g(\lambda)$$

все вещественные. Н. Г. Чеботареву принадлежит также следующее предложение [см. ([5]), стр. 135]:

В. *Для того чтобы две целые вещественные функции* f *и* g, *не имеющие общих нулей, давали вещественную пару, необходимо и достаточно, чтобы выражение*

$$\operatorname{Im}(g/f) : \operatorname{Im}\lambda \tag{2.4}$$

сохраняло при всех невещественных λ *один и тот же знак.*

Вещественную пару $\{f, g\}$ будем называть **нормированной**, если выражение (2.4) — величина положительная (для этого необходимо и достаточно, чтобы $g'(0)f(0) - g(0)f'(0) > 0$).

Следовательно, если $\{f, g\}$ — нормированная пара, то имеет место абсолютно сходящееся разложение:

$$\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \lambda \sum_j \frac{g(\alpha_j)}{f'(\alpha_j)} \frac{1}{\alpha_j(\lambda - \alpha_j)}, \qquad (2.5)$$

где α_j ($j = 1, 2, \ldots$) — все отличные от нуля корни функции f и при этом:

$$c_{-1} \leqslant 0, \quad c_1 \geqslant 0, \quad f'(\alpha_j)\, g(\alpha_j) < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

2. Нам понадобится также следующее предложение, установленное автором в ([9]): *

С. *Если целая функция $f(\lambda)$ обладает тем свойством, что при некотором целом p имеет место абсолютно сходящееся разложение*

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{p-1}\lambda^{p-1} + \lambda^p \sum_j \frac{1}{f'(\alpha_j)} \cdot \frac{1}{\alpha_j^p (\lambda - \alpha_j)},$$

где

$$\sum_j \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\alpha_j} \right| < \infty, \qquad (2.6)$$

то функция $f(\lambda)$ не выше экспонениального типа, т. е.

$$1) \quad \overline{\lim_{|\lambda| \to \infty}} \frac{\log |f(\lambda)|}{|\lambda|} < \infty$$

и

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |f(t)||}{1 + t^2} dt < \infty.$$

Заметим, что условие (2.6) всегда выполняется, если нули α_j ($j=1, 2, \ldots$) функции $f(\lambda)$ вещественны.

3. В дальнейшем через (N) мы обозначаем класс целых функций, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Если $f \in (N)$ и

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r} \quad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

то [см. ([10])]

$$h(\varphi) = \begin{cases} h\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi & (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi), \\ -h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi & (-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0). \end{cases} \qquad (2.7)$$

* Предложение С было строго доказано нами в ([10]) для вещественных α_j ($j = 1, 2, \ldots$). При доказательстве его в общем случае была допущена ошибка, которая, однако, исправима.

Отличные от нуля корни α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ целой функции $f \in (N)$ всегда удовлетворяют условию (2.6), в силу чего для таких функций абсолютно сходится произведение

$$\prod_j \frac{1 - \lambda / \alpha_j}{1 - \lambda / \bar{\alpha}_j}.$$

В верхней полуплоскости Π_+ $(\operatorname{Im} \lambda > 0)$ для функции $f \in (N)$ справедлива обобщенная формула Пуассона:

$$\log |f(\lambda)| = \log \prod_j \left| \frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda - \bar{\alpha}_j} \right| + h\left(\frac{\pi}{2}\right)\eta + \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |f(t)| \, dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} \tag{2.8}$$

$$(\lambda = \xi + i\eta, \ \eta > 0).$$

Аналогичное равенство, конечно, можно написать и для нижней полуплоскости.

Между прочим, соотношения (2.7) следуют из этих двух равенств. Нетрудно видеть, что класс (N) есть линейное кольцо.

Легко показывается, что если $f(\lambda) \in (N)$, то при любом a также $f(\lambda + a) \in (N)$.

Отметим следующее предложение:

D. *Пусть* $f \in (N)$, $\beta_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — *некоторые из нулей функции* $f(\lambda)$, *а числа* r_j $(j = 1, 2, \ldots)$ *таковы, что*

$$\sum_j \left| \frac{r_j}{\beta_j} \right| < \infty.$$

Тогда функция

$$f_1(\lambda) = f(\lambda) \sum_j \frac{r_j}{\lambda - \beta_j}$$

также принадлежит классу (N).

В самом деле, как показано в ([10]), целая функция принадлежит классу (N) в том и только в том случае, когда функция $\overset{+}{\log} |f(\lambda)|$ имеет в верхней и нижней полуплоскостях Π_+ и Π_- гармоническую мажоранту. С другой стороны, по теореме В. И. Смирнова [см. ([11]), стр. 94], функция

$$\overset{+}{\log} |\varphi(\lambda)| = \overset{+}{\log} \left| \sum_j \frac{r_j}{\lambda - \beta_j} \right|$$

имеет в каждой полуплоскости Π_+ и Π_- гармоническую мажоранту. Следовательно, этим свойством обладает также функция

$$\overset{+}{\log} |f_1(\lambda)| \leqslant 2 + \overset{+}{\log} |f(\lambda)| + \overset{+}{\log} |\varphi(\lambda)|,$$

откуда следует, что $f_1 \in (N)$.

В § 5 мы воспользуемся также следующим предложением [см. ([12]), стр. 13].

Е. *Если целая функция* $f \in (N)$, *то для числа* $n_1(r)$ *ее нулей в секторе*

$$0 < \lambda \leqslant r, \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2},$$

и числа $n_2(r)$ *ее нулей в секторе*

$$0 \leqslant \lambda \leqslant r, \quad |\arg \lambda - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

справедливы соотношения:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_1(r)}{r} = \lim_{r \to \infty} \frac{n_2(r)}{r} = \frac{1}{2\pi}\left[h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

§ 3. Специальная матрица

1. Матрицу-функцию второго порядка

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} P_0(\lambda) & P_1(\lambda) \\ Q_0(\lambda) & Q_1(\lambda) \end{pmatrix},$$

элементы которой $P_j(\lambda)$, $Q_j(\lambda)$ $(j = 0,1)$ суть целые вещественные функции λ, не равные нулю тождественно, будем называть *специальной*, если для нее выполняются следующие два условия:

(I) $P_0(\lambda) Q_1(\lambda) - P_1(\lambda) Q_0(\lambda) = 1$

и

(II) при любом вещественном t $(-\infty < t \leqslant \infty)$ функция

$$w(\lambda) = w_t(\lambda) = \frac{P_0(\lambda)\, t + P_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)\, t + Q_1(\lambda)}$$

удовлетворяет условию:

$$\operatorname{Im} w(\lambda) / \operatorname{Im} \lambda > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0.$$

Элементы Q_0, Q_1 (соответственно P_0, P_1) будем называть *знаменателями* (соответственно *числителями*) специальной матрицы $\mathfrak{M}(\lambda)$.

Очевидно, что вместе с матрицей $\mathfrak{M}(\lambda)$ специальными будут и матрицы, получающиеся из нее перестановкой двух столбцов (или двух строчек) с изменением знака на противоположный у функций какого-либо столбца (какой-либо строчки); и, вообще, специальной будет матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

при любых вещественных θ_1, θ_2.

Исследуем значения функции $w_t(\lambda)$, соответствующей специальной матрице $\mathfrak{M}(\lambda)$, при комплексных t.

При фиксированном λ из верхней полуплоскости $\Pi_+ (\operatorname{Im} \lambda > 0)$ точка $w_t(\lambda)$ с изменением t от $-\infty$ до ∞ описывает некоторую окружность $C(\lambda)$, лежащую в той же верхней полуплоскости. Эта окружность описывается против часовой стрелки, так как при λ вещественном она вырождается в вещественную ось, причем при возрастающем t возрастает и $w_t(\lambda)$, как это следует из (I). Таким образом, при фиксированном λ $(\operatorname{Im} \lambda > 0)$ дробно-линейная функция $w_t(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ в круг, ограниченный $C(\lambda)$, лежащий внутри верхней полуплоскости.

Отсюда, между прочим, вытекает, что *произведение $\mathfrak{M}_1(\lambda)\,\mathfrak{M}_2(\lambda)$ двух специальных матриц $\mathfrak{M}_1(\lambda)$ и $\mathfrak{M}_2(\lambda)$ есть всегда специальная матрица.*

2. Нам понадобятся следующие элементарные леммы:

ЛЕММА 1. *Для того чтобы функция*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{3.1}$$

отображала верхнюю полуплоскость $\Pi_+ (\operatorname{Im} \lambda > 0)$ в некоторый круг K, лежащий целиком внутри Π_+, необходимо и достаточно, чтобы

1) $\operatorname{Im}(\delta\bar{\gamma}) > 0$

и

2) $\operatorname{Im}\alpha \cdot \operatorname{Im}\delta - \operatorname{Im}\beta \cdot \operatorname{Im}\gamma > 0$.

Доказательство. Докажем необходимость условий 1), 2).

Так как внутри верхней полуплоскости функция w конечна, то $\gamma \neq 0$ и нуль $a = -\delta/\gamma$ знаменателя в (3.1) принадлежит нижней полуплоскости, т. е.

$$\operatorname{Im} \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{|\gamma|^2} \operatorname{Im}(\delta\bar{\gamma}) > 0. \tag{3.2}$$

Пусть C — граница K, т. е. окружность, в которую переходит вещественная ось $z = t\ (-\infty < t \leqslant \infty)$.

При возрастании t точка w будет обходить C против часовой стрелки.

Поэтому в нижней точке w_m окружности C (в точке C с наименьшей ординатой), если эта точка достигается при конечном значении t,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{(\gamma t + \delta)^2} > 0.$$

Таким образом, в этой точке $\gamma t + \delta$ вещественно. При наличии (3.2) это возможно лишь в том случае, когда $\gamma \neq \bar{\gamma}$ и

$$t = -\frac{\delta - \bar{\delta}}{\gamma - \bar{\gamma}}.$$

Внося это значение $z = t$ в (3.1), найдем нижнюю точку w_m окружности C:

$$w_m = \frac{1 + \beta\bar{\gamma} - \alpha\bar{\delta}}{\delta\bar{\gamma} - \gamma\bar{\delta}}.$$

С другой стороны, так как $\operatorname{Im} w_m > 0$, то отсюда получаем условие

$$\operatorname{Re}(\alpha\bar{\delta} - \beta\bar{\gamma}) - 1 > 0,$$

а так как $1 = \alpha\delta - \beta\gamma$, то легко видеть что оно эквивалентно условию 2).

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \bar{\gamma}$. В этом случае точка w_m соответствует $t = \infty$ и, таким образом, $w_m = \alpha / \gamma$, откуда

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{Im} \alpha > 0.$$

Условие (3.2) в случае $\gamma = \bar{\gamma}$ дает

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{Im} \delta > 0,$$

а следовательно,

$$\operatorname{Im} \delta \cdot \operatorname{Im} \alpha > 0.$$

Так как теперь $\operatorname{Im} \gamma = 0$, то условие 2) снова выполняется.

Достаточность условий 1) и 2) также очевидна после приведенных рассуждений.

Леммма доказана. В качестве ее простого следствия получается

ЛЕММА 2. *Если дробно-линейная функция*

$$w = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

отображает верхнюю полуплоскость Π_+ *в круг* K, *лежащий внутри* Π_+, *то этим же свойством будут обладать и функции, получающиеся транспозицией пары* α, δ *или пары* $-\beta$, γ:

$$w_1 = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha}, \quad w_2 = \frac{\alpha z - \gamma}{-\beta z + \delta}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $\Delta = 1$. Тогда условие 2) леммы 1 для функций w_j $(j = 1, 2)$ остается тем же, что и для функции w. Что касается условия 1), то для функций w_1 и w_2 оно принимает соответственно вид:

$$\operatorname{Im} (\alpha\bar{\gamma}) > 0, \quad \operatorname{Im} (-\delta\bar{\beta}) > 0, \tag{3.3}$$

а так как точки $w(\infty) = \alpha / \gamma$ и $w(0) = \beta / \delta$ лежат внутри Π_+, то условия (3.3) выполняются.

Между прочим, сопоставление лемм 1, 2 показывает, что лемма 1 сохранит силу, если в ней условие 1) заменить одним из условий (3.3).

Заметим, далее, что если определитель

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \ (\neq 0)$$

отличен от единицы, то, как нетрудно убедиться, лемма 1 сохранит силу, если в ней условие 2) заменить условием:

2′) $\operatorname{Im} \alpha \operatorname{Im} \delta - \operatorname{Im} \gamma \operatorname{Im} \beta + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Delta - \frac{1}{2} |\Delta| > 0.$

Отсюда получается

ЛЕММА 3. *Для того чтобы функция*

$$w = A - \frac{B^2}{z + C}$$

отображала верхнюю полуплоскость Π_+ *в некоторый круг, лежащий целиком внутри* Π_+, *необходимо и достаточно, чтобы*

а) $\operatorname{Im} C > 0$,

б) $\operatorname{Im} A \operatorname{Im} C - (\operatorname{Im} B)^2 > 0$.

Доказательство. В самом деле, в данном случае

$$\alpha = A, \quad \beta = AC - B^2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = C, \quad \Delta = B^2$$

и условие а) означает то же, что и условие 1) леммы 1, а условие б) — то же, что и условие 2'), так как в данном случае

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\Delta - \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(B^2) - \frac{1}{2}|B|^2 = -(\operatorname{Im} B)^2.$$

3. Из леммы 2 непосредственно вытекает, что *если матрица*

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Q_0 & Q_1 \end{pmatrix}$$

является специальной, то специальными будут и матрицы

$$\begin{pmatrix} Q_1 & P_1 \\ Q_0 & P_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_0 & -Q_0 \\ -P_1 & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Условие 1) леммы 1 для специальной матрицы означает, что

$$\operatorname{Im}\frac{Q_1}{Q_0} > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{3.4}$$

Так как в силу (I) функции Q_0 и Q_1 не имеют общих нулей, то они образуют вещественную пару и, следовательно, все их нули вещественны и перемежаются.

Пусть $\{\alpha_{j0}\}$ и $\{\alpha_{j1}\}$ — все не равные нулю корни целых функций Q_0 и Q_1.

По теореме Чеботарева (§ 2, предложение А) имеют место абсолютно сходящиеся разложения:

$$\frac{P_k(\lambda}{Q_k(\lambda)} = \frac{-1k}{\lambda} + c_{0k} + c_{1k}\lambda + \lambda\sum_j \frac{P_k(\alpha_{jk})}{Q_k'(\alpha_{jk})\,\alpha_{jk}\,(\lambda - \alpha_{jk})} \quad (k = 0,1),$$

причем

$$c_{-1k} \leqslant 0, \quad c_{1k} \geqslant 0, \quad \frac{P_k(\alpha_{jk})}{Q_k'(\alpha_{jk})} < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)\,Q_1(\lambda)} = \frac{P_0(\lambda)}{Q_0(\lambda)} - \frac{P_1(\lambda)}{Q_1(\lambda)}.$$

Стало быть,

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)\,Q_1(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \lambda\sum_j \frac{P_0(\alpha_{j0})}{Q_0'(\alpha_{j0})\,\alpha_{j0}\,(\lambda - \alpha_{j0})} - \\ - \sum_j \frac{P_1(\alpha_{j1})}{Q_1'(\alpha_{j1})\,\alpha_{j1}\,(\lambda - \alpha_{j1})}.$$

На основании предложения С предыдущего параграфа заключаем, что функция

$$Q_0 Q_1 \in (N). \tag{3.5}$$

Деля почленно полученное разложение для $Q_0^{-1} Q_1^{-1}$ на λ и устремляя затем λ по мнимой оси к ∞, мы найдем, что $c_1 = 0$.

Из (I) (а впрочем, и из самого разложения (3.4)) следует:

$$P_0(\alpha_{j0}) = Q_1^{-1}(\alpha_{j0}), \quad P_1(\alpha_{j1}) = Q_0^{-1}(\alpha_{j1}).$$

Мы доказали «необходимую» часть следующего предложения:

ТЕОРЕМА 𝔄. *Для того чтобы две целые вещественные функции $Q_0(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ могли служить соответственно первым и вторым знаменателем некоторой специальной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы они составляли нормированную вещественную пару и чтобы имело место абсолютно сходящееся разложение*

$$\frac{1}{Q_0(\lambda) Q_1(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + \lambda \sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0}) Q_1(\alpha_{j0}) \alpha_{j0} (\lambda - \alpha_{j0})} + \\ + \lambda \sum_j \frac{1}{Q_1'(\alpha_{j1}) Q_0(\alpha_{j1}) \alpha_{j1} (\lambda - \alpha_{j1})}, \tag{3.6}$$

где α_{j0} ($j = 1, 2, \ldots$) и α_{j1} ($j = 1, 2, \ldots$) — отличные от нуля корни целых функций Q_0 и Q_1.

Доказательство. Нам осталось доказать достаточность сформулированных условий.

Из условия (3.4) вытекает, что

$$\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = \frac{a_{-1}}{\lambda} + a_0 + a_1\lambda + \lambda \sum_j \frac{Q_1(\alpha_{j0})}{Q_0'(\alpha_{j0})} \cdot \frac{1}{\alpha_{j0}(\lambda - \alpha_{j0})}, \tag{3.7}$$

где $a_{-1} \leqslant 0$, $a_1 \geqslant 0$ и

$$Q_1(\alpha_{j0}) Q_0'(\alpha_{j0}) < 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Аналогично, из рассмотрения функции $-Q_0/Q_1$ получаем:

$$Q_0(\alpha_{j1}) Q_1'(\alpha_{j1}) > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Определим целую вещественную функцию $P_0(\lambda)$ равенством

$$\frac{P_0(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = \frac{c_{-10}}{\lambda} + c_{00} + c_{01}\lambda + \lambda \sum_j \frac{1}{Q_0(\alpha_{j0}) Q_1} \cdot \frac{1}{\alpha_{j0}(\lambda - \alpha_{j0})}, \tag{3.8}$$

где c_{00} — произвольное вещественное число, c_{01} — произвольное неотрицательное число, а

$$c_{-10} = \begin{cases} c_{-1}, & \text{если } c_{-1} < 0, \\ 0, & \text{если } c_{-1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Определим затем вещественную функцию $P_1(\lambda)$ равенством

$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = 1. \tag{3.9}$$

Тогда, в силу (3.8) и (3.9),

$$\frac{P_1}{Q_1} = -\frac{1}{Q_1Q_0} + \frac{P_0}{Q_0} = \frac{c_{-11}}{\lambda} + c_{01} + c_{11}\lambda + \lambda\sum_j \frac{1}{Q_1'(\alpha_{j1})\,Q_1(\alpha_{j1})}\cdot\frac{1}{\alpha_{j1}(\lambda-\alpha_{j1})}, \tag{3.10}$$

где

$$c_{01} = c_{00} - c_0, \quad c_{11} = c_{10} \geqslant 0$$

и

$$c_{-11} = \begin{cases} -c_{-1}, & \text{если } c_{-1} > 0, \\ 0, & \text{если } c_{-1} \leqslant 0. \end{cases}$$

В силу (3.10), функция P_1 также является целой.

Для установления свойства (II) функции

$$w = \frac{P_0t + P_1}{Q_0t + Q_1} = \frac{P_0}{Q_0} - \frac{\frac{1}{Q_0^2}}{t + \frac{Q_1}{Q_0}} \tag{3.11}$$

достаточно показать, согласно лемме 3, что

$$\operatorname{Im}\frac{P_0}{Q_0} > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0 \tag{3.12}$$

и

$$\operatorname{Im}\frac{P_0}{Q_0}\operatorname{Im}\frac{Q_1}{Q_0} - \left(\operatorname{Im}\frac{1}{Q_0}\right)^2 > 0 \quad \text{при } \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{3.13}$$

При этом мы можем предположить, что $Q_0(0) \neq 0$, ибо в противном случае мы вместо матрицы $\mathfrak{M}(\lambda)$ рассматривали бы матрицу

$$\begin{pmatrix} P_1 & -P_0 \\ Q_1 & -Q_0 \end{pmatrix},$$

в которой роль первого знаменателя играет уже функция Q_1, не имеющая общих нулей с Q_0 и для которой, следовательно, $Q_1(0) \neq 0$, если $Q_0(0) = 0$.

Если

$$Q_0(0) \neq 0,$$

то в (3.7) и (3.8)

$$a_{-1} = 0, \quad c_{-10} = 0.$$

Условие (3.12), очевидно, выполняется в силу разложения (3.10), причем

$$\operatorname{Im}\frac{P_0}{Q_0} = c_{01}\eta + \eta\sum_j \frac{x_j}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2} \geqslant \eta\sum_j \frac{x_j}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2}, \tag{3.14}$$

где

$$\eta = \operatorname{Im}\lambda > 0, \quad \varkappa_j = -\frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})\,Q_1(\alpha_{j0})} > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Из (3.7) имеем аналогично

$$\operatorname{Im}\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = a_1\eta + \eta\sum_j \frac{\varkappa_j'}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2} \geqslant \eta\sum_j \frac{\varkappa_j'}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2}, \tag{3.15}$$

где

$$\varkappa_j' = -\frac{Q_1(\alpha_{j0})}{Q_0'(\alpha_{j0})} > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что так как

$$\varkappa_j\varkappa_j' = \frac{1}{[Q_0'(\alpha_{j0})]^2} \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{3.16}$$

а

$$\sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_{j0}^2} < \infty, \quad \sum_j \frac{\varkappa_j'}{\alpha_{j0}^2} < \infty,$$

то, в силу неравенства Коши:

$$\left(\sum_j a_j b_j\right)^2 \leqslant \sum_j a_j^2 \sum_j b_j^2,$$

а также

$$\sum_j \frac{1}{\alpha_{j0}^2\,|Q_0'(\alpha_{j0})|} < \infty. \tag{3.17}$$

Естественно поэтому предположить, что

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)} = \frac{1}{Q_0(0)} + \lambda\sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})\,\alpha_{j0}\,(\lambda - \alpha_{j0})}. \tag{3.18}$$

С установлением (3.17) теорема будет доказана, так как из (3.16) следует:

$$\left(\operatorname{Im}\frac{1}{Q_0}\right)^2 = \eta^2\left(\sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})}\cdot\frac{1}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \eta^2\left(\sum_j \frac{\sqrt{\varkappa_j\varkappa_j'}}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2}\right)^2 \leqslant \eta^2\sum_j \frac{\varkappa_j}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2}\sum_j \frac{\varkappa_j'}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2},$$

а значит, в силу (3.14) и (3.15), условие (3.13) будет выполняться.

Докажем справедливость разложения (3.18).

Покажем прежде всего, что $Q_0 \in (N)$.

Из (3.7) получаем

$$\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^2\sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_j^2(\lambda - \alpha_j)} \quad \left(a_2 = -\sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_j^2}\right).$$

В силу (3.5) и предложения D предыдущего параграфа,

$$Q_0(\lambda) Q_1(\lambda) \sum_j \frac{x_j}{\alpha_j^2 (\lambda - \alpha_j)} \in (N).$$

Так как, кроме того,

$$(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2) Q_0(\lambda) Q_1(\lambda) \in (N),$$

то

$$Q_0^2(\lambda) = Q_0(\lambda) Q_1(\lambda) \frac{Q_0(\lambda)}{Q_1(\lambda)} \in (N),$$

а тогда, очевидно, и $Q_0(\lambda) \in (N)$.

Аналогичным образом из рассмотрения дроби $-Q_1/Q_0$ следует, что $Q_1 \in (N)$.

Рассмотрим целую функцию

$$g(\lambda) = \frac{1}{Q_0(\lambda)} - \frac{1}{Q_0(0)} - \lambda \sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0}) \alpha_{j0} (\lambda - \alpha_{j0})} =$$

$$= \frac{1}{Q_0(\lambda)} - \frac{1}{Q_0(0)} - \lambda \sum_j \frac{1}{\alpha_{j0}^2 Q_1'(\alpha_{j0})} - \lambda^2 \sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0}) \alpha_{j0}^2 (\lambda - \alpha_{j0})}. \quad (3.19)$$

В силу предложения D можно утверждать, что $Q_0(\lambda) g(\lambda) \in (N)$.

Отсюда следует, что $g(\lambda)$, а значит, и

$$g_1(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{\lambda} \quad (g(0) = 0)$$

не выше экспоненциального типа.

Из (3.19) вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty} g_1(re^{i\varphi}) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi \neq 0 \pmod{\pi}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим функцию $g_1(z)$ последовательно в углах

$$\frac{(2k-1)\pi}{4} \leqslant \arg\lambda \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{4};$$

применяя к ней с учетом (3.20) принцип Фрагмена-Линделёфа, мы найдем, что в каждом из этих углов она ограничена, а следовательно, она ограничена во всей комплексной плоскости.

Таким образом, $g_1(\lambda) \equiv C$ и, в силу (3.20), $C = 0$.

Разложение (3.18), а вместе с ним и теорема доказаны.

Заметим, что при доказательстве теоремы мы попутно получили *полное описание всех* специальных матриц, имеющих заданные знаменатели Q_0 и Q_1.

4. При установлении разложения (3.18) мы предполагали, что $Q_0(0) \neq 0$. Если бы $Q_1(0) = 0$, то вместо (3.18) мы имели бы разложение:

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)} = \frac{1}{Q_0'(0)\lambda} + c + \lambda \sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0}) \alpha_{j0} (\lambda - \alpha_{j0})}, \quad (3.21)$$

где c — некоторое вещественное число.

Коль скоро известно, что элемент $Q_0(\lambda)$ является первым знаменателем некоторой специальной матрицы, то это разложение может быть немедленно получено на основании следующего замечания.

В силу (3.11), для элементов специальной матрицы выполняется условие (3.13), а следовательно, каждая из мероморфных функций

$$\frac{P_0}{Q_0}+\frac{Q_1}{Q_0}\pm\frac{1}{Q_0}$$

удовлетворяет условиям предложения А Чеботарева и, следовательно, допускает определенное разложение. А так как $1/Q_0$ есть полуразность этих функций, то она допускает разложение вида (3.21).

Аналогичные разложения, очевидно, имеют место и для функций Q_1^{-1}, P_0^{-1}, P_1^{-1}. Оказывается, эти разложения характеристичны для элементов специальной матрицы.

ТЕОРЕМА 𝔅. *Для того чтобы целая вещественная функция $F(\lambda)$ могла служить элементом некоторой специальной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы функция $F^{-1}(\lambda)$ допускала абсолютно сходящееся разложение:*

$$F^{-1}(\lambda)=\frac{c_{-1}}{\lambda}+c_0+\lambda\sum_j\frac{1}{F'(\alpha_j)\,\alpha_j\,(\lambda-\alpha_j)}, \tag{3.22}$$

где α_j $(j=1, 2, \ldots)$ — все не равные нулю вещественные корни функции $F(\lambda)$.

Доказательство. В силу предыдущего, нам осталось доказать достаточность указанных условий.

Положим $Q_0(\lambda)=F(\lambda)$ и определим функции P_0 и Q_1 равенствами:

$$\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)}=-\frac{m_0\,|c_{-1}|}{\lambda}+a_0+a_1\lambda-\lambda\sum_j\frac{m_j}{|Q_0'(\alpha_j)|\,\alpha_j\,(\lambda-\alpha_j)}, \tag{3.23}$$

$$\frac{P_0(\lambda)}{Q_0(\lambda)}=-\frac{m_0^{-1}\,|c_{-1}|}{\lambda}+e_{00}+c_{01}\lambda-\lambda\sum_j\frac{m_j^{-1}}{|Q_0'(\alpha_j)|\,\alpha_j\,(\lambda-\alpha_j)}, \tag{3.24}$$

где a_0, c_{00} — произвольные вещественные числа, $a_1\geqslant 0$, $c_{01}\geqslant 0$ и $m_j>0$ $(j=1, 2, \ldots)$, причем

$$\sum_j\frac{m_j}{|Q_0'(\alpha_j)|\cdot\alpha_j^2}<\infty,\quad \sum_j\frac{m_j^{-1}}{|Q_0'(\alpha_j)|\cdot\alpha_j^2}<\infty. \tag{3.25}$$

Выбор положительных m_j $(j=1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих последнему условию, всегда возможен, так как, например, можно положить $m_j=1$ $(j=1, 2, \ldots)$. Определяя затем P_1 равенством (3.9) или, что то же, равенством

$$P_1=P_0\frac{Q_1}{Q_0}-\frac{1}{Q_1},$$

мы путем установления, на основании (3.23) и (3.24), равенства вычетов функций $P_0 Q_1/Q_0$ и $1/Q_0$ в точках $\lambda = 0$, α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ убедимся в том, что P_1 — целая функция.

В силу неравенства Коши, легко видеть, что условия (3.12) и (3.13) будут выполнены и, таким образом, матрица $\mathfrak{M}(\lambda)$, составленная из построенных функций P_k, Q_k $(k = 0, 1)$, будет специальной.

Теорема доказана.

5. Если сопоставить доказательство теорем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, то легко убедиться, что при доказательстве теоремы $\mathfrak{B}$ мы одновременно дали описание всех специальных матриц, имеющих данный первый знаменатель $Q_0(\lambda)$. Это обстоятельство приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА $\mathfrak{C}$. *Если вещественная целая функция* $F(\lambda)$ *удовлетворяет условию* (3.22), *то для того чтобы некоторая целая функция* $G(\lambda)$ *вместе с функцией* $F(\lambda)$ *могли служить соответственно вторым и первым знаменателем некоторой специальной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{G(\lambda)}{F(\lambda)} = -\frac{m_0 \, | \, c_{-1} \, |}{\lambda} + a_0 + a_1 \lambda - \lambda \sum_j \frac{m_j}{|F'(\alpha_j)| \, \alpha_j (\lambda - \alpha_j)}, \tag{3.26}$$

где a_0 — *вещественное число*, $a_1 \geqslant 0$, $m_j > 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ *и*

$$\sum_j \frac{m_j}{|F'(\alpha_j)\, \alpha_j^2|} < \infty, \quad \sum_j \frac{m_j^{-1}}{|F'(\alpha_j)| \, \alpha_j^2} < \infty. \tag{3.27}$$

Указанные в теореме условия эквивалентны следующим:

1) *функции* $F(\lambda)$ *и* $G(\lambda)$ *образуют нормированную вещественную пару*;

2)
$$\sum_j \frac{1}{|G(\alpha_j) F'(\alpha_j)| \, \alpha_j^2} < \infty. \tag{3.28}$$

Поясним, что, в силу (3.26), $m_j = \pm G(\alpha_j)$, а поэтому условие (3.28) выражает то же, что второе условие в (3.27) (первое условие в (3.27) есть условие абсолютной сходимости разложения (3.26)).

Сопоставим теперь теорему $\mathfrak{C}$ с теоремой $\mathfrak{A}$, на основании которой вещественная нормированная пара G, F может служить парой знаменателей специальной матрицы в том и только в том случае, когда имеет место абсолютно сходящееся разложение:

$$\frac{1}{F(\lambda) G(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + \lambda \sum_j \frac{1}{F'(\alpha_j) G(\alpha_j) \alpha_j (\lambda - \alpha_j)} + \\ + \lambda \sum_j \frac{1}{F(\beta_j) G'(\beta_j) \beta_j (\lambda - \beta_j)}, \tag{3.29}$$

где β_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — все не равные нулю корни целой функции $G(\lambda)$.

Это сопоставление приводит к выводу, что *для всякой вещественной пары* $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ *условие* (3.28) *эквивалентно условию*

$$\sum_j \frac{1}{|F(\beta_j) G'(\beta_j)| \, \beta_j^2} < \infty \tag{3.30}$$

и, более того, эквивалентно существованию абсолютно сходящегося разложения (3.29).

Одновременно, на основании теоремы $\mathfrak{B}$, мы заключаем, что *для вещественной пары F, G каждое из условий* (3.28), (3.30) *влечет для функций $F^{-1}(\lambda)$ и $G^{-1}(\lambda)$ существование абсолютно сходящихся разложений вида* (3.22).

§ 4. Доказательство теоремы I

Так как, по доказанному в § 1, матрица

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} E_0(\lambda) & E_1(\lambda) \\ D_0(\lambda) & D_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

является специальной, то к ней применима теорема $\mathfrak{B}$ предыдущего параграфа.

Учитывая, что $D_1(0) = 1$, мы, по этой теореме, получаем разложение

$$\frac{1}{D_1(\lambda)} = 1 + \lambda \sum_j \frac{1}{D_1'(\lambda_j)\lambda_j(\lambda - \lambda_j)},$$

что и требуется в условии 2) теоремы 1.

Для установления условия 1) теоремы 1 введем в рассмотрение функции:

$$\Delta(b;\ \lambda) = \frac{D_1(b;\ \lambda) D_0(b;\ \overline{\lambda}) - D_0(b;\ \lambda) D_1(b;\ \overline{\lambda})}{\lambda - \overline{\lambda}} \qquad (0 < b < \infty) \tag{4.1}$$

и

$$\Delta(\lambda) = \lim_{b\to\infty} \Delta(b;\ \lambda) = \frac{D_1(\lambda) D_0(\overline{\lambda}) - D_1(\overline{\lambda}) D_0(\lambda)}{\lambda - \overline{\lambda}}. \tag{4.2}$$

В силу (1.16) и (1.17),

$$\Delta(b;\ \lambda) = \frac{\varphi(b;\ \lambda)\varphi'(b;\ \overline{\lambda}) - \varphi(b;\ \overline{\lambda})\varphi'(b;\ \lambda)}{\lambda - \overline{\lambda}},$$

а если учесть еще (1.11), то получим:

$$\Delta(b;\ \lambda) = \int_0^b |\varphi(x;\ \lambda)|^2 \rho\, dx > 0 \quad (0 < b \leqslant \infty). \tag{4.3}$$

Это равенство показывает, что *при любом комплексном λ функция $\Delta(b;\ \lambda)$ возрастает вместе с возрастанием b.*

С другой стороны, функция

$$\varphi(x;\ \lambda) = \varphi_0(x) D_1(x;\ \lambda) + \psi_0(x) D_0(x;\ \lambda)$$

при любом фиксированном $x\,(0 < x < \infty)$ есть целая функция λ порядка роста 1/2, допускающая, согласно (1.25), разложение в простое произве-

дение линейных сомножителей с вещественными нулями. Отсюда нетрудно заключить, что $|\varphi(x;\ \xi+i\eta)|$ есть возрастающая функция от $|\eta|$.

Стало быть, и *функции* $\Delta(x;\ \xi+i\eta)\ (0<x<\infty)$, $\Delta(\xi+i\eta)$ *возрастают с возрастанием* $|\eta|$.

Положим

$$F(b;\ \lambda)=D_0(b;\ \lambda)\,D_1(b;\ \lambda), \quad F(\lambda)=D_0(\lambda)\,D_1(\lambda).$$

Из (4.1) непосредственно вытекает, что

$$\Delta(b;\ \lambda)\leqslant|F(b;\ \lambda)|/|\operatorname{Im}\lambda|. \tag{4.4}$$

При помощи неравенства Буняковского из (1.15) получаем:

$$|D_1(b;\ \lambda)|\leqslant 1+|\lambda|\left\{\int_0^b|\varphi(x;\ \lambda)|^2\rho\,dx\int_0^b\psi_0^2(x)\rho\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}|D_1(b;\ \lambda)|\leqslant 1+L|\lambda|\Delta^{\frac{1}{2}}(b;\ \lambda)<1+L|\lambda|\Delta^{\frac{1}{2}}(\lambda),\\ |D_1(\lambda)|\leqslant 1+L|\lambda|\Delta^{\frac{1}{2}}(\lambda),\end{gathered} \tag{4.5}$$

где

$$L^2=\int_0^\infty\psi_0^2(x)\rho\,dx.$$

Заметим, что функция $\Delta(b;\ \lambda)$ связана с радиусом $r(b;\lambda)$ окружности $C(b;\ \lambda)$, согласно (1.12), соотношением:

$$\Delta(b;\ \lambda)=\frac{1}{2\,|\operatorname{Im}\lambda|\cdot r(b;\ \lambda)}\,. \tag{4.6}$$

Так как окружность $C(b;\ \lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda>0$ лежит целиком внутри верхней полуплоскости, то

$$2r(b;\ \lambda)<\max_{-\infty<t<\infty}\operatorname{Im}\frac{E_0(b;\lambda)\,t+E_1(b;\lambda)}{D_0(b;\lambda)\,t+D_1(b;\lambda)}\qquad(\operatorname{Im}\lambda>0).$$

Следовательно, согласно оценке (2.3):

$$r(1;\ \lambda)\leqslant\frac{1+|\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|}\,M, \tag{4.7}$$

где

$$M=\frac{1}{2}\max_{-\infty<t<\infty}\operatorname{Im}\frac{E_0(1;\ i)\,t+E_1(1;\ i)}{D_0(1;\ i)\,t+D_1(1;\ i)}\,. \tag{4.8}$$

Отсюда, в силу (4.6), при $b\geqslant 1$ получаем:

$$\Delta(b;\lambda)\geqslant\frac{1}{2\,|\operatorname{Im}\lambda|\,r(1;\lambda)}>\frac{M}{2}\,\frac{1+|\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2}=p(\lambda),$$

а значит, и

$$\Delta(\lambda) \geqslant p(\lambda). \tag{4.9}$$

Так как при любом h

$$K(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\,\overline{\log}\, p(t+ih)\,|}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log p(t+ih)|}{1+t^2}\,dt < \infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\log}\,\Delta(b;\, t+ih)}{1+t^2}\,dt \leqslant K(h) < \infty \quad (0 < b \leqslant \infty). \tag{4.10}$$

Вспоминая, что

$$F(b;\ \lambda) = D_0(b;\ \lambda)\, D_1(b;\ \lambda) \in (N),$$

мы при любом $h > 0$ (см. § 2, п. 3) будем иметь:

$$\log|F(b;\lambda)| = \frac{\eta-h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|F(b;\, t+ih)|}{|\lambda-t-ih|^2}\,dt$$

и, в частности,

$$\log|F(b;\, i+hi)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|F(b;\, t+ih)|}{1+t^2}\,dt.$$

В силу неравенства (4.4), отсюда получаем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\Delta(b;\, t+ih)}{1+t^2}\,dt \leqslant \log\frac{1}{h} + \log|F(b;\, i+hi)|.$$

Учитывая (4.10), находим, далее, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}\,\Delta(b;\, t+ih)}{1+t^2}\,dt \leqslant \log\frac{1}{h} + \log|F(b;\ i+hi)| + K(h).$$

Устремляя b к ∞, мы убеждаемся в конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}\,\Delta(t+ih)}{1+t^2}\,dt,$$

а так как $\Delta(t) \leqslant \Delta(t+ih)$, то также

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}\,\Delta(t)}{1+t^2}\,dt < \infty. \tag{4.11}$$

Так как $D_1(b;\lambda) \in (N)$, то мы можем теперь написать:

$$\log|D_1(b;\xi+i\eta)| = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|D_1(b;t)|}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt \leqslant \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}|D_1(b;t)|}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt.$$

В силу (4.5) *,

$$\log|D_1(b.\,\xi+i\eta)| \leqslant \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2+\overset{+}{\log}\,L+\overset{+}{\log}\,\,t\,|+\overset{+}{\log}\,\Delta(t)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt.$$

Устремляя здесь b к ∞, мы получаем, что и $\log\,|D_1(\xi+i\eta)|$ не больше стоящего справа интеграла.

Но тогда, очевидно,

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\,\frac{\log|D_1(i\eta)|}{\eta} \leqslant 0$$

и, следовательно, согласно (2.7), вообще

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\,\frac{\log|D_1(\lambda)|}{|\lambda|} = 0. \tag{4.12}$$

Таким образом, теорема I (введения) доказана.

Замечание. Легко показать, что функция $\Delta(\lambda)$ есть субгармоническая функция. В самом деле, согласно предложению А Чеботарева (§ 2),

$$\frac{D_0(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda\sum_j\frac{m_j}{\lambda_j(\lambda-\lambda_j)},$$

где

$$m_j = \frac{D_0(\lambda_j)}{D_1'(\lambda_j)} > 0 \qquad (j=1,\,2,\,\ldots),$$

а следовательно,

$$\Delta(\lambda) = \sum_j m_j\left|\frac{D_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_j}\right|^2,$$

что и доказывает наше утверждение.

В силу (4.9) и (4.11),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log\Delta(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty,$$

и, пользуясь (4.12), можно показать, что

$$\log\Delta(\xi+i\eta) \leqslant \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\Delta(t)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt.$$

---

* Мы пользуемся тем, что

$$\overset{+}{\log}(a+b) \leqslant \overset{+}{\log}\,a+\overset{+}{\log}\,b+2,$$

$$\overset{+}{\log}(ab) \leqslant \overset{+}{\log}\,a+\overset{+}{\log}\,b.$$

§ 5. Доказательство теорем II, III

1. Пусть

$$\ldots \lambda_{-2}(b) < \lambda_{-1}(b) \,(< 0 <)\, < \lambda_0(b) < \lambda_1(b) < \ldots$$

— последовательные нули целой функции $D_1(b;\lambda)$. Среди них имеется только конечное число отрицательных.

Обозначим через $n_+(b;r)$ количество чисел $\lambda_j(b)$ $(j=0,1,2,\ldots)$, заключенных в замкнутом интервале $(0,r)$. Согласно формуле (1.26),

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_+(b;r)}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\pi}\int_0^b\sqrt{\rho}\,dx. \tag{5.1}$$

Покажем, что всегда между $\lambda_j(b)$ и $\lambda_{j+1}(b)$ $(j=0,1,2\ldots)$ заключен по крайней мере один корень $D_1(\lambda)$.

Для этого заметим, что $E_1(\lambda)/D_1(\lambda)$ при любом $\lambda\,(\operatorname{Im}\lambda>0)$ лежит на окружности $C(\lambda)$, которая заключена внутри окружности $C(b;\lambda)$, имеющей уравнение (1.20); так как при этом точкам w изнутри $C(b;\lambda)$, по формуле (1.20), соответствуют точки τ верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\tau>0$, то из равенства

$$\frac{E_0(b;\lambda)\,\tau(\lambda)+E_1(b;\lambda)}{D_0(b;\lambda)\,\tau(\lambda)+D_1(b;\lambda)}=\frac{E_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} \tag{5.2}$$

определяется мероморфная функция $\tau(\lambda)$, удовлетворяющая условию:

$$\operatorname{Im}\tau(\lambda)/\operatorname{Im}\lambda>0 \quad (\operatorname{Im}\lambda\neq 0).$$

С другой стороны, так как $D_0(b;\lambda)$ и $D_1(b;\lambda)$ служат соответственно первым и вторым знаменателем некоторой специальной матрицы, то, по теореме $\mathfrak{A}$ § 3,

$$\operatorname{Im}\{D_1(b;\lambda)/D_0(b;\lambda)\}:\operatorname{Im}\lambda>0 \quad (\operatorname{Im}\lambda\neq 0).$$

Таким образом, мероморфная функция

$$\Phi(\lambda)=-\frac{D_1(b;\lambda)\,\tau(\lambda)+D_0(b;\lambda)}{D_1(b;\lambda)\,\tau(\lambda)}=-\frac{D_0(b;\lambda)}{D_1(b;\lambda)}-\frac{1}{\tau(\lambda)}$$

обладает свойством: $\operatorname{Im}\Phi(\lambda)/\operatorname{Im}\lambda>0$

У такой функции нули и полюсы перемежаются (см. § 2, п. 1). С другой стороны, всякий нуль функции $D_1(b;\lambda)$ является полюсом функции $\Phi(\lambda)$, так как все вычеты у функций $D_1(b;\lambda)/D_0(b;\lambda)$ и $-1/\tau(\lambda)$ — одного знака (отрицательны). Следовательно, между каждыми двумя нулями функции $D_1(b;\lambda)$ лежит, по крайней мере, один нуль функции $\Phi(\lambda)$, т. е. нуль функции

$$D_1(b;\lambda)+\tau(\lambda)\,D_0(b;\lambda).$$

Остается показать, что всякий нуль функции

$$D_1(b;\lambda)+\tau(\lambda)\,D_0(b;\lambda)$$

является нулем функции $D_1(\lambda)$, а следовательно, полюсом функции (5.2). Если бы это было не так, то у функций

$$D_1(b;\lambda)+\tau(\lambda)D_0(b;\lambda)$$

и

$$E_1(b;\lambda)+\tau(\lambda)E_0(b;\lambda)$$

был бы, по крайней мере, один общий нуль; но это невозможно, так как, согласно (1.29),

$$[D_1(b;\lambda)+\tau(\lambda)D_0(b;\lambda)]E_0(b;\lambda)-[E_1(b;\lambda)+\tau(\lambda)E_0(b;\lambda)]D_0(b;\lambda)=1.$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

Обозначим через $n_+(r)$ число нулей $D_1(\lambda)$ в интервале $(0, r)$. Согласно доказанному,

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{n_+(r)}{\sqrt{r}}\geqslant\lim_{r\to\infty}\frac{n_1(b;r)}{\sqrt{r}}.$$

Вспоминая (5.1) и то, что здесь b — произвольное положительное число, заключаем, что*

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{n_+(r)}{\sqrt{r}}\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\sqrt{\rho}\,dx. \tag{5.3}$$

2. Перенумеруем нули $D_1(\lambda)$ так, что

$$\ldots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}(<0<)<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$$

Согласно теореме $\mathfrak{B}$ (§ 2),

$$\frac{1}{D_1(\lambda)}=1+\lambda\sum_j\frac{1}{D_1'(\lambda_j)\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{D_1(\lambda^2)}=1+\lambda\sum_j\frac{1}{2D_1'(\lambda_j)\lambda_j}\left\{\frac{1}{\lambda-\sqrt{\lambda_j}}+\frac{1}{\lambda+\sqrt{\lambda_j}}\right\}.$$

Поэтому, если

$$\sum_{\lambda_j<0}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}}<\infty, \tag{5.4}$$

то к функции $D_1(\lambda^2)$ применимо предложение C (§ 2), в силу которого

$$D_1(\lambda^2)\in(N).$$

Величина $n_+(r)$ дает число нулей функции $D_1(\lambda^2)$ в секторе

$$0\leqslant|\lambda|\leqslant\sqrt{r},\quad -\frac{\pi}{2}<\arg\lambda<\frac{\pi}{2}$$

и поэтому, согласно предложению E (§ 2), в рассматриваемом случае существует конечный предел:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_+(r)}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\pi}\varlimsup_{|\lambda|\to\infty}\frac{\log|D_1(\lambda^2)|}{|\lambda|}=\frac{1}{\pi}\lim_{r\to\infty}\frac{\log|D_1(-r)|}{\sqrt{r}}. \tag{5.5}$$

---

* Читатель, знакомый с теорией **определенного случая** для уравнения (!), обнаружит, что из наших рассуждений следует, что и для этого случая всякий раз, когда спектр краевой задачи, состоящей из уравнения $y''+gy+\lambda\rho y=0$ и граничного условия $W(y,\varphi)|_{x=0}=0$, дискретен, соотношение (5.3) сохраняет силу.

Таким образом, (5.4) влечет соотношение:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{\rho}\,dx \leqslant \lim_{r\to\infty}\frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} < \infty. \tag{5.6}$$

Для доказательства того, что здесь имеет место знак равенства, придется воспользоваться рассуждениями того же типа, что и в § 4, причем здесь они несколько усложнятся из-за того, что функции $D_k(b;\lambda^2)$ $(k=0, 1)$ имеют, кроме вещественных нулей, также мнимые нули, число которых может неограниченно возрастать с возрастанием b.

3. Очевидно,

$$\lim_{b\to\infty}\lambda_j(b)=\lambda_j \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Так как, по доказанному, между всякими двумя нулями функции $D_1(b;\lambda)$ лежит по крайней мере один нуль функции $D_1(\lambda)$, то

$$\lim_{b\to\infty}\sum_{\lambda_j(b)<0}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_j(b)|}}=\sum_{\lambda_j<0}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} \quad (<\infty).$$

Отсюда уже нетрудно заключить, что при любом λ

$$\lim_{b\to\infty}\prod_{\lambda_j(b)<0}\frac{i\sqrt{|\lambda_j(b)|}-\lambda}{i\sqrt{|\lambda_j(b)|}+\lambda}=\prod_{\lambda_j<0}\frac{i\sqrt{|\lambda_j|}-\lambda}{i\sqrt{|\lambda_j|}+\lambda}.$$

Аналогичное можно утверждать относительно нулей $D_0(b;\lambda)$ и $D_0(\lambda)$, учитывая, что нули $D_0(\lambda)$ перемежаются с нулями $D_1(\lambda)$ и, следовательно, для них также справедливо (5.4).

Поэтому, если

$$\ldots<\gamma_{-2}(b)<\gamma_{-1}(b)<\gamma_0(b)=0<\gamma_1(b)<\gamma_2(b)<\ldots$$

— последовательные нули функции $F(b;\lambda)=D_0(b;\lambda)\,D_1(b;\lambda)$, а

$$\ldots<\gamma_{-2}<\gamma_{-1}<\gamma_0=0<\gamma_1<\gamma_2<\ldots$$

— последовательные нули функции $F(\lambda)=D_0(\lambda)\,D_1(\lambda)$, то

$$\lim_{b\to\infty}\prod_{\gamma_j(b)<0}\frac{i\sqrt{|\gamma_j(b)|}-\lambda}{i\sqrt{|\gamma_j(b)|}+\lambda}=\prod_{\gamma_j<0}\frac{i\sqrt{|\gamma_j|}-\lambda}{i\sqrt{|\gamma_j|}+\lambda}. \tag{5.7}$$

Так как

$$\lim_{b\to\infty}\gamma_j(b)=\gamma_j \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то, очевидно, равенство (5.7) не нарушится, если в произведениях, стоящих в (5.7), будут перемножаться только дроби, для которых $\gamma_j(b)<-1$.

Замечая, что, в силу (5.7), величина

$$h_b=\int_0^b\sqrt{\rho}\,dx$$

есть тип целых функций $D_0(b;\lambda^2)$ и $D_1(b;\lambda^2)$, которые, на основании предложения С (§ 2) принадлежат классу (N), можно будет написать для функции $F(b;\lambda^2)$ следующее равенство (см. § 2, п. 3):

$$\log|F(b;\lambda^2)| = \log \prod_{\gamma_j(b)<-1} \left| \frac{\sqrt{|\gamma_j(b)|}\, i-\lambda}{\sqrt{|\gamma_j(b)|}\, i+\lambda} \right| + 2h_b(\eta-1) + \\ + \frac{\eta-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|F(b;(t+i)^2)|}{|\lambda-t-i|^2}\, dt \quad (\eta = \operatorname{Im}\lambda > 1). \tag{5.8}$$

А так как, в силу (4.4),

$$\Delta(b;(t+i)^2) \leqslant \frac{1}{2|t|} |F(b;(t+i)^2)|,$$

то из (5.8) можно получить, что

$$\frac{\eta-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\Delta(b;(t+i)^2)}{|\lambda-t-i|^2}\, dt < M(b;\lambda) \quad (\eta = \operatorname{Im}\lambda > 1), \tag{5.9}$$

где $M(b;\lambda)$ — некоторая величина, стремящаяся к конечному пределу при $b\to\infty$.

С другой стороны, в силу (4.9),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\log}\,\Delta(b;(t+i)^2)}{|\lambda-t-i|^2}\, dt < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\log}\, p((t+i)^2)}{|\lambda-t-i|^2}\, dt < \infty.$$

Отсюда и из (5.9) легко заключим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}\,\Delta((t+i)^2)}{|\lambda-t-i|^2}\, dt < \infty.$$

Так как для $D_1(b;\lambda^2)$ можно написать равенство, аналогичное (5.8), то

$$\log|D_1(b;\lambda^2)| \leqslant \frac{\eta-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|D_1(b;(t+i)^2)|}{|\lambda-t-i|^2}\, dt + h_b(\eta-1) \qquad (\eta = \operatorname{Im}\lambda > 1).$$

В силу (4.5), будем, далее, иметь:

$$\log|D_1(b;\lambda^2)| \leqslant \frac{\eta-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\overset{+}{\log}L + \log(1+t^2) + \overset{+}{\log}\,\Delta((t+i)^2)}{|\lambda-t-i|^2}\, dt + h_b(\eta-1).$$

Переходя к пределу при $b\to\infty$, найдем, наконец, что

$$\log|D_1(\lambda^2)| \leqslant (\eta-1)\int_0^{\infty} \sqrt{\rho}\, dx + \frac{\eta-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\overset{+}{\log}L + \log(1+t^2) + \overset{+}{\log}\,\Delta((t+i)^2)}{|\lambda-t-i|^2}\, dt$$

$$(\lambda = \xi + i\eta,\ \eta > 1).$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|D_1(-r)|}{\sqrt{r}} \leqslant \int_0^{\infty} \sqrt{\rho}\, dt.$$

Сопоставляя это неравенство с (5.5) и (5.6), заключаем, что в (5.6) имеет место знак равенства.

Теорема II доказана.

Как отмечалось во введении, теорема III есть непосредственное следствие теоремы II и соотношения (5.3).

Поступило
13. XII. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Weyl H., Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann., 68 (1910), 220—269.

[2] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям, М.— Л., ГТТИ, 1950.

[3] Titchmarsch E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford, 1946.

[4] Крейн М. Г., О краевой задаче Штурма-Лиувилля в интервале и об одном классе интегральных уравнений, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXXIII, № 6 (1950), 1125—1128.

[5] Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды матем. ин-та им В. А. Стеклова, т. XXVI, 1949.

[6] Riesz M., Sur le problème des moments, Arkiv för mat., astronomi och fysik, 17, N 16 (1923), 1—52.

[7] Schohat J. A. and Tamarkin J. D., The problem of moments, New York, 1943.

[8] Гантмахер Ф. Р и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, М.— Л., ГТТИ, 1950.

[9] Крейн М. Г., Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот, Доклады Ак. Наук СССР, т. LXXVI, № 3 (1951), 345—348.

[10] Крейн М. Г., К теории целых функций экспоненциального типа, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 11 (1947), 309—326.

[11] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, М.— Л., ГТТИ, 1950.

[12] Levinson N., Gap and density Theorems, New York, 1940.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 325—352

Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе дана асимптотическая формула для спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка с оценкой остатка. Вывод асимптотической формулы существенно опирается на классическую аппроксимационную теорему С. Н. Бернштейна.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Ly+\lambda y=y''-q(x)\,y+\lambda y=0. \tag{0.1}$$

Относительно функции $q(x)$ будем предполагать, что она действительна, определена в интервале $(0, b)$ $(0\leqslant b\leqslant\infty)$ и суммируема в каждом интервале $(0\leqslant x\leqslant b'<b)$.

Обозначим через h произвольное действительное число и через $\varphi(x,\lambda)$ — решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad \varphi'(0,\lambda)=h. \tag{0.2}$$

Если $h=\infty$, то под $\varphi(x,\lambda)$ мы будем понимать решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(0,\lambda)=0,\quad \varphi'(0,\lambda)=\sqrt{\lambda}. \tag{0.2'}$$

Можно показать [см. ([1]), ([2]), ([3])], что при данном h существует по крайней мере одна монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$, так что для каждой функции $f(x)\in L_2(0,b)$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_0^b f^2(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda),\qquad E(\lambda)=\underset{b'\to b}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^{b'}f(x)\,\varphi(x,\lambda)\,dx.$$

Функцию $\rho(\lambda)$ мы будем называть в дальнейшем спектральной функцией уравнения (0.1).

Интересно выяснить, в особенности в связи с обратной задачей Штурма-Лиувилля, какие монотонные функции $\rho(\lambda)$ могут быть спектральными функциями для уравнений вида (0.1). Решению этого вопроса

посвящена работа ([4]), в которой по существу указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы монотонная функция $\rho(\lambda)$ являлась спектральной функцией уравнения вида (0.1). Эти условия состоят в следующем:

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{\lambda} x} d\rho(\lambda) < \infty$ для всех $x < 2b$;

2) положим для $\lambda > 0$

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}$$

и рассмотрим функцию

$$a(x) = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda}\, d\sigma(\lambda).$$

Для того чтобы функция $\rho(\lambda)$ являлась спектральной функцией уравнения (0.1) с непрерывной функцией $q(x)$, необходимо, чтобы для $0 \leqslant x < 2b$ функция $a(x)$ имела непрерывную третью производную, и достаточно, чтобы она имела непрерывную четвертую производную.

Заметим, что необходимость условия 1) была ранее получена В. А. Марченко [см. ([5]), ([6])].

Так как проверка дифференцируемости функции $a(x)$ может оказаться весьма затруднительной, то большое значение приобретают различные необходимые условия для асимптотического поведения спектральной функции $\rho(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. Первое такое условие было указано мною в работе ([7]). Я показал, что при $\lambda \to +\infty$

$$\rho(\lambda) < C\sqrt{\lambda},$$

где C — некоторая абсолютная постоянная. Затем В. А. Марченко получил интересную асимптотическую формулу [см. ([5]), ([6])]:

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}). \tag{0.3}$$

В настоящей статье дается новый вывод формулы (0.3). Предлагаемый нами метод позволяет также более точно оценить остаток в формуле (0.3).

Положим для $\lambda > 0$ $\lambda = \mu^2$, $\rho(\lambda) = \sigma(\mu)$ и продолжим функцию $\sigma(\mu)$ на отрицательную полуось по нечетному закону. Мы доказываем, что при $\mu \to +\infty$ равномерно по a

$$\sigma(\mu + a) - \sigma(a) = \frac{2}{\pi}\mu + O(\ln\mu), \tag{0.4}$$

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_{0}^{\mu}\left\{\frac{1}{2}\left[\sigma(\nu + a) + \sigma(\nu - a) - \frac{2}{\pi}\nu\right\} d\nu = O(1). \tag{0.5}$$

Если же отрицательный спектр отсутствует, $h=0$ или $h=\infty$ и при $x\to 0$

$$\int_0^x |q(s)|\,ds = O(x^\alpha),$$

где $\alpha>0$, то при $\mu\to+\infty$ равномерно по a

$$\sigma(\mu+a)-\sigma(a)=\frac{2}{\pi}\mu+O(1). \tag{0.6}$$

Для доказательства указанных асимптотических формул мы существенно использовали классическую аппроксимационную теорему С. Н. Бернштейна.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения из теории интегралов Фурье

Пусть $\sigma(\mu)$ — комплекснозначная функция, определенная для всех действительных значений μ и удовлетворяющая условию *

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu)\} = M < \infty. \tag{1.1}$$

Положим

$$E_2(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2}\,d\sigma(\mu)+\int_{-1}^{1}\frac{e^{-i\alpha\mu}-1+i\alpha\mu}{-\mu^2}\,d\sigma(\mu)+\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2}\,d\sigma(\mu)\right\}. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что условие (1.1) обеспечивает абсолютную и равномерную в каждом конечном интервале сходимость интеграла (1.2). Поэтому функция $E_2(\alpha)$ непрерывна. Функцию $E_2(\alpha)$ мы будем называть преобразованием Бохнера-Стильтьеса для функции $\sigma(\mu)$. Если функция $\sigma(\mu)$ дифференцируема, то по формуле (1.2) определяется преобразование Бохнера для $\sigma'(\mu)$ [см. ([8]), стр. 110]. В последующем мы будем различать преобразования Бохнера и преобразования Бохнера-Стильтьеса. Мы увидим, что основные свойства преобразования Бохнера переносятся на преобразования Бохнера-Стильтьеса.

В настоящем параграфе мы докажем две леммы, которые играют в последующем существенную роль.

ЛЕММА 1.1. *Пусть*

$$\rho_n(\mu)=\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 na}{n^3a^4}\,d\sigma(\mu+a), \tag{1.3}$$

---

* Через $\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\sigma(\mu)\}$ мы обозначаем вариацию функции $\sigma(\mu)$ в интервале $(\mu, \mu+1)$.

$$E_{2,n}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \rho_n(\mu)\, d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\alpha\mu} - 1 + i\alpha\mu}{-\mu^2} \rho_n(\mu)\, d\mu + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \rho_n(\mu)\, d\mu \right\}. \qquad (1.4)$$

Тогда:

1) *в каждой точке непрерывности функции* $\sigma(\mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\mu} \rho_n(\nu)\, d\nu = \sigma(\mu) - \frac{1}{2}\{\sigma(+0) + \sigma(-0)\}; \qquad (1.5)$$

2)

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu)|\, d\nu \leqslant M, \qquad (1.6)$$

причем число M *— то же, что и в условии* (1.1);

3) *равномерно в каждом конечном интервале*

$$\lim_{n\to\infty} E_{2,n}(\alpha) = E_2(\alpha). \qquad (1.7)$$

Доказательство. 1) Из оценки (1.1) легко следует, что для больших a

$$|\sigma(a)| = O(a).$$

Поэтому при каждом фиксированном μ

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\sigma(\mu + a)}{a^4} = 0.$$

Интегрируя по частям, мы получим из формулы (1.3):

$$\rho_n(\mu) = -\frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\mu + a)\, d\left(\frac{\sin^4 na}{n^3 a^4}\right).$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до некоторого μ, а затем интегрируя по частям в обратном порядке, мы получим:

$$\int_0^{\mu} \rho_n(\nu)\, d\nu = -\frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{\mu} \sigma(\nu + a)\, d\nu \right\} d\left(\frac{\sin^4 na}{n^3 a^4}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_a^{a+\mu} \sigma(\nu)\, d\nu \right\} d\left(\frac{\sin^4 na}{n^3 a^4}\right) =$$

$$= \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 na}{n^3 a^4} \{\sigma(a + \mu) - \sigma(a)\}\, da.$$

Пусть μ есть точка непрерывности функции $\sigma(\mu)$. Полагая $n \to \infty$, мы получим, в силу известной теоремы (см., например, ([8]), стр. 20), формулу (1.5).

2) Определим монотонную функцию $\sigma_1(\mu)$ следующим образом:

$$\sigma_1(\mu) = \begin{cases} \overset{\mu}{\underset{+0}{V}} \{\sigma(\mu)\}, & \mu > 0, \\ -\overset{\mu}{\underset{-0}{V}} \{\sigma(\mu)\}, & \mu < 0. \end{cases}$$

Из определения интеграла Стильтьеса легко следует, что

$$|\rho_n(\nu)| \leqslant \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 na}{n^3 a^4} d\sigma_1(\nu + a).$$

Из этого неравенства, так же как и при доказательстве пункта 1), следует, что

$$\int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu)| d\nu \leqslant \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 na}{n^3 a^4} \{\sigma_1(\mu + a + 1) - \sigma_1(\mu + a)\} da \leqslant M,$$

что и доказывает, в силу произвольности числа μ, формулу (1.6).

3) Равенство (1.7) следует из пунктов 1) и 2) и из известной теоремы Хелли о предельном переходе под знаком интеграла Стильтьеса.

ЛЕММА 1.2. *Предположим, что функция $K(a)$ для больших a удовлетворяет условию*

$$K(a) = O\left(\frac{1}{a^4}\right).$$

Положим

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(a) e^{-i\alpha a} da,$$

$$\tau(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(a) d\sigma(\mu + a),$$

$$\Phi_2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{\infty}^{-1} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \tau(\mu) d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\alpha\mu} - 1 + i\alpha\mu}{-\mu^2} \tau(\mu) d\mu + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \tau(\mu) d\mu \right\}.$$

Тогда

$$\Phi_2(\alpha) = \gamma(\alpha) E_2(\alpha) - 2\int_0^{\alpha} E_2(\alpha) \gamma'(\alpha) d\alpha + \int_0^{\alpha} d\alpha \int_0^{\alpha} E_2(\alpha) \gamma''(\alpha) d\alpha + c_0 + c_1\alpha, \quad (1.8)$$

где c_0 и c_1 — постоянные числа.

Доказательство. Пусть функция $\rho_n(\mu)$ определена так же, как и в предыдущей лемме.

Положим

$$\tau_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)\, \rho_n(\mu + a)\, da$$

и обозначим через $\Phi_{2,n}(\alpha)$ и $E_{2,n}(\alpha)$ преобразования Бохнера для $\tau_n(\mu)$ и $\rho_n(\mu)$, т. е. пусть

$$\Phi_{2,n}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \tau_n(\mu)\, d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\alpha\mu} - 1 + i\alpha\mu}{-\mu^2} \tau_n(\mu)\, d\mu + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \tau_n(\mu)\, d\mu \right\}, \tag{1.9}$$

$$E_{2,n}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \rho_n(\mu)\, d\mu + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\alpha\mu} - 1 + i\alpha\mu}{-\mu^2} \rho_n(\mu)\, d\mu + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{-\mu^2} \rho_n(\mu)\, d\mu \right\}.$$

Известно [см. ([8]), стр. 127], что

$$\Phi_{2,n}(\alpha) = \gamma(\alpha) F_{2,n}(\alpha) - 2 \int_{0}^{\alpha} E_{2,n}(\alpha)\, \gamma'(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \int_{0}^{\alpha} d\alpha \int_{0}^{\alpha} E_{2,n}(\alpha)\, \gamma''(\alpha)\, d\alpha + c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\alpha. \tag{1.10}$$

Если $n \to \infty$, то, в силу леммы 1.1, $\tau_n(\mu)$ стремится равномерно в каждом конечном интервале к $\tau(\mu)$, $E_{2,n}(\alpha)$ — к $E_2(\alpha)$. Покажем, что $\Phi_{2,n}(\alpha)$ стремится к $\Phi_2(\alpha)$ и, следовательно, (1.8) вытекает из (1.10). В самом деле,

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |\tau_n(\nu)|\, d\nu \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |K(a)|\, da \cdot \sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu)|\, d\nu.$$

Поэтому в равенстве (1.9) можно перейти к пределу под знаком интеграла, и мы получим:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{2,n}(\alpha) = \Phi_2(\alpha).$$

Укажем три следствия из равенства (1.8), которые играют в последующем важную роль:

1. *Если функция $E_2(\alpha)$ в некотором интервале (a, b) линейна, то функция $\Phi_2(\alpha)$ в этом интервале также линейна.*

Это утверждение следует из равенства (1.8) при помощи двукратного дифференцирования.

2. *Если в некотором интервале* (a, b) $\gamma(\alpha) = 0$, *то, какова бы ни была функция* $E_2(\alpha)$, *функция* $\Phi_2(\alpha)$ *в этом интервале линейна.*

3. *Если в некотором интервале* (a, b) $\gamma(\alpha) = 1$, *то в этом интервале*

$$\Phi_2(\alpha) = E_2(\alpha) + c_0 + c_1\alpha.$$

§ 2. Доказательство одного неравенства

Для доказательства теоремы, аналогичной аппроксимационной теореме С. Н. Бернштейна, нам понадобится неравенство, аналогичное классическому неравенству Г. Бора (9). Последнее неравенство состоит в следующем:

Неравенство Г. Бора. *Пусть* $f(\mu)$ — *измеримая ограниченная на всей действительной прямой функция. Предположим, что преобразование Бохнера для функции* $f(\mu)$ *в интервале* $(-\Lambda, \Lambda)(\Lambda > 0)$ *линейно. Далее, обозначим через* $f^{-[1]}(\mu)$ *тот неопределенный интеграл функции* $f(\mu)$, *для которого преобразование Бохнера в интервале* $(-\Lambda, \Lambda)$ *линейно. Тогда*

$$|f^{-[1]}(\mu)| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Lambda} \cdot \sup_{-\infty<\mu<\infty} |f(\mu)|. \tag{2.1}$$

Бор доказал неравенство (2.1) для периодических функций. Распространение неравенства Бора на произвольные измеримые ограниченные функции дано в (10). В том неравенстве, которое нам понадобится, оценка интеграла дается не через

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} f|(\mu)|,$$

а через

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu)\}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть функция* $\sigma(\mu)$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu)\} = M < \infty \tag{2.2}$$

и пусть преобразование Бохнера-Стильтьеса для функции $\sigma(\mu)$ *линейно в интервале* $(-\Lambda, \Lambda;\ 0 < \Lambda \leqslant 1)$. *Выберем постоянную величину* K *так, чтобы преобразование Бохнера для функции* $\sigma(\mu) + K$ *было линейным в интервале** $(-\Lambda, \Lambda)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$|K + \sigma(\mu)| \leqslant C\frac{M}{\Lambda}, \tag{2.3}$$

где C — *некоторая абсолютная постоянная.*

---

* Мы увидим, что это возможно.

Доказательство. Докажем вначале неравенство (2.3) для случая тригонометрических многочленов. Общий случай легко сводится к нему [см. ([10])]. Итак, предположим, что

$$\sigma(\mu) = \int_0^\mu \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k \nu} \right) d\nu = \int_0^\mu S_n(\nu)\, d\nu$$

с действительным λ_k. Непосредственным вычислением легко показать [см. ([8]), стр. 115], что условие $|\lambda_k| \geqslant \Lambda$ равносильно линейности преобразования Бохнера-Стильтьеса для функции $\sigma(\mu)$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$.

Мы должны доказать, что если $|\lambda_k| \geqslant \Lambda$, то

$$\left| K + \int_0^\mu S_n(\nu)\, d\nu \right| \leqslant \frac{C}{\Lambda} \sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_\mu^{\mu+1} |S_n(\nu)|\, d\nu, \tag{2.4}$$

причем постоянная K выбрана так, что тригонометрический многочлен

$$K + \int_0^\mu S_n(\nu)\, d\nu$$

не имеет свободного члена. Покажем, что, не нарушая общности рассуждений, можно при доказательстве неравенства (2.4) ограничиться случаем $\Lambda = 1$. В самом деле, тригонометрический многочлен

$$t_n(\mu) = S_n\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\frac{\lambda_k}{\Lambda}\mu} = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\nu_k \mu}$$

удовлетворяет условию $|\nu_k| \geqslant 1$. Пусть

$$N = \sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_\mu^{\mu+1} |t_n(\nu)|\, d\nu$$

и пусть уже доказано, что

$$\left| A + \int_0^\mu t_n(\nu)\, d\nu \right| \leqslant CN, \tag{2.5}$$

причем постоянная A выбрана так, что тригонометрический многочлен

$$A + \int_0^\mu t_n(\nu)\, d\nu$$

не имеет свободного члена.

Из неравенства (2.5) следует:

$$\left| A + \int_0^\mu S_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right) d\nu \right| = \left| A + \Lambda \int_0^{\frac{\mu}{\Lambda}} S_n(\nu)\, d\nu \right| \leqslant C \cdot N;$$

деля на Λ, получаем

$$\left|\frac{A}{\Lambda}+\int_0^{\frac{\mu}{\Lambda}} S_n(\nu)\,d\nu\right| \leqslant C\cdot\frac{N}{\Lambda},$$

что, в силу произвольности числа μ, равносильно неравенству

$$\left|K+\int_0^{\mu} S_n(\nu)\,d\nu\right| \leqslant C\cdot\frac{N}{\Lambda}, \tag{2.6}$$

где $K=\frac{A}{\Lambda}$.

Далее, мы имеем:

$$N=\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+1}|t_n(\nu)|\,d\nu=\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+1}\left|S_n\left(\frac{\nu}{\Lambda}\right)\right|d\nu=$$

$$=\Lambda\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\frac{\mu}{\Lambda}}^{\frac{\mu}{\Lambda}+\frac{1}{\Lambda}}|S_n(\nu)|\,d\nu=\Lambda\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+\frac{1}{\Lambda}}|S_n(\nu)|\,d\nu.$$

Положим

$$\frac{1}{\Lambda}=n+\theta \quad (\Lambda\leqslant 1),$$

где n — целое положительное число и $0\leqslant\theta<1$. Имеем:

$$\Lambda\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+\frac{1}{\Lambda}}|S_n(\nu)|\,d\nu=\frac{1}{n+\theta}\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+n+\theta}|S_n(\nu)|\,d\nu\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+n+1}|S_n(\nu)|\,d\nu\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+1}|S_n(\nu)|\,d\nu<2M.$$

Поэтому из неравенства (2.6) следует неравенство (2.4) с заменой C на $2C$.

Остается доказать неравенство (2.5). Положим

$$\psi(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{i} & \text{для } 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{1}{i\lambda} & \text{для } \lambda\geqslant 1\end{cases}\qquad \psi(-\lambda)=-\psi(\lambda).$$

Вычислим преобразование Фурье для функции $\psi(\lambda)$. Имеем:

$$g(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda)\,e^{-i\lambda a}\,d\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1\lambda\sin\lambda a\,d\lambda+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^{\infty}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}\,d\lambda.$$

Так как

$$\int_1^\infty \frac{\sin\lambda a}{\lambda} d\lambda = \int_a^{a\cdot\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda} d\lambda,$$

то функция $g(a)$ в окрестности точки $a=0$ ограничена и в точке $a=0$ имеет разрыв первого рода со скачком, равным $\sqrt{2\pi}$. Интегрируя дважды по частям, мы получим:

$$g(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a}{a^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^2} \int_1^\infty \frac{\sin\lambda a}{\lambda^3} d\lambda.$$

Отсюда видно, что $g(a) \in L(-\infty, \infty)$, и при $a \to \infty$

$$g(a) = O\left(\frac{1}{a^2}\right). \tag{2.7}$$

Рассмотрим функцию

$$F_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t_n(\mu + a)\, g(a)\, da.$$

Покажем, что

$$F_n(\mu) = A + \int_0^\mu t_n(\nu)\, d\nu,$$

причем постоянная A выбрана так, что свободный член многочлена $F_n(\mu)$ равен нулю.

В самом деле, в силу формулы обращения Фурье,

$$F_n(\mu) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\nu_k\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu_k a} g(a)\, da = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{i\nu_k} e^{i\nu_k\mu} = A + \int_0^\mu t_n(\nu)\, d\nu.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t_n(\mu + a)\, g(a)\, da = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{k+1} t_n(\mu + a)\, g(a)\, da,$$

то из оценки (2.7) следует

$$\left| A + \int_0^\mu t_n(\nu)\, d\nu \right| \leqslant C_1 \int_{-1}^{1} |t_n(\mu + a)|\, da +$$

$$+ C_2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_k^{k+1} |t_n(\mu + a)|\, da \right\} <$$

$$< C_3 \sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_\mu^{\mu+1} |t_n(\nu)|\, d\nu = C_3 N.$$

При помощи грубого подсчета можно показать, что $C_3 < \pi + 3$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть функция $\sigma(\mu)$ удовлетворяет условию (2.2) и пусть ее преобразование Бохнера-Стильтьеса линейно в интервале $(-\Lambda, \Lambda; \Lambda \leqslant 1)$. Выберем произвольное положительное число n и положим

$$\rho_n(\mu) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 na}{n^3 a^4} d\sigma(\mu + a).$$

Так как преобразование Фурье функции $\frac{\sin^4 na}{n^3 a^4}$ вне интервала $(-4n, 4n)$ равно нулю, то, в силу леммы 1.2, преобразование Бохнера для функции $\rho_n(\mu)$ в интервалах $(-\infty, 4n)$, $(-\Lambda, \Lambda)$, $(4n, \infty)$ линейно. Как показано нами в заметке ([10]), существует последовательность конечных тригонометрических сумм $S_{n,N}(\mu)$ с показателями, лежащими вне интервала $(-\Lambda, \Lambda)$, сходящаяся при $N \to \infty$ равномерно в каждом конечном интервале к функции $\rho_n(\mu)$. Из представления для сумм $S_{n,N}(\mu)$, указанного в ([10]), легко следует, что

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |S_{n,N}(\nu)|\, d\nu \leqslant \sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu)|\, d\nu$$

и, значит, в силу леммы 1.1 (пункт 2),

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |S_{n,N}(\nu)|\, d\nu \leqslant M.$$

Из неравенства (2.4) следует:

$$\left| K_{n,N} + \int_0^{\mu} S_{n,N}(\nu)\, d\nu \right| \leqslant \frac{C}{\Lambda} \cdot M. \tag{2.8}$$

Пусть μ и n зафиксированы. Покажем сначала, что существует предел

$$K_n = \lim_{N\to\infty} K_{n,N}.$$

В самом деле,

$$K_{n,N} + \int_0^{\mu} S_{n,N}(\nu)\, d\nu = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{\infty} S_{n,N}(\mu + a)\, g(a)\, da.$$

Полагая в этом равенстве $N \to \infty$, мы получим

$$\lim_{N\to\infty} K_{n,N} + \int_0^{\mu} \rho_n(\nu)\, d\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(\mu + a)\, g(a)\, da. \tag{2.9}$$

Поэтому существует предел

$$K_n = \lim_{N\to\infty} K_{n,N}.$$

Переходя в неравенстве (2.8) к пределу, полагая $N \to \infty$, мы получим

$$\left| K_n + \int_0^\mu \rho_n(\nu)\, d\nu \right| \leqslant \frac{C}{\Lambda} M. \tag{2.10}$$

Легко видеть, что преобразование Бохнера функции $K_n + \int_0^\mu \rho_n(\nu)\, d\nu$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ линейно. Пусть μ есть точка непрерывности функции $\sigma(\mu)$. Переходя в равенстве (2.9) к пределу, полагая $n \to \infty$, мы получим, используя лемму 1.1:

$$K + \sigma(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a)\, d\sigma(\mu + a),$$

где

$$K = \lim_{n \to \infty} K_n - \frac{1}{2}\{\sigma(+0) + \sigma(-0)\}.$$

Переходя в неравенстве (2.10) к пределу, мы получим

$$|K + \sigma(\mu)| \leqslant \frac{C}{\Lambda} \cdot M.$$

Легко видеть, что преобразование Бохнера функции $K + \sigma(\mu)$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ линейно. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Неравенство (2.3) можно итерировать.

Впрочем, начиная с $r = 1$, можно пользоваться неравенством Г. Бора, ибо функция $K + \sigma(\mu)$ ограничена.

Замечание 2. Если можно подобрать постоянную величину C_1 так, что функция $C_1 + \sigma(\mu)$ нечетна, то преобразование Бохнера для функции $C_1 + \sigma(\mu)$ (Бохнера, а не Бохнера-Стильтьеса!) в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ линейно.

В самом деле, допустим сначала, что

$$\sigma'(\mu) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cos \lambda_k \mu; \quad |\lambda_k| \geqslant \Lambda.$$

В этом случае

$$\int_0^\mu \sigma'(\mu)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{\sin \lambda_k \mu}{\lambda_k} = \sigma(\mu) - \sigma(0).$$

Так как тригонометрический многочлен $\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{\sin \lambda_k \mu}{\lambda_k}$ не имеет свободного члена, то преобразование Бохнера для функции $\sigma(\mu) - \sigma(0)$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ линейно.

Легко видеть, что функция $\sigma(\mu) - \sigma(0)$ нечетна.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть

$$\rho_n(\mu) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 na}{n^3 a^4} \, d\sigma(\mu + a).$$

Легко видеть, что если функция $\sigma(\mu)$ нечетна, то функция $\rho_n(\mu)$ четна. Поэтому тригонометрические многочлены $S_{n,N}(\mu)$ (см. доказательство предыдущей теоремы) также четны и, значит, ввиду того что $\lim_{N\to\infty} S_{n,N}(\mu) = \rho_n(\mu)$, преобразование Бохнера для функции $\int_0^\mu \rho_n(\nu)\, d\nu$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ линейно. В силу леммы 1.1, в каждой точке непрерывности функции $\sigma(\mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\mu \rho_n(\nu)\, d\nu = \sigma(\mu) - \frac{1}{2}\{\sigma(+0) + \sigma(-0)\} = \sigma(\mu) + C_1.$$

Функция $\sigma(\mu) + C_1$ нечетна и ее преобразование Бохнера в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ линейно.

§ 3. Доказательство теоремы, аналогичной теореме С. Н. Бернштейна

В настоящем параграфе мы рассмотрим теорему, на основе которой сможем получить асимптотические формулы (0.4), (0.5) и (0.6).

Пусть функция $\sigma(\mu)$ удовлетворяет условию (2.2). Примем следующие обозначения. Через $\sigma^{-[0]}(\mu)$ будем обозначать функцию $\sigma(\mu) + C_0$, где C_0 — произвольная постоянная. Через $\sigma^{-[1]}(\mu)$ будем обозначать неопределенный интеграл для функции $\sigma^{-[0]}(\mu)$, т. е. функцию

$$\int_0^\mu \sigma(\nu)\, d\nu + C_0\mu + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, и т. д. Очевидно, что функция $\sigma^{-[r]}(\mu)$ определена с точностью до многочлена r-й степени. Из известной леммы Эсклангона [см. ([13]), стр. 213] следует, что если функция $\sigma(\mu)$ ограничена и среди функций $\sigma^{-[r]}(\mu)$ $(r > 1)$ имеется ограниченная (обозначим ее через $\sigma_0^{-[r]}(\mu)$), то функции

$$\left[\sigma_0^{-[r]}(\mu)\right]' = \sigma_0^{-[r-1]}(\mu), \; \ldots, \; \left[\sigma_0^{-[2]}(\mu)\right]' = \sigma_0^{-[1]}(\mu)$$

также ограничены.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть функция* $\sigma(\mu)$ *удовлетворяет условию* (2.2). *Допустим, что для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать функцию* $\sigma_\varepsilon(\mu)$, *преобразование Бохнера-Стильтьеса для которой в интервале* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *линейно и которая удовлетворяет неравенству:*

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu) - \sigma_\varepsilon(\mu)\} < K \cdot \varepsilon^{r+1-\alpha}, \tag{3.1}$$

причем постоянные $K>0$, $0<\alpha<1$, $r\geqslant 0$ *(целое) от* ε *не зависят. При этих предположениях среди функций* $\sigma^{-[r-1]}(\mu)$ *найдется ограниченная функция* $\sigma_0^{-[r-1]}(\mu)$, *удовлетворяющая неравенству*

$$\left|\int_0^\mu \sigma_0^{-[r-1]}(\nu+a)\,d\nu\right|\leqslant A+B\,|\mu|^\alpha, \tag{3.2}$$

причем постоянные величины A *и* B *от* μ *и* a *не зависят. При* $\alpha=0$ *справедлива оценка* *

$$\left|\int_0^\mu \sigma_0^{-[r-1]}(\nu+a)\,d\nu\right|\leqslant A+B\ln|\mu|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}\quad (k=0,1,2,\ldots),\quad \sigma_k(\mu)=\sigma_{\varepsilon_k}(\mu),$$

$$\tau_k(\mu)=\sigma_k(\mu)-\sigma_{k-1}(\mu),\qquad \tau_0(\mu)=\sigma_0(\mu)$$

и рассмотрим бесконечный ряд

$$\sigma_0(\mu)+\{\sigma_1(\mu)-\sigma_0(\mu)\}+\cdots=\tau_0(\mu)+\tau_1(\mu)+\cdots=\lim_{k\to\infty}\sigma_k(\mu). \tag{3.4}$$

Легко видеть, что в каждой точке непрерывности функции $\sigma(\mu)$ ряд (3.4) сходится к $\sigma(\mu)+C$.

Рассмотрим функцию

$$\tau_k(\mu)=\sigma_k(\mu)-\sigma_{k-1}(\mu).$$

Ее преобразование Бохнера-Стильтьеса в интервале $\left(-\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^k}\right)$ линейно. Так как

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\tau_k(\mu)\}\leqslant \sup_{-\infty<\mu<\infty}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\sigma(\mu)-\sigma_k(\mu)\}+$$

$$+\sup_{-\infty<\mu<\infty}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\sigma(\mu)-\sigma_{k-1}\{\mu)\}\leqslant\frac{K}{2^{k(r+1-\alpha)}}+\frac{K}{2^{(k-1)(r+1-\alpha)}}=\frac{K_1}{2^{k(r+1-\alpha)}},$$

то, на основании неравенства (2.3),

$$|\tau_k^{-[r-1]}(\mu)|\leqslant\frac{K_2}{2^{k(1-\alpha)}}. \tag{3.5}$$

---

* При $r=0$ полагаем, по определению,

$$\int_0^\mu \sigma_0^{-[0]}(\nu)\,d\nu=\sigma(\mu)+C,$$

и, следовательно, имеют место оценки:

$$|\sigma(\mu+a)-\sigma(a)|\leqslant A+B(\mu)^\alpha,$$

$$|\sigma(\mu+a)-\sigma(a)|\leqslant A+B\ln|\mu|.$$

Поэтому ряд

$$\tau_0^{-[r-1]}(\mu)+\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k^{-[r-1]}(\mu)=g(\mu) \tag{3.6}$$

сходится абсолютно и равномерно. Покажем, что

$$g(\mu)=\sigma_0^{-[r-1]}(\mu).$$

В самом деле, если ряд для $g(\mu)$ продифференцировать $(r-1)$ раз, то мы получим равномерно сходящийся ряд (3.4), сумма которого почти всюду равна $\sigma(\mu)+C$. Оценим

$$\int_0^{\mu}\sigma_0^{-[r-1]}(\nu+a)\,d\nu.$$

Выберем произвольное действительное число μ_0 и определим целое положительное число m из условия

$$2^{m-1}\leqslant\mu_0<2^m.$$

Далее, положим

$$\int_0^{\mu_0}g(\nu+a)\,d\nu=\int_0^{\mu_0}\tau_0^{-[r-1]}(\nu+a)\,d\nu+\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\mu_0}\tau_k^{-[r-1]}(\nu+a)\,d\nu+$$
$$+\sum_{k=m}^{\infty}\int_0^{\mu_0}\tau_k^{-[r-1]}(\nu+a)\,d\nu=P(\mu_0,a)+Q(\mu_0,a)+R(\mu_0,a).$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. Имеем, в силу неравенства (3.5),

$$R(\mu_0,a)\leqslant K_2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}\left|\int_0^{\mu_0}d\nu\right|=K_2|\mu_0|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}\leqslant$$
$$\leqslant K_3|\mu_0|\frac{1}{2^{m(1-\alpha)}}\leqslant K_4|\mu_0|\cdot|\mu_0|^{\alpha-1}=K_4|\mu_0|^{\alpha}. \tag{3.7}$$

Для оценки $Q(\mu_0,a)$ снова используем неравенство (2.3). Имеем:

$$\left|C_k^{(r)}+\int_0^{\mu}\tau_k^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu\right|\leqslant CK_2 2^{k\alpha}=K_5 2^{k\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^{\mu_0}\tau_k^{-[r-1]}(\nu+a)\,d\nu\right|\leqslant\left|C_k^{(r)}+\int_0^{\mu_0+a}\tau_k^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu\right|+$$
$$+\left|C_k^{(r)}+\int_0^{a}\tau_k^{-[r-1]}(\nu)\,d\nu\right|\leqslant 2K_5 2^{k\alpha}.$$

Поэтому

$$|Q(\mu_0, a)| \leqslant 2K_5 \sum_{k=1}^{m-1} 2^{k\alpha} \leqslant K_6 2^{(m-1)\alpha} \leqslant K_6 |\mu_0|^\alpha. \tag{3.8}$$

Остается оценить $P(\mu_0, a)$. Так как

$$\tau_0(\mu) = \sigma_0(\mu) = \sigma(\mu) - \{\sigma(\mu) - \sigma_0(\mu)\},$$

то

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\tau_0(\mu)\} \leqslant \sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu)\} +$$
$$+ \sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu) - \sigma_0(\mu)\} \leqslant M + K = M_1. \tag{3.9}$$

Так как преобразование Бохнера функции $\sigma_0(\mu)$ линейно в интервале $(-1, 1)$, то, на основании неравенства (2.3) и оценки (3.9),

$$|P(\mu_0, a)| \leqslant \left| \int_0^{\mu_0} \tau_0^{-[r-1]}(\nu + a)\, d\nu \right| \leqslant A, \tag{3.10}$$

причем постоянная величина A от μ_0 и a не зависит. Сопоставляя неравенства (3.7), (3.8) и (3.10), мы получаем неравенство (3.2).

При $\alpha = 0$ оценки для $P(\mu_0, a)$ и $R(\mu_0, a)$ остаются в силе. Для $Q(\mu_0, a)$ получаем другую оценку:

$$|Q(\mu_0, a)| \leqslant 2K_5 \sum_{k=1}^{m-1} 2^0 = 2K_5(m-1) \leqslant K_7 \ln |\mu_0|.$$

Поэтому в случае $\alpha = 0$ имеет место оценка (3.3).

Замечание 1. При $r = 0$ $g(\mu)$ есть сумма ряда (3.4).

Замечание 2. Теорема 3.1 аналогична обратной теореме теории аппроксимации (теореме С. Н. Бернштейна). Нетрудно также получить в нашем случае теорему, аналогичную прямой теореме теории аппроксимации (теореме Джексона). Мы на прямой теореме не останавливались, так как она нам не потребуется.

Используя один прием, предложенный А. Зигмундом ([11]) для уточнения теоремы С. Н. Бернштейна, можно в случае $\alpha = 0$, наряду с оценкой (2.3), получить для функции $\sigma_0^{-[r-1]}(\mu)$ еще одну оценку.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, *причем* $\alpha = 0$. *Тогда среди функций* $\sigma^{-[r]}(\mu)$ *найдется функция* $\sigma_0^{-[r]}(\mu)$, *удовлетворяющая оценке* *

$$\left| \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} \frac{1}{2} \{\sigma_0^{-[r]}(a+\nu) - \sigma_0^{-[r]}(a-\nu)\}\, d\nu \right| \leqslant K, \tag{3.11}$$

причем постоянная величина K *от* μ *и* a *не зависит.*

---

* При $r = 0$ $\sigma_0^{-[0]}(\mu) = \sigma(\mu) + C$. Поэтому оценка (3.11) принимает вид:

$$\left| \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} \frac{1}{2} \{\sigma(a+\nu) - \sigma(a-\nu)\}\, d\nu \right| \leqslant K.$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $r>0$. Пусть a и μ_0 обозначают то же самое, что и прежде. Из равенства (3.6) следует:

$$\frac{1}{2}\{g(a+\nu)+g(a-\nu)\}=\frac{1}{2}\{\tau_0^{-[r-1]}(a+\nu)+\tau_0^{-[r-1]}(a-\nu)\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{\tau_k^{-[r-1]}(a+\nu)+\tau_k^{-[r-1]}(a-\nu)\}=\omega_0(a,\nu)+\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(a,\nu).$$

При фиксированном a функции $\omega_k(a,\nu)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ четны. Поэтому (см. замечание 2 в конце предыдущего параграфа) преобразования Бохнера для функций

$$\omega_k^{-[1]}(a,\mu)=\int_0^{\mu}\omega_k(a,\nu)\,d\nu$$

в окрестности нуля линейны *. Далее, выберем постоянные $C_k(a)$ так, чтобы преобразования Бохнера для функций

$$C_k(a)+\int_0^{\mu}\omega_k^{-[1]}(a,\nu)\,d\nu=\omega_k^{-[2]}(a,\nu)$$

в окрестности нуля были линейны. Пользуясь неравенством (2.3) и оценкой (3.5), мы получим:

$$|\omega_k^{-[2]}(a,\mu)|\leqslant C\cdot K_2 2^k=K_7.2^k.$$

Поэтому, рассуждая как прежде, получим

$$\left|\int_0^{\mu}d\mu\int_0^{\mu}\omega_k(a,\nu)\,d\nu\right|\leqslant 2K_7.2^k. \qquad (3.11')$$

Положим, далее,

$$\int_0^{\mu_0}d\mu\int_0^{\mu}\frac{1}{2}\{g(a+\nu)+g(a-\nu)\}\,d\nu=\int_0^{\mu_0}d\mu\int_0^{\mu}\omega_0(a,\nu)\,d\nu+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\int_0^{\mu_0}d\mu\int_0^{\mu}\omega_k(a,\nu)\,d\nu+\sum_{k=m}^{\infty}\int_0^{\mu_0}d\mu\int_0^{\mu}\omega_k(a,\nu)\,d\nu=P(a,\mu_0)+Q(a,\mu_0)+R(a,\mu_0)$$

В силу оценки (3.11'),

$$|P(a,\mu_0)|\leqslant 2K_7=A_1,$$

$$|Q(a,\mu_0)|\leqslant 2K_7\sum_{k=1}^{m-1}\cdot 2^k\leqslant K_8 2^m\leqslant K_8|\mu_0|. \qquad (3.12)$$

* Если преобразование Бохнера для функций $f(\mu)$ в окрестности нуля линейно, то оно также линейно при любом постоянном a и для функции $f(\mu+a)$. Для тригонометрического многочлена это утверждение очевидно. В общем случае аппроксимируем функцию многочленом.

Наконец, в силу оценки (3.5),

$$|R(a, \mu_0)| \leqslant K_8 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_0^{|\mu_0|} d\mu \int^{|\mu|} d\nu \leqslant$$

$$\leqslant K_9 |\mu_0|^2 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant K_{10} |\mu_0|. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следует оценка:

$$\left| \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} d\nu \int_0^{\nu} \frac{1}{2} \{g(a+\nu_1) + g(a-\nu_1)\} \, d\nu_1 \right| \leqslant K, \tag{3.14}$$

причем постоянная величина K от a и μ не зависит.

Пусть

$$g(\mu) = \sigma_0^{-[r-1]}(\mu) \text{ и } \sigma_0^{-[r]} = \int_0^{\mu} \sigma_0^{-[r-1]}(\nu) \, d\nu.$$

Тогда

$$\int_0^{\nu} \frac{1}{2} \{g(a+\nu) + g(a-\nu)\} \, d\nu = \frac{1}{2} \left\{ \int_a^{a+\nu} g(\nu) \, d\nu - \int_a^{a-\nu} g(\nu) \, d\nu \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \{\sigma_0^{-[r]}(a+\nu) - \sigma_0^{-[r]}(a-\nu)\}.$$

Поэтому неравенство (3.14) эквивалентно неравенству (3.11).

Пусть теперь $r = 0$ и $\alpha = 0$. Неравенство (3.1), следовательно, имеет вид

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}} \{\sigma(\mu) - \sigma_\varepsilon(\mu)\} < K.\varepsilon. \tag{3.15}$$

Выберем произвольное положительное число n и положим

$$\rho_n(\mu) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 na}{n^3 a^4} \, d\sigma(\mu + a),$$

$$\rho_{n,\varepsilon}(\mu) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 na}{n^3 a^4} \, d\sigma_\varepsilon(\mu + a).$$

Из леммы 1.2 следует, что преобразование Бохнера для функции $\rho_{n,\varepsilon}(\mu)$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ линейно, а из леммы 1.1 следует, что неравенство (3.15) влечет неравенство

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} \int_{\mu}^{\mu+1} |\rho_n(\nu) - \rho_{n,\varepsilon}(\nu)| \, d\nu < K.\varepsilon.$$

Положим

$$\rho_n(\mu) = \rho_{n,0}(\mu) + \{\rho_{n,1}(\mu) - \rho_{n,0}(\mu)\} + \cdots = \lim_{k\to\infty} \rho_{n,k}(\mu),$$

где

$$\rho_{n,k}(\mu) = \rho_{n,\varepsilon_k}(\mu), \quad \varepsilon_k = \frac{1}{2^k}.$$

Так же как и прежде, можно показать, что

$$\left| \frac{1}{\mu} \int_0^\mu d\nu \int_0^\nu \frac{1}{2} \{\rho_n(a+\nu_1) + \rho_n(a-\nu_1)\}\, d\nu_1 \right| \leqslant K, \tag{3.16}$$

где постоянная величина K от μ и a не зависит. В силу леммы 1.1,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\nu \frac{1}{2} \{\rho_n(a+\nu_1) + \rho_n(a-\nu_1)\}\, d\nu_1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{a+\nu} \rho_n(\nu_1)\, d\nu_1 - \int_0^{a-\nu} \rho_n(\nu_1)\, d\nu_1 \right\} = \frac{1}{2} \{\sigma(a+\nu) - \sigma(a-\nu)\}.$$

Поэтому, переходя в неравенстве (3.16) к пределу, полагая $n\to\infty$, мы получим

$$\left| \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{1}{2} \{\sigma(a+\nu) - \sigma(a-\nu)\}\, d\nu \right| \leqslant K,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Некоторые вспомогательные оценки для спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка

1. Рассмотрим в интервале $(0, b)$, $0 \leqslant b \leqslant \infty$, дифференциальное уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \tag{4.1}$$

в котором $q(x)$ — действительная функция, суммируемая в каждом конечном интервале $(0, b' < b)$. Обозначим через h произвольное действительное число и через $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h. \tag{4.2}$$

Число h может также равняться бесконечности. В этом случае под $\varphi(x, \lambda)$ мы будем понимать решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = \sqrt{\lambda}. \tag{4.2'}$$

Мы рассмотрим подробно случай $h \neq \infty$. Изменения, которые следует внести в наши рассуждения в случае $h = \infty$, будут нами кратко указаны в конце статьи.

Как известно ([1]), при данном h существует по крайней мере одна монотонная, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$, такая, что для каждой функции $f(x) \in L_2(0, b)$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_0^b f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(\lambda)\,d\rho(\lambda), \quad E(\lambda) = \underset{b' \to b}{\text{l.i.m.}} \int_0^{b'} f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx.$$

Функцию $\rho(\lambda)$ мы будем называть в дальнейшем спектральной функцией уравнения (4.1). Для вывода асимптотических формул, указанных во введении, нам понадобятся некоторые предварительные оценки для спектральной функции $\rho(\lambda)$. Эти оценки будут получены в настоящем параграфе.

ЛЕММА 4.1. [В. А. Марченко ([5]), ([6])]. *При каждом фиксированном положительном* $x_0 < 2b$

$$\int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\,x_0\,d\rho(\lambda) < \infty.$$

Доказательство*. Как известно ([12]), можно указать такую непрерывную функцию $K(t, s)$, $s \leqslant t < b$, что

$$\cos\sqrt{\lambda}\,t = \varphi(t, \lambda) + \int_0^t K(x, t)\,\varphi(s, \lambda)\,ds. \tag{4.3}$$

Интегрируя обе части равенства (4.3) по t в пределах $(0, x_0)$ и меняя порядок интегрирования, мы получим:

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x_0}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^{x_0} \varphi(t, \lambda)\,dt + \int_0^{x_0} dt \int_0^t K(t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds =$$

$$= \int_0^{x_0} \left\{1 + \int_t^{x_0} K(s, t)\,ds\right\} \varphi(t, \lambda)\,dt = \int_0^{x_0} H(x_0, t)\,\varphi(t, \lambda)\,dt.$$

Из этой формулы следует, что функция $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x_0}{\sqrt{\lambda}}$ есть преобразование Фурье (по собственным функциям $\varphi(t, \lambda)$) для функции, равной $H(x_0, t)$ при $t < x_0$, и равной нулю при $t > x_0$. Применяя равенство Парсеваля, мы получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x_0}{\sqrt{\lambda}}\right\}^2 d\rho(\lambda) = \int_0^{x_0} H^2(x_0, t)\,dt.$$

Из этого равенства лемма В. А. Марченко следует непосредственно

2. Обозначим через ε произвольное положительное число $< \frac{b}{2}$ и че-

* Мы приводим здесь доказательство, отличное от доказательства В. А. Марченко

рез a — произвольное действительное число. Рассмотрим функцию

$$g_\varepsilon(t;\ a)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon^2}(2\varepsilon-t)\cos at, & 0\leqslant t\leqslant 2\varepsilon,\\ 0, & 2\varepsilon\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

Умножим обе части формулы (4.3) на $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до b. Мы получим, изменив порядок интегрирования:

$$\psi_\varepsilon(\lambda,\ a)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\varepsilon}(2\varepsilon-t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\cdot\cos at\,dt=$$

$$=\int_0^{2\varepsilon}g_\varepsilon(t;\ a)\,\varphi(t,\ \lambda)\,dt+\int_0^{2\varepsilon}g_\varepsilon(t,\ a)\,dt\int_0^t K(t,\ s)\,\varphi(s,\ \lambda)\,ds=$$

$$=\int_0^{2\varepsilon}\left\{g_\varepsilon(s,\ a)+\int_s^{2\varepsilon}K(t,\ s)\,g_\varepsilon(t,\ a)\,dt\right\}\varphi(s,\ \lambda)\,ds. \tag{4.4}$$

При помощи интегрирования по частям легко найти, что

$$\psi_\varepsilon(\lambda,\ a)=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^{2\varepsilon}(2\varepsilon-t)\cos(\sqrt{\lambda}+a)\,t\,dt+\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^{2\varepsilon}(2\varepsilon-t)\cos(\sqrt{\lambda}-a)\,t\,dt=$$

$$=\left\{\frac{\sin\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)}{\varepsilon(\sqrt{\lambda}+a)}\right\}^2+\left\{\frac{\sin\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)}{\varepsilon(\sqrt{\lambda}-a)}\right\}^2.$$

Формула (4.4) показывает, что $\psi_\varepsilon(\lambda,\ a)$ есть преобразование Фурье функции

$$g_\varepsilon(s,\ a)+\int_s^{2\varepsilon}K(t,\ s)\,g_\varepsilon(t,\ a)\,dt.$$

Поэтому из равенства Парсеваля следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon^2(\lambda,\ a)\,d\rho(\lambda)=\int_0^{2\varepsilon}\left\{g_\varepsilon(s,\ a)+\int_0^{2\varepsilon}K(t,\ s)\,g_\varepsilon(t,\ a)\,dt\right\}^2ds. \tag{4.5}$$

Из представления функции $\psi_\varepsilon(\lambda,\ a)$ в виде определенного интеграла легко следует, что для $\lambda<0$ равномерно по a (a — действительное число)

$$|\psi_\varepsilon(\lambda,\ a)|\leqslant\cosh\sqrt{|\lambda|}\cdot 2\varepsilon.$$

Поэтому из леммы 4.1 получаем, что при $\varepsilon\to 0$ равномерно по a

$$\int_{-\infty}^{0}\psi_\varepsilon^2(\lambda,\ a)\,d\rho(\lambda)=O(1).$$

Таким образом, из формулы (4.5) следует:

$$\int_0^{\infty}\psi_\varepsilon^2(\lambda,\ a)\,d\rho(\lambda)=\int_0^{2\varepsilon}g_\varepsilon^2(s,\ a)\,ds+2\int_0^{2\varepsilon}g_\varepsilon(s,\ a)\,ds\int_s^{2\varepsilon}K(t,\ s)\,g_\varepsilon(t,\ a)\,dt+$$

$$+\int_0^{2\varepsilon}ds\left\{\int_s^{2\varepsilon}K(t,\ s)\,g_\varepsilon(t,\ a)\,dt\right\}^2+O(1). \tag{4.6}$$

Оценим второй и третий члены справа в формуле (4.6). Вначале рассмотрим второй член. Меняя порядок интегрирования, мы получим:

$$\int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon(s, a)\, ds \int_t^{2\varepsilon} K(t, s)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt = \int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\, dt \int_0^t K(t, s)\, g_\varepsilon(s, a)\, ds. \quad (4.7)$$

Оценим интеграл $\int_0^t K(t, s)\, ds$ при $t \to 0$.

Наряду с формулой (4.3) справедлива формула:

$$\varphi(t, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, t - \int_0^t K_1(t, s) \cos\sqrt{\lambda}\, s\, ds. \quad (4.3')$$

Обращая формулу (4.3'), мы получим формулу (4.3). Поэтому

$$K(t, s) = K_1(t, s) + \int_0^s K_1(t, r)\, K_1(r, s)\, dr + \cdots. \quad (4.8)$$

Из представления для $K_1(t, s)$, полученного В. А. Марченко ([5]), непосредственно следует, что при* $t \to 0$

$$|K_1(t, s)| = |h| + O\left(\int_0^t |q(s)|\, ds\right). \quad (4.9)$$

Поэтому из формулы (4.8) следует, что при $t \to 0$

$$\int_0^t |K(t, s)|\, ds = |h| \cdot t + O\left(t \int_0^t |q(s)|\, ds\right). \quad (4.10)$$

Пользуясь тем, что $|g_\varepsilon(t, a)| = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ равномерно по a, мы получим, в силу оценки (4.10) и формулы (4.7):

$$\left|\int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon(s, a)\, ds \int_t^{2\varepsilon} K(t, s)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt\right| = \left|\int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\, dt \int_0^t K(t, s)\, g_\varepsilon(s, a)\, ds\right| =$$

$$= O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\varepsilon} dt \int_0^t |K(t, s)|\, ds\right) = O\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\varepsilon} dt \left(|h|\, t + O\left(t \int_0^t |q(s)|\, ds\right)\right)\right\} =$$

$$= O(|h|) + O\left(\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\, ds\right).$$

Оценим третий член в формуле (4.6). Так как

$$\int_s^{2\varepsilon} K(t, s)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt = O(1),$$

* Формулу (4.9) можно также получить, рассматривая уравнение в частных производных для $K_1(t, s)$, указанное в ([12]) или в ([4]).

то при $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^{2\varepsilon} ds \left\{ \int_s^{2\varepsilon} K(t, s)\, g_\varepsilon(t, a)\, dt \right\}^2 = O\left(\int_0^{2\varepsilon} ds \int_s^{2\varepsilon} |K(t, s)|\, |g_\varepsilon(t, a)|\, dt \right) =$$

$$= O\left(\int_0^{2\varepsilon} |g_\varepsilon(t, a)|\, dt \int_0^t |K(t, s)|\, ds \right) = O\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\varepsilon} dt \left(|h| \cdot t + O\left(t \int_0^t q(s)\, ds \right) \right) \right\} =$$

$$= O(\varepsilon |h|) + O\left(\varepsilon \int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\, ds \right) = o(h) + o\left(\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\, ds \right).$$

Поэтому из формулы (4.6) следует:

$$\int_0^{\infty} \psi_\varepsilon^2(\lambda, a)\, d\rho(\lambda) = \int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^2(s, a)\, ds + O(|h|) + O\left(\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\, ds \right) + O(1). \quad (4.11)$$

Если отрицательный спектр отсутствует, то в формуле (4.11) члена $O(1)$ не будет.

Положим (для $\lambda > 0$) $\lambda = \mu^2$, $\rho(\lambda) = \rho(\mu^2) = \sigma(\mu)$ и продолжим функцию $\sigma(\mu)$ на отрицательные μ по нечетному закону. Формулу (4.11) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon^2(\mu^2, a)\, d\sigma(\mu) = \int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^2(s, a)\, ds + O(|h|) + O\left(\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\, ds \right) + O(1). \quad (4.11')$$

Из формулы (4.11') непосредственно следует важная лемма В. А. Марченко ([5]):

ЛЕММА 4.2. *Существует не зависящая от a постоянная C такая, что*

$$|\sigma(a+1) - \sigma(a)| < C. \quad (!)$$

Доказательство. Положим в формуле (4.11') $\varepsilon = \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \min\left(1, \frac{b}{2}\right)$. Из монотонности функции $\sigma(\mu)$ следует:

$$\int_a^{a+1} \left\{ \frac{\sin \varepsilon_0 (\mu - a)}{\varepsilon_0 (\mu - a)} \right\}^4 d\sigma(\mu) = \int_0^1 \left(\frac{\sin \varepsilon_0 \mu}{\varepsilon_0 \mu} \right)^4 < C_1.$$

Так как для $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ $\frac{\sin \nu}{\nu} > \frac{2}{\pi}$, то из предыдущей оценки получаем:

$$\frac{16}{\pi^4} \int_0^1 d\sigma(\mu + a) < C_1,$$

откуда оценка (!) следует непосредственно.

3. Рассмотрим при фиксированных ε и a функцию

$$\psi_\varepsilon^*(\mu, a) = \frac{\sin \varepsilon (\mu + a)}{\varepsilon (\mu + a)} \cdot \frac{\sin \varepsilon (\mu - a)}{\varepsilon (\mu - a)}.$$

Функция $\psi_\varepsilon^*(\mu, a)$ четна. Рассмотрим преобразование Фурье этой функции:

$$g_\varepsilon^*(t, a) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi_\varepsilon^*(t, a)\cos\mu t\,dt.$$

Функцию $g_\varepsilon^*(t, a)$ можно вычислить. Однако ее явный вид нам в дальнейшем не понадобится. Для нас важно, что функция $g_\varepsilon^*(t, a)$ обладает следующими двумя свойствами:

1) $g_\varepsilon^*(t, a)$ обращается в нуль вне интервала $(0, 2\varepsilon)$ $(t \geqslant 0)$;

2) $g_\varepsilon^*(t, a) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ равномерно по a.

Первое свойство следует из того, что при фиксированных ε и a $\psi_\varepsilon^*(t, a)$ есть четная целая функция экспоненциального типа степени 2ε и, значит, в силу классической теоремы Винера-Палея, ее косинус-преобразование Фурье равно нулю вне интервала $(0, 2\varepsilon)$.

Второе свойство функции $g_\varepsilon^*(t, a)$ следует из оценки

$$|g_\varepsilon^*(t, a)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |\psi_\varepsilon^*(\mu^2, a)|\,d\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty |\psi_\varepsilon^*(\mu^2, a)|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\right]^2 d\mu\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu-a)}{\varepsilon(\mu-a)}\right]^2 d\mu\right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu^2}\,d\mu = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Пользуясь указанными свойствами функции $g_\varepsilon^*(t, a)$, можно получить оценку, аналогичную оценке (4.11′):

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \psi_\varepsilon^{*2}(\mu^2, a)\,d\sigma(\mu) = \int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^*(s, a)\,ds + O(|h|) + O\left(\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\,ds\right) + O(1). \quad (4.11'')$$

Вычитая из равенства (4.11′) удвоенное равенство (4.11″), мы получим:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \left\{\left[\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\right]^4 + \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu-a)}{\varepsilon(\mu-a)}\right]^4\right\} d\sigma(\mu) = \int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^{*}(s, a)\,ds -$$

$$-2\int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^{*2}(s, a)\,ds + O(h) + O\left(\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\,ds\right) + O(1). \quad (4.11''')$$

В силу равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье,

$$\int_0^{2\varepsilon} g^2(s, a)\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\left[\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\right]^2 + \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu-a)}{\varepsilon(\mu-a)}\right]^2\right\}^2 d\mu,$$

$$\int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^{*2}(s, a)\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\,\frac{\sin\varepsilon(\mu-a)}{\varepsilon(\mu-a)}\right\}^2 d\mu.$$

Поэтому

$$\int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^2(s,a)\,ds - 2\int_0^{2\varepsilon} g_\varepsilon^*(s,a)\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\left[\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\right]^4 + \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu-a)}{\varepsilon(\mu-a)}\right]^4\right\} d\mu =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\right]^4 d\mu + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^0 \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\right]^4 d\mu = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu+a)}{\varepsilon(\mu+a)}\right]^4 d\mu =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu}\right)^4 d\mu = \frac{2}{\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4\mu}{\mu^4}\,d\mu = \frac{2}{\pi.\varepsilon}\cdot\frac{2\pi}{3}.$$

Следовательно, из равенства (4.11‴) следует оценка (принимая во внимание нечетность функции $\sigma(\mu)$):

$$\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\sin\varepsilon(\mu-a)}{\varepsilon(\mu-a)}\right]^4 d\sigma(\mu) = \frac{2}{\pi\cdot\varepsilon}\frac{2\pi}{3} + O(h) + O\left(\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\,ds\right) + O(1).$$

Помножив обе части последнего равенства на ε и разделив на $\frac{2\pi}{3}$, мы получим:

$$\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4\varepsilon\mu}{\varepsilon^3\mu^4}\,d\sigma(\mu+a) = \frac{2}{\pi} + O(\varepsilon|h|) + O\left(\varepsilon\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\,ds\right) + O(\varepsilon),$$

или, так как

$$\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4\varepsilon\mu}{\varepsilon^3\mu^4}\,d\mu = 1,$$

$$\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4\varepsilon\mu}{\varepsilon^3\mu^4}\,d\left\{\sigma(\mu+a) - \frac{2}{\pi}(\mu+a)\right\} =$$

$$= O(\varepsilon h) + O\left(\varepsilon\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\,ds\right) + O(\varepsilon). \qquad (4.12)$$

Если отрицательный спектр отсутствует и $h=0$, то из оценки (4.12) следует:

$$\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^4\varepsilon\mu}{\varepsilon^3\mu^4}\,d\left\{\sigma(\mu+a) - \frac{2}{\pi}(\mu+a)\right\} = O\left(\varepsilon\int_0^{2\varepsilon} |q(s)|\,ds\right). \qquad (4.13)$$

Оценки (4.12) и (4.13) играют фундаментальную роль при выводе асимптотических формул для спектральной функции $\rho(\lambda)$. Из предыдущего следует, что эти оценки имеют место равномерно по a.

§ 5. Асимптотическое поведение спектральной функции $\rho(\lambda)$

1. В этом параграфе мы дадим вывод асимптотических формул для спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, указанных во введении.

Обозначим через ε произвольное положительное число и рассмотрим ядро Джексона

$$D(\alpha,\varepsilon)=\begin{cases}1-\dfrac{3}{8}\dfrac{\alpha^2}{\varepsilon^2}+\dfrac{3}{32}\dfrac{|\alpha|^3}{\varepsilon^3}, & \text{если } 0\leqslant|\alpha|\leqslant 2\varepsilon,\\ \dfrac{1}{32}\left(4-\dfrac{|\alpha|}{\varepsilon}\right)^3, & \text{если } 2\varepsilon\leqslant|\alpha|\leqslant 4\varepsilon,\\ 0, & \text{если } |\alpha|\geqslant 4\varepsilon.\end{cases}$$

Легко найти преобразование Фурье функции $D(\alpha,\varepsilon)$. Мы получим:

$$d(\mu,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}D(\alpha,\varepsilon)\,e^{-i\alpha\mu}\,d\alpha=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin^4\varepsilon\mu}{\varepsilon^3\mu^4}.$$

Далее, составим функцию

$$H(\alpha,\varepsilon)=\frac{4}{9}\left\{D(\alpha,\varepsilon)+8D(\alpha,2\varepsilon)-\frac{27}{4}D\left(\alpha,\frac{3}{2}\varepsilon\right)\right\}.$$

Пользуясь явным видом функции $D(\alpha,\varepsilon)$, легко показать, что функция $H(\alpha,\varepsilon)$ равна единице для $0\leqslant|\alpha|\leqslant 2\varepsilon$.

Пусть

$$h(\mu,\varepsilon)=\frac{4}{9}\left\{d(\mu,\varepsilon)+8\,d(\mu,2\varepsilon)-\frac{27}{4}d\left(\mu,\frac{3}{2}\varepsilon\right)\right\}.$$

В силу формулы обращения Фурье,

$$H(\alpha,\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(\mu,\varepsilon)\,e^{i\alpha\mu}\,d\mu.$$

Пусть функция $\tau(\mu)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\tau(\mu)\}<\infty. \tag{5.1}$$

Положим

$$\rho_\varepsilon(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(a,\varepsilon)\,d\tau(\mu+a),$$

$$\tau_\varepsilon(\mu)=\tau(\mu)-\int_0^{\mu}\rho_\varepsilon(\nu)\,d\nu.$$

В силу леммы 1.2, преобразование Бохнера-Стильтьеса для функции $\tau_\varepsilon(\mu)$ в интервале $(-2\varepsilon,\ 2\varepsilon)$ линейно.

Из леммы 4.2 следует, что функция $\tau(\mu)=\sigma(\mu)-\frac{2}{\pi}\mu$ удовлетворяет условию (5.1). Далее, из оценки (4.12) следует оценка:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\tau(\mu)-\tau_\varepsilon(\mu)\}=\sup_{-\infty<\mu<\infty}\int_{\mu}^{\mu+1}|\rho_\varepsilon(\nu)|\,d\nu\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{-\infty<\mu<\infty}|\rho_\varepsilon(\mu)|=O(\varepsilon|h|)+O\left(\varepsilon\int_0^{4\varepsilon}|q(s)|\,ds\right)+O(\varepsilon).$$

Поэтому к функции $\tau(\mu)=\sigma(\mu)-\frac{2}{\pi}\mu$ применимы теоремы 3.1 и 3.2 ($r=0$ и $\alpha=0$) и, следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 5.1. *При* $\mu\to\infty$ *равномерно по* a

$$\sigma(\mu+a)-\sigma(a)=\frac{2}{\pi}\mu+O(\ln|\mu|),$$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\mu\left\{\frac{1}{2}[\sigma(a+\nu)-\sigma(a-\nu)]-\frac{2}{\pi}\nu\right\}d\nu=O(1).$$

Последняя оценка, в силу нечетности $\sigma(\nu)$, совпадает с оценкой (0.5).

2. Если $h=0$, отрицательный спектр отсутствует и при $t\to 0$

$$\int_0^t|q(s)|\,ds=O(t^\alpha),$$

где $\alpha<0$, то из оценки (4.13) получим оценку $\left(\tau(\mu)=\sigma(\mu)-\frac{2}{\pi}\mu\right)$:

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{\tau(\mu)-\tau_\varepsilon(\mu)\}=O(\varepsilon^{1+\alpha}).$$

Поэтому, снова применяя теорему 4.1, получим следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 5.2. *Если отрицательный спектр отсутствует,* $h=0$ *и при* $t\to 0$

$$\int_0^t|q(s)|\,ds=O(t^\alpha),$$

где $\alpha>0$, *то при* $\mu\to\infty$ *равномерно по* a

$$\sigma(\mu+a)-\sigma(a)=\frac{2}{\pi}\mu+O(1).$$

3. Рассмотрим кратко случай $h=0$. Под $\varphi(x,\lambda)$ мы понимаем решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0,\lambda)=0,\quad \varphi'(0,\lambda)=\sqrt{\lambda}.$$

В этом случае следует использовать формулы:

$$\varphi(t,\lambda)=\sin\sqrt{\lambda}\,t+\int_0^t K(t,s)\sin\sqrt{\lambda}\,s\,ds,$$

$$\sin\sqrt{\lambda}\,t=\varphi(t,\lambda)-\int_0^t K_1(t,s)\,\varphi(s,\lambda)\,ds.$$

Далее следует повторить все предыдущие оценки, однако вместо функции

$$g_\varepsilon(t,a)=\frac{1}{\varepsilon^2}(2\varepsilon-t)\cos at$$

следует взять функцию

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(2\varepsilon - t)\sin at.$$

Окончательная оценка имеет вид:

$$\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4\varepsilon\mu}{\varepsilon^3\mu^4}\,d\left\{\sigma(\mu+a)-\frac{2}{\pi}(\mu+a)\right\}=O(\varepsilon)+O\left(\varepsilon\int_0^{4\varepsilon}|q(s)|\,ds\right).\quad(5.3)$$

Если отрицательный спектр отсутствует, то члена $O(\varepsilon)$ не будет.

Заметим еще, что в случае $h=\infty$ лемму 4.2 следует выводить из формулы (4.11‴).

Оценка (5.3) позволяет для этого случая получить теоремы 5.1 и 5.2.

Поступило
18. XII. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям, М. — Л., 1950.

[2] Titchmarsh E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford, 1946.

[3] Weyl H., Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann., 68 (1910), 220 — 269.

[4] Гельфанд И. М. и Левитан Б. М., Об определении уравнения по его спектральной функции, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 15 (1951), 309 — 360.

[5] Марченко В. А., Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Труды Моск. Матем. об-ва, т. 1 (1952), 327 — 420.

[6] Марченко В. А., О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка, Доклады Ак. Наук СССР, 74, № 4 (1950), 657—660.

[7] Левитан Б. М., К теореме разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Доклады Ак. Наук СССР, 71, № 4 (1950), 605—608.

[8] Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[9] Bohr H., Un théorème général sur l'intégration d'un polynôme trigonométrique, C. R., t. 200 (1935), 1276—1277.

[10] Левитан Б. М., Об одном обобщении неравенств С. Н. Бернштейна и H. Bohr'a, Доклады Ак. Наук СССР, 15, № 4 (1937), 169—172.

[11] Zygmund A., Smooth functions, Duke Math. Journ., v. 12 (1945), 47—76.

[12] Левитан Б. М., Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, Успехи матем. наук, т. 4, 1 (29) (1949), 3—112.

[13] Левитан Б. М., Некоторые вопросы теории почти периодических функций, II, Успехи матем. наук, т. 2, 6 (22) (1947), 174—214.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 353—364

Н. И. АХИЕЗЕР

О ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ, ИМЕЮЩИХ МАЙОРАНТУ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ТОЧЕК

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе доказываются две теоремы о зависимости роста целой функции конечной степени вдоль вещественной оси от ее роста вдоль некоторой бесконечной последовательности вещественных точек.

1. Отправным пунктом для настоящей заметки послужила следующая теорема М. Картрайт [1]: *если $f(z)$ есть целая трансцендентная функция степени $\sigma < \pi$, то из неравенств*

$$|f(\pm k)| \leqslant 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

вытекает, что

$$|f(x)| \leqslant C \quad (-\infty < x < \infty),$$

где C зависит только от σ.*

Наше обобщение этой теоремы имеет целью заменить ограниченность функций (на последовательности точек в условии теоремы и на всей вещественной оси в ее заключении) наличием у функций некоторых майорант. А именно, мы доказываем, что существование удовлетворяющей некоторым условиям майоранты для значений функции на некоторой последовательности узлов влечет существование определенной майоранты на всей оси.

Если оставить в стороне майоранты, являющиеся многочленами, а также один класс майорант, о котором мы ниже (см. п. 5) скажем и для которого теоремы интересующего нас типа легко получаются при помощи некоторых построений В. А. Марченко [3], то в указанном направлении нам известна лишь одна статья, принадлежащая Ш. Агмону [4]. Как по использованным в ней методам, так и по своим результатам, эта статья имеет мало общего с настоящей работой.

---

* Точное выражение коэффициента $C = C_\sigma$ при любом σ пока неизвестно. Но значение этого коэффициента для некоторых частных значений σ $\left(\text{а именно имеющих вид } \frac{\pi}{n} \text{ или } \pi\frac{n-1}{n}, \text{ где } n \text{ — натуральное число } \geqslant 2\right)$ и представляющее особый интерес асимптотическое значение C_σ при $\sigma \to \pi$ известны. Их нашел С. Н. Бернштейн [2]. Асимптотическая формула С. Н. Бернштейна имеет вид:

$$C_\sigma \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{\pi - \sigma} \quad (\sigma \to \pi).$$

2. Обозначим через $\omega(z)$ целую трансцендентную функцию нулевого рода, удовлетворяющую следующим условиям*:

a) все нули $\alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ функции $\omega(z)$ лежат в верхней полуплоскости и таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} < \infty;$$

b) на вещественной оси $(-\infty < x < \infty)$

$$|\omega(x)| \geqslant 1.$$

Возьмем какое-нибудь $p > 0$ и какое-нибудь вещественное λ и положим

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}\{\omega(z) e^{ipz+i\lambda} + \overline{\omega}(z) e^{-ipz-i\lambda}\},$$

где $\overline{\omega}(z)$ означает результат замены в степенном ряде для $\omega(z)$ всех коэффициентов комплексно сопряженными величинами.

При вещественном z эта функция вещественна и удовлетворяет неравенству

$$|\Omega(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Когда x пробегает вещественную ось от $-\infty$ до ∞, величина

$$\varphi(x) = \arg \omega(x) + px + \lambda$$

монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞, так как

$$\varphi'(x) = \operatorname{Im} \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(x-\alpha_k)^2 + \beta_k^2} + p \geqslant p. \tag{1}$$

Поэтому, определяя x_k из уравнения

$$\arg \omega(x_k) + px_k + \lambda = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots),$$

так что

$$\omega(x_k) e^{ipx_k+i\lambda} = (-1)^k i\,|\omega(x_k)|,$$

мы получаем все вещественные нули x_k функции $\Omega(z)$, расположенные в порядке роста. Эти нули являются простыми и притом единственными** нулями функции $\Omega(z)$.

Из формулы (1) вытекает, что***

$$\varphi'(x) \leqslant p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}.$$

---

* Предположение о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}$ впервые в родственных вопросах встречается у С. Н. Бернштейна [([5]), стр. 196] и делается для того, чтобы получить первую часть выводимого далее неравенства (2).

** Это есть частный случай более общего факта [см. ([6]), стр. 415].

*** Если $\omega(z)$ нулей не имеет (т. е. является константой), то величину $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}$ надлежит считать равной нулю.

А так как

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = \pi,$$

то, следовательно,

$$\frac{\pi}{p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j}} \leqslant x_{k+1} - x_k \leqslant \frac{\pi}{p}. \tag{2}$$

Заметим еще, что

$$\Omega'(x_k) = (-1)^{k-1} |\omega(x_k)| \varphi'(x_k) = (-1)^{k-1} p |\omega(x_k)| (1 + \varepsilon_k), \tag{3}$$

где $\varepsilon_k \geqslant 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $\pm k \to \infty$.

Возьмем положительное число h, удовлетворяющее неравенству

$$h < \frac{\pi}{6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k}},$$

и положим

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{4}, \operatorname{sh} ph\right\}.$$

Заставим точку x двигаться вправо от x_k к x_{k+1}. Мы найдем две точки x''_k, x'_{k+1} $(x_k < x''_k < x'_{k+1} < x_{k+1})$, для которых

$$\Omega(x''_k) = \Omega(x'_{k+1}) = (-1)^k \delta.$$

При этом в открытом интервале (x''_k, x'_{k+1}) будет иметь место неравенство

$$|\Omega(x)| > \delta.$$

Геометрическое место точек (линии уровня), для которых

$$|\Omega(z)| = \delta,$$

очевидно, состоит из последовательности непересекающихся кривых C_k, проходящих через точки x'_k, x''_k $(\pm k = 0, 1, 2, \dots)$. Все эти кривые лежат в полосе

$$-h \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant h,$$

так как, например, сверху от этой полосы

$$|\Omega(z)| \geqslant \frac{1}{2} |\overline{\omega}(z)| \left\{ e^{py} - \left| \frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)} \right| e^{-py} \right\} > \frac{1}{2} (e^{ph} - e^{-ph}) \geqslant \delta.$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемыми для верхней полуплоскости неравенствами

$$|\overline{\omega}(z)| \geqslant 1, \quad \left| \frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)} \right| \leqslant 1.$$

Таким образом, всюду в плоскости z вне кривых C_k имеет место неравенство

$$|\Omega(z)| > \delta. \tag{4}$$

Для дальнейшего существенно, что каждая кривая C_k будет лежать в параллельной мнимой оси полосе некоторой фиксированной ширины. Чтобы убедиться в этом, возьмем точки ξ_k, в которых

$$\Omega(\xi_k) = (-1)^k |\omega(\xi_k)|,$$

и покажем, что для всех k

$$|\Omega(\xi_k + i\eta)| > \delta,$$

если $-h \leqslant \eta \leqslant h$. Отсюда будет следовать, что кривая C_k лежит в полосе

$$\xi_{k-1} < \operatorname{Re} z < \xi_k,$$

ширина которой $\xi_k - \xi_{k-1}$ не превосходит $\frac{\pi}{p}$, что доказывается точно так же, как и вторая часть неравенства (2).

Примем для определенности, что $\eta > 0$. Тогда

$$\left|\frac{\Omega(\xi_k + i\eta)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)}\right| = \frac{1}{2} e^{p\eta} \left| 1 + \frac{\omega(\xi_k + i\eta)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)} e^{2ip(\xi_k + i\eta) + 2i\lambda} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} e^{p\eta} \left| 1 + \frac{\omega(\xi_k + i\eta)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)} \frac{\overline{\omega}(\xi_k)}{\omega(\xi_k)} e^{-2p\eta} \right|,$$

так как

$$\frac{\omega(\xi_k)}{\overline{\omega}(\xi_k)} e^{2ip\xi_k + 2i\lambda} = 1.$$

Займемся оценкой величины

$$\Phi = \arg \frac{\omega(\xi_k + i\eta)\,\overline{\omega}(\xi_k)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)\,\omega(\xi_k)}.$$

Так как

$$\frac{\omega(\xi_k + i\eta)\,\overline{\omega}(\xi_k)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)\,\omega(\xi_k)} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_j - \xi_k) + i(\beta_j - \eta)}{(\alpha_j - \xi_k) - i(\beta_j + \eta)} \frac{(\alpha_j - \xi_k) - i\beta_j}{(\alpha_j - \xi_k) + i\beta_j},$$

то

$$|\Phi| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left| \arg \frac{\alpha_j - \xi_k + i(\beta_j - \eta)}{\alpha_j - \xi_k - i(\beta_j + \eta)} - \arg \frac{\alpha_j - \xi_k + i\beta_j}{\alpha_j - \xi_k - i\beta_j} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j - \psi_j),$$

где углы φ_j, ψ_j представлены на рис. 1. Нетрудно усмотреть, что

$$\varphi_j - \psi_j = \lambda_j - \mu_j.$$

Далее, полагая

$$|\xi_k - \alpha_j| = l,$$

находим, что

$$\operatorname{tg}(\lambda_j - \mu_j) = \frac{2l\beta_j\eta^2}{(l^2 + \beta_j^2)^2 + (l^2 - \beta_j^2)\eta^2} \leqslant \frac{2l\beta_j\eta^2}{(l^2 + \beta_j^2)(l^2 + \beta_j^2 - \eta^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta^2}{l^2 + \beta_j^2 - \eta^2} \leqslant \frac{3\eta}{\beta_j}.$$

Поэтому

$$|\Phi| \leqslant 3\eta \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j} < \frac{\pi}{2},$$

а значит,

$$\left| \frac{\Omega(\xi_k + i\eta)}{\overline{\omega}(\xi_k + i\eta)} \right| \geqslant \frac{1}{2} e^{p\eta} (1 + R\cos\Phi) \geqslant \frac{1}{2} e^{ph} > \delta,$$

откуда

$$|\Omega(\xi_k + i\eta)| > \delta \quad (0 \leqslant \eta \leqslant h),$$

и последнее неравенство справедливо также при $-h \leqslant \eta \leqslant 0$.

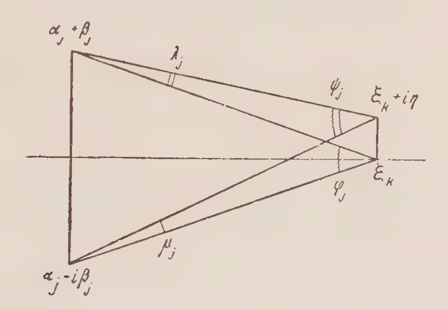


Рис. 1

3. Используем точки x_k ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) в качестве узлов интерполирования, а именно докажем, что *справедливо равенство*:

$$F(z) = \Omega(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)}{(z - x_k)\,\Omega'(x_k)}, \tag{5}$$

какова бы ни была целая трансцендентная функция $F(z)$ *степени* $< p$, *для которой*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left| \frac{F(x_k)}{x_k\,\omega(x_k)} \right| < \infty,$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена, отвечающего $x_k = 0$, если $\Omega(z)$ имеет корень, равный нулю.

Введем функцию

$$G(z) = \Omega(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(x_k)}{(z - x_k)\,\Omega'(x_k)}.$$

Эта функция является целой функцией степени $\leqslant p$ и удовлетворяет соотношениям

$$G(x_k) = F(x_k) \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots),$$

что проверяется непосредственно *.

Дальнейшее свойство функции $G(z)$ состоит в том, что

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{G(z)}{\Omega(z)} = 0, \qquad (6_1)$$

если

$$\left| \pm\frac{\pi}{2} - \arg z \right| \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}. \qquad (6_2)$$

Действительно, из (6_2) следует, что

$$|z - x_k|^2 \geqslant x_k^2\cos^2\gamma + (|z| - |x_k|\sin\gamma)^2 \geqslant x_k^2\cos^2\gamma$$

и

$$|z - x_k|^2 \geqslant |z|^2\cos^2\gamma + (|z|\sin\gamma - |x_k|)^2 \geqslant |z|^2\cos^2\gamma.$$

Поэтому

$$\left|\frac{G(z)}{\Omega(z)}\right| \leqslant \frac{1}{\cos\gamma}\sum_{k=-n}^{n}\frac{|F(x_k)|}{|z|\cdot|\Omega'(x_k)|} + \frac{1}{\cos\gamma}\sum_{|k|>n}\frac{|F(x_k)|}{|x_k|\cdot|\Omega'(x_k)|}.$$

При любом $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать n так, чтобы второе слагаемое правой части было $< \frac{\varepsilon}{2}$. После этого можно указать такое ρ, чтобы при $|z| > \rho$ первое слагаемое также было $< \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

Чтобы установить тождество

$$G(z) = F(z),$$

положим

$$\Phi(z) = \frac{F(z) - G(z)}{\Omega(z)}.$$

Так как каждый нуль знаменателя является нулем числителя, то $\Phi(z)$ есть целая функция. Покажем, что $\Phi(z)$ есть целая функция конечной степени **. Для этого воспользуемся тем, что вне всех кривых C_k имеет место неравенство (4). Так как всюду в плоскости

$$|F(z) - G(z)| < Ae^{B|z|},$$

* Необходимо иметь в виду, что, в силу (3),

$$|\Omega'(x_k)| \geqslant p\,|\omega(x_k)|.$$

** Этот результат можно было бы получить при помощи общей теоремы Валирона, дающей вне кружков с центрами в нулях целой функции оценку снизу для ее модуля. Вместо этой неэлементарной теоремы мы предпочли использовать установленное выше для этой цели свойство кривых C_k.

то всюду вне кривых C_k

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{\delta} e^{B|z|}.$$

Но на основании сказанного выше кривая C_k лежит целиком внутри круга с некоторым центром ζ_k и фиксированным радиусом Δ. Поэтому, в силу принципа максимума модуля, находим, что внутри C_k

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{\delta} e^{B(|\zeta_k|+\Delta)}.$$

Отсюда вытекает, что всюду в плоскости z

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{\delta} e^{2B\Delta} e^{B|z|}.$$

Итак, $\Phi(z)$ есть целая функция конечной степени.

Но $F(z)$ есть функция степени $< p$. Поэтому для функции

$$\Psi(z) = \frac{F(z)}{\Omega(z)}$$

будем иметь

$$h_{\Psi}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\Psi(\pm ir)|}{r} < 0.$$

В силу непрерывности функции $h_{\Psi}(\theta)$, неравенство

$$h_{\Psi}(\theta) < 0 \tag{7_1}$$

будет выполняться при

$$\left|\pm\frac{\pi}{2} - \theta\right| \leqslant \varepsilon \tag{7_2}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Принимая во внимание (6) и (7_1), получаем, что при выполнении (7_2) должно иметь место равенство

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(re^{i\theta}) = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Фрагмен-Линделёфа, находим, что $\Phi(z) = 0$. Таким образом, интерполяционная формула (5) доказана.

4. Теперь мы можем сформулировать наше обобщение теоремы М. Картрайт.

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой функции нулевого рода $\omega_0(z)$, которая удовлетворяет неравенству*

$$|\omega_0(x)| \geqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

и нули которой $\alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_k|} < \infty,$$

можно при любом $p > 0$ построить бесконечную последовательность вещественных чисел x_k ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$) и целую трансцендентную функцию $\theta(z)$ степени p таким образом, что, какова бы ни была целая функция $f(z)$ степени $\sigma < p$, неравенства

$$|f(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)| \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant C\,|\theta(x)| \quad (-\infty < x < \infty)$$

с зависящим лишь от $\omega_0(z)$, σ, p коэффициентом C. При этом все нули функции $\theta(z)$ лежат в верхней полуплоскости.

Доказательство. Если в бесконечном произведении функции $\omega_0(z)$ множитель

$$1 - \frac{z}{\alpha_k + i\beta_k}$$

заменить на

$$1 - \frac{z}{\alpha_k - i\beta_k},$$

то модуль функции $\omega_0(z)$ на вещественной оси не изменится и равным образом не изменится сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}.$$

Учитывая это замечание, мы можем с самого начала заменить функцию $\omega_0(z)$ функцией нулевого рода $\omega(z)$, которая на вещественной оси имеет тот же модуль, что и $\omega_0(z)$, и все нули которой лежат в верхней полуплоскости.

Построим функцию $\Omega(z)$, а затем и интерполяционную формулу (5). Эту интерполяционную формулу применим к функции

$$f(z)\frac{\sin\varepsilon(z-\zeta)}{\varepsilon(z-\zeta)}, \tag{8}$$

где ε — положительное число, столь малое, что

$$\sigma + \varepsilon < p,$$

а ζ — комплексный параметр. Функция (8), очевидно, удовлетворяет условиям, при которых формула (5) применима. Поэтому

$$f(z)\frac{\sin\varepsilon(z-\zeta)}{\varepsilon(z-\zeta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(z)\,f(x_k)}{(z-x_k)\cdot\Omega'(x_k)}\,\frac{\sin\varepsilon(x_k-\zeta)}{\varepsilon(x_k-\zeta)}.$$

Полагая здесь $\zeta = z$, получаем

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(z)\,f(x_k)}{(z-x_k)\,\Omega'(x_k)}\,\frac{\sin\varepsilon(z-x_k)}{\varepsilon(z-x_k)}.$$

Отсюда

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\Omega(x)|\cdot|\omega(x_k)|}{|x-x_k|\cdot|\Omega'(x_k)|}\,\frac{|\sin\varepsilon(x-x_k)|}{\varepsilon\,|x-x_k|},$$

и, в силу (3),

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(x)}{x - x_k}\right]^2} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon (x - x_k)}{\varepsilon^2 (x - x_k)}} . \qquad (9)$$

Прежде всего оценим функцию

$$\rho(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon (x - x_k)}{\varepsilon^2 (x - x_k)^2},$$

что легко сделать, используя неравенства (2). Пусть

$$x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}.$$

Тогда

$$\frac{\sin^2 \varepsilon (x - x_m)}{\varepsilon^2 (x - x_m)^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon (x - x_{m+1})}{\varepsilon^2 (x - x_{m+1})^2} \leqslant 2$$

и, значит,

$$\rho(x) \leqslant 2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+2}^{\infty} \frac{1}{(x - x_k)^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=-\infty}^{m-1} \frac{1}{(x - x_k)^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2 + \frac{2}{\pi^2 \varepsilon^2} \left(p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$= 2 + \frac{1}{3\varepsilon^2} \left(p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}\right)^2 = p^2 C^2.$$

Таким образом, неравенство (9) принимает вид:

$$|f(x)| \leqslant C \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(x)}{x - x_k}\right]^2} .$$

Рассмотрим функцию

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(z)}{z - x_k}\right]^2.$$

Это — целая функция степени $2p$, положительная на вещественной оси. Докажем, что

$$\sup_{R>1} \int_1^R \frac{\ln H(x) H(-x)}{x^2} dx < \infty. \qquad (10)$$

Отсюда будет следовать [см. (7), стр. 475], что существует целая функция $\theta(z)$ степени p, все нули которой лежат в верхней полуплоскости, такая, что

$$|\theta(x)|^2 = H(x).$$

Тем самым теорема будет доказана.

Для доказательства (10) положим $x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}$. Тогда

$$|H(x+i)| \leqslant |\Omega(x+i)|^2 \left\{2 + \sum_{k=m+2}^{\infty} + \sum_{k=-\infty}^{m-1} \frac{1}{|x+i-x_k|^2}\right\} \leqslant A|\Omega(x+i)|^2,$$

где

$$A = 2 + \frac{1}{3}\left(p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_j|}\right)^2.$$

Замечая, что

$$|\Omega(x+i)| \leqslant e^p |\overline{\omega}(x+i)| = e^p |\omega(x-i)|,$$

получаем

$$|H(x+i)| \leqslant Ae^{2p} |\omega(x-i)|^2 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда, в силу одного неравенства, принадлежащего С. Н. Бернштейну и далее обобщенного другими авторами [см. ([6]), стр. 414], вытекает, что при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$

$$|H(z+i)| \leqslant Ae^{2p} e^{-2py} |\omega(z-i)|^2$$

и, в частности,

$$|H(x)| \leqslant Ae^{4p} |\omega(x-2i)|^2 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Теперь справедливость неравенства (10) очевидна, так как $\omega(x-2i)$ есть функция нулевого рода.

Функцию $H(z)$ нетрудно выразить через $\Omega(z)$. Действительно, из представления

$$\Omega(z) = ae^{bz} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right) e^{\frac{z}{x_k}}$$

при помощи логарифмирования и двукратного дифференцирования заключаем, что

$$\left[\frac{\Omega'(z)}{\Omega(z)}\right]' = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-x_k)^2}.$$

Таким образом,

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega(z)}{z-x_k}\right]^2 = [\Omega'(z)]^2 - \Omega(z)\,\Omega''(z).$$

Отсюда, между прочим, следует, что *

$$|\theta(x_k)| = |\Omega'(x_k)| = p\,|\omega(x_k)|\,(1+\varepsilon_k).$$

* См. формулу (3).

Заметим еще, что за счет неопределенного параметра λ можно добиться, чтобы одним из нулей x_k была наперед заданная точка.

В случае М. Картрайт

$$\omega(z) = 1,$$

поэтому

$$\Omega(z) = \cos(pz + \lambda)$$

и, значит,

$$H(z) = p^2 \sin^2(pz + \lambda) + p^2 \cos^2(pz + \lambda) = p^2.$$

т. е.

$$\theta(z) = pe^{ipz}.$$

5. Доказанная нами теорема может быть обобщена, если воспользоваться упомянутым выше построением В. А. Марченко.

Обозначим через $\alpha(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ непрерывную функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

a) $\alpha(x) \geqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty)$,

b) $\alpha(x_1 + x_2) \leqslant \alpha(x_1)\,\alpha(x_2)$,

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha(x)}{1 + x^2}\,dx < \infty$.

В. А. Марченко ([3]) показал *, что можно построить целую функцию $K(z)$ степени 1, для которой

a′) $K(0) = 1$,

b′) $|K(\lambda x)| \leqslant \frac{B_\lambda}{\alpha(x)} \quad (-\infty < x < \infty)$,

какова бы ни была константа $\lambda > 0$.

Этим результатом В. А. Марченко мы и воспользуемся.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции* $\omega_0(x)$, $\Omega(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *и последовательность* x_k $(\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$ *таковы, что для всякой целой функции* $f(z)$ *степени* $\sigma < p$ *неравенства*

$$|f(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)| \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant C_\sigma |\theta(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

где C_σ — *константа, которая при фиксированных* $\omega_0(x)$, $\theta(x)$, $\{x_k\}$ *и* p *зависит лишь от* σ. *В таком случае для всякой целой функции* $f(z)$ *степени* $\sigma < p$ *неравенства*

$$|f(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)|\,\alpha(x_k) \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

* Часть рассмотрений В. А. Марченко в несколько ином виде встречается у С. Н. Бернштейна и Палей-Винер ([8]).

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant D\,|\theta(x)|\,\alpha(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где D зависит лишь от $\alpha(x)$ и C_σ.

Доказательство. Возьмем положительное число λ такое, чтобы

$$\sigma_1 = \sigma + \lambda < p,$$

и положим

$$F_\xi(z) = f(z)\,K(\lambda(z-\xi)),$$

где ξ — вещественный параметр. $F_\xi(z)$ есть целая функция степени $\leqslant \sigma_1$ и, в силу условия теоремы,

$$|F_\xi(x_k)| \leqslant |\omega_0(x_k)|\,\alpha(x_k)\,|K(\lambda(x_k-\xi))| \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Но, по свойству b),

$$\alpha(x_k) \leqslant \alpha(x_k - \xi)\,\alpha(\xi).$$

Поэтому, в силу b′),

$$|F_\xi(x_k)| \leqslant B_\lambda\,|\omega_0(x_k)|\,\alpha(\xi).$$

Отсюда, по условию теоремы,

$$|F_\xi(x)| \leqslant C_{\sigma_1} B_\lambda\,\alpha(\xi)\,|\theta(x)|.$$

А так как это неравенство справедливо при любом ξ, то

$$|f(x)| = |F_x(x) \leqslant C_{\sigma_1} B_\lambda\,\alpha(x)\,|\theta(x)|,$$

и теорема доказана.

В частном случае, когда $\omega_0(x) = 1$, мы получаем, что неравенства

$$\left|f\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right| \leqslant \alpha\left(\frac{k\pi}{p}\right) \quad (\pm k = 0, 1, 2, \ldots)$$

влекут неравенство

$$|f(x)| \leqslant D\alpha(x) \leqslant (-\infty < x < \infty).$$

Это обобщение теоремы М. Картрайт мы и имели в виду в конце п. 1.

Поступило
13. I. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cartwright M. L., On certain integral functions of order one, Quart. J. of Math. (Oxf. ser.), 7 (1936), 46—55.

[2] Бернштейн С. Н., Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 421—444.

[3] Марченко В. А., О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси (III), Зап. матем. отд. физ.-мат. фак-та и Харьк. матем. об-ва, сер. IV, т. XXII (1950), 115—125.

[4] Agmon Sh., Functions of exponential type in an angle and singularities of Taylor series, Trans. Amer. Math. Soc., v. 70, N 3 (1951), 492—508.

[5] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, М.—Л., 1937.

[6] Ахиезер Н. И., О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 411—428.

[7] Ахиезер Н. И., К теории целых функций конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР, т. 63, № 5 (1948), 475—478.

[8] Paley R. E. A. C. and Wiener N., Fourier transforms in the complex domain, N. Y., 1934.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 365—384

З. И. БОРЕВИЧ

О ГРУППАХ ГОМОЛОГИЙ, СВЯЗАННЫХ СО СВОБОДНОЙ ГРУППОЙ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В работе изучаются группы гомологий конечной группы G в группе, естественным образом связанной с представлением G в виде фактор-группы свободной группы. Кроме того, дано новое доказательство одной редукционной теоремы Eilenberg'а и Mac Lane'а.

§ 1. Основные понятия, определения и обозначения

Пусть K — аддитивно записанная абелева группа, для которой группа G в мультипликативной записи является группой операторов (двусторонних). Это значит, что для каждого $a \in K$ и $x \in G$ определены

$$xa \text{ и } a^x,$$

являющиеся элементами группы K, так, что выполнены следующие условия:

1) $x(a_1 + a_2) = xa_1 + xa_2, \quad (a_1 + a_2)^x = a_1^x + a_2^x,$

2) $x(ya) = (xy)a, \quad (a^x)^y = a^{xy},$

3) $1a = a^1 = a$ (1 — единица группы G),

4) $(xa)^y = x(a^y) \quad (x, y \in G;\ a, a_1, a_2 \in K).$

Если $xa = a$ при любых $x \in G$ и $a \in K$, то говорят, что операторы из G действуют на элементы из K слева тождественным образом.

Если $xa = a^x = a$, то говорят, что G есть группа тождественных операторов для K.

Совокупность функций f от n аргументов ($n \geqslant 1$) из G, значения которых $f(x_1, \ldots, x_n)$ содержатся в K, образуют группу $C^n(G, K)$ по сложению:

$$(f_1 + f_2)(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + f_2(x_1, \ldots, x_n).$$

Оператор δ, определяемый равенством:

$$(\delta f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)^{x_{n+1}},$$

отображает гомоморфно $C^n(G, K)$ в $C^{n+1}(G, K)$.

Функции $f \in C^n(G, K)$, для которых $\delta f = 0$, называются *n-мерными циклами* группы G в группе K. Все n-мерные циклы образуют группу, обозначаемую через $Z^n(G, K)$. Функции $f \in C^n(G, K)$, представимые в виде $f = \delta g$, где $g \in C^{n-1}(G, K)$, называются *n-мерными границами* G в K. (Одномерные границы есть функции f вида $f(x) = xa - a^x$, $a \in K$.)

Группа n-мерных границ обозначается через $B^n(G, K)$. Так как $\delta\delta f = 0$, что проверяется непосредственно, то группа n-мерных границ содержится в группе n-мерных циклов. Фактор-группа

$$Z^n(G, K) / B^n(G, K) = H^n(G, K)$$

называется *n-мерной группой гомологий группы G в группе* K $(n = 1, 2, \ldots)$.

Если группа G является группой односторонних операторов для K, например, правых, то (считая, что левые операторы из G действуют на элементы K тождественным образом) можно определить группы гомологий группы G в K. Оператор δ в этом случае определяется формулой:

$$(\delta f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)^{x_{n+1}}.$$

Случай двусторонних операторов всегда может быть сведен к случаю односторонних (правых или левых). Действительно, если для K группа G есть группа двусторонних операторов, то обозначим через K' группу, совпадающую с K, но для которой G является группой только правых операторов, определяемых равенством

$$a * x = x^{-1} a^x.$$

Каждой функции $f \in C^n(G, K)$ поставим в соответствие функцию $f' \in C^n(G, K')$:

$$f'(x_1, \ldots, x_n) = x_n^{-1} \ldots x_1^{-1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Соответствие $f \to f'$ является, очевидно, изоморфизмом $C^n(G, K)$ на $C^n(G, K')$. Имеем:

$$(\delta f')(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f'(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f'(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} f'(x_1, \ldots, x_n) * x_{n+1} = x_{n+1}^{-1} \ldots x_2^{-1} x_1^{-1} x_1 f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \\ + x_{n+1}^{-1} \ldots x_1^{-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} x_{n+1}^{-1} x_n^{-1} \ldots x_1^{-1} f(x_1, \ldots, x_n)^{x_{n+1}} = \\ = x_{n+1}^{-1} \ldots x_1^{-1} (\delta f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\delta f)'(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Таким образом, $\delta f' = (\delta f)'$. В силу этого, при изоморфизме $f \to f'$ циклы отображаются в циклы, а границы — в границы. Поэтому указанный изоморфизм порождает изоморфное отображение $H^n(G, K)$ на $H^n(G, K')$.

Следовательно, изучение групп гомологий в группе с двусторонними операторами сводится к изучению групп гомологий в группе с односторонними операторами. Однако в некоторых вопросах все же естественнее пользоваться двусторонними операторами.

Более подробное изложение введенных определений содержится в работе (3). В другой терминологии эти же понятия независимо от работы (3) были введены Д. К. Фаддеевым в статье (1).

В дальнейшем без специальных пояснений будем пользоваться следующими обозначениями.

Если B и K — две абелевы группы с одной и той же группой правых операторов G, то через $\mathrm{Hom}(B, K)$ обозначаем группу (по сложению) всех гомоморфизмов группы B в группу K, для которой G является группой двусторонних операторов: для $h \in \mathrm{Hom}(B, K)$, $x \in G$, $b \in B$

$$(xh)\ (b) = h(b^x), \quad (h^x)\ (b) = [h(b)]^x.$$

(Выполнение аксиом 1), 2), 3), 4) легко проверяется.)

Так как группа операторов у нас всегда обозначается через G (за исключением § 8), то часто вместо $H^n(G, K)$ будем писать $H^n(K)$. Аналогично — для групп функций, циклов и границ.

Если K_0 — инвариантная относительно операторов из G подгруппа группы K, то фактор-группу K/K_0 будем рассматривать также как группу с операторами:

$$x\bar{a} = \overline{xa}, \quad \bar{a}^x = \overline{a^x},$$

где $a \in K$, $x \in G$, $\bar{a}$ — класс смежности K по K_0, содержащий a.

Запись $B = \sum\limits_{\mu} B_\mu$ обозначает, что абелева группа B есть прямая сумма своих подгрупп B_μ. Каждый элемент из B однозначно представим в виде $b = \sum\limits_{\mu} b_\mu$, $b_\mu \in B_\mu$, причем $b_\mu \neq 0$ только для конечного числа индексов μ.

Запись $B = \sum\limits_{\mu}^{*} B_\mu$ («топологическая» прямая сумма, B_μ — абелевы) означает, что B есть группа, состоящая из систем $\{b_\mu\}_\mu$, где $b_\mu \in B_\mu$ с естественным правилом сложения. (Здесь не накладывается ограничения, чтобы b_μ были отличны от нуля только для конечного числа индексов μ.) Если B_μ — операторные группы с операторами из G, то B также рассматривается как операторная группа:

$$x(\{b_\mu\}_\mu) = \{xb_\mu\}_\mu, \quad (\{b_\mu\}_\mu)^x = \{b_\mu{}^x\}_\mu.$$

§ 2. Формулировка теорем

Пусть $G \cong F/R$ — представление группы G в виде фактор-группы свободной группы F. Пусть элементы $u_\sigma \in F$, $\sigma \in G$, образуют полную систему представителей группы F по подгруппе R, причем класс смежности $u_\sigma R$ соответствует элементу σ при изоморфизме $G \cong F/R$. $R_0 = R/[R, R]$, где $[R, R]$ — коммутант R. Группа G, в силу представления $G \cong F/R$, естественным образом является группой (правых) операторов для абелевой группы R_0. Именно, приняв обозначение $\bar{r} = r[R, R]$ для $r \in R$, положим:

$$\bar{r}^\sigma = \overline{u_\sigma^{-1} r u_\sigma}, \quad \sigma \in G, \quad r \in R_0.$$

Легко проверить, что $\bar{r}^\sigma$ не зависит от выбора $r \in \bar{r}$ и представителей u_σ, а также, что условия 1), 2), 3) § 1 выполняются. Таким образом, группа R_0 как операторная группа однозначно определяется заданием представления $G \cong F/R$.

ТЕОРЕМА А. *Если G — конечная группа, то при $n \geqslant 3$ группа гомологий $H^n(G, R_0)$ изоморфна группе $H^{n-2}(G, J)$, где J — бесконечная циклическая группа с тождественными операторами из G.*

Пусть K — абелева группа с правыми операторами из G. Тогда, согласно определению, данному в § 1, вполне определена группа $\mathrm{Hom}(R_0, K)$ как группа с двусторонними операторами.

ТЕОРЕМА В (Eilenberg и Mac Lane). *При $n \geqslant 1$ группа гомологий $H^n(G, \mathrm{Hom}(R_0, K))$ изоморфна группе $H^{n+2}(G, K)$.*

Заметим, что в теореме В, в отличие от теоремы А, на группу G не накладывается никаких ограничений. Напротив, предположение о конечности G в теореме А существенно. (В этом легко убедиться, взяв в качестве G свободную группу: в этом случае $H^3(G, R_0) = 0$, однако $H^1(G, J) \neq 0$.)

Теорема В впервые была установлена в работе ([3]). Приведенное здесь доказательство этой теоремы представляется более прозрачным, чем то, которое дано ее авторами. Доказательства обеих теорем А и В основаны на одинаковых принципах, в силу чего между этими доказательствами имеется большая аналогия.

В § 3 собраны некоторые вспомогательные факты, необходимые для доказательства теорем А и В. В § 4 доказывается, что группы гомологий $H^n(G, R_0)$ и $H^n(G, \mathrm{Hom}(R_0, K))$ не зависят от представления G в виде фактор-группы F/R (теоремы 1 и 2), а затем в § 5 и 7, при помощи некоторого специального представления (названного регулярным), устанавливается изоморфность этих групп гомологий с группами $H^{n-2}(G, J)$ и $H^{n+2}(G, K)$ соответственно. При доказательстве этого изоморфизма существенную роль играет теорема, установленная в ([1]) Д. К. Фаддеевым и фигурирующая в § 3 в виде леммы 7. Группы $H^2(G, R_0)$ и $H^1(G, R_0)$ изучены в § 6. Там же указано некоторое обобщение теоремы А. В § 8 содержится доказательство для нульмерного случая теоремы В.

§ 3. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. *Пусть F — свободная группа, $\{a_\mu\}$ — система свободных образующих F, R — подгруппа F. В каждом смежном классе xR можно выбрать по представителю $\overline{x}$ (при этом $\overline{1}=1$) таким образом, что если элемент $a_{\mu_1}^{\varepsilon_1}\ldots a_{\mu_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i=\pm 1$, записанный в виде слова минимальной длины, является представителем в своем классе, то и всякий его отрезок $a_{\mu_k}^{\varepsilon_k}\ldots a_{\mu_n}^{\varepsilon_n}$, $1\leqslant k\leqslant n$, также является представителем в своем классе. Далее, при таком выборе представителей отличные от единицы элементы вида*

$$\overline{a_\mu x}^{-1}a_\mu\overline{x},$$

построенные для всех μ и для всех представителей $\overline{x}$, образуют свободную систему образующих для подгруппы R.

Доказательство леммы 1 содержится в (²), стр. 296—298.

ЛЕММА 2. *Если $B=\sum\limits_\mu B_\mu$ есть прямая сумма абелевых подгрупп B_μ, инвариантных относительно правых операторов из G, а K — абелева группа также с правыми операторами из G, то группа $\operatorname{Hom}(B, K)$ операторно изоморфна «топологической» прямой сумме $\sum\limits_\mu^{*}\operatorname{Hom}(B_\mu, K)$.*

Доказательство. Пусть $h\in\operatorname{Hom}(B, K)$. Для каждого μ определяем гомоморфизм h_μ группы B_μ в K:

$$h_\mu(b_\mu)=h(b_\mu),\quad b_\mu\in B_\mu.$$

Соответствие $h\to\{h_\mu\}_\mu$ является, очевидно, изоморфизмом $\operatorname{Hom}(B, K)$ на $\sum\limits_\mu^{*}\operatorname{Hom}(B_\mu, K)$. Из легко проверяемых равенств

$$(h^\varphi)_\mu=h_\mu^\varphi,\quad (\varphi h)_\mu=\varphi(h_\mu)$$

следует, что этот изоморфизм операторный.

ЛЕММА 3. *Рассмотрим группу $C^k=C^k(G, J)$, $k\geqslant 1$, где J — группа целых чисел по сложению с тождественными операторами из G. Операторы $\sigma\in G$ действуют на $f\in C^k$ по формуле*

$$(f^\sigma)_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}=f_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1},\sigma_k\cdot\sigma^{-1}}.$$

Утверждается, что $H^n(G, C^k)=0$, $n\geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $f\in Z^n(C^k)$. Имеем:

$$f(x_2,\ldots,x_n,\sigma^{-1})+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f(x_1,\ldots,x_ix_{i+1},\ldots,x_n,\sigma^{-1})+$$
$$+(-1)^n f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\sigma^{-1})+(-1)^{n+1}f(x_1,\ldots,x_n)^{\sigma^{-1}}=0.$$

Положим

$$f(x_1,\ldots,x_{n-1},\sigma^{-1})_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1},1}=g(x_1,\ldots,x_{n-1})_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1},\sigma},$$

$$g\in C^{n-1}(G, C^k).$$

Тогда

$$g(x_2, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma} +$$
$$+ (-1)^n g(x_1, \ldots, x_{n-1})_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma x_n^{-1}} +$$
$$+ (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma} = 0,$$

откуда

$$(\delta g)\ (x_1, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma} + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma} = 0,$$

т. е. $f = (-1)^n \delta g$, и лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть K — абелева группа с правыми операторами из G. Для $C^k(G, K)$ группа G является группой (двусторонних) операторов:*

$$(\sigma f)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} = f_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k \sigma},$$

$$(f^\sigma)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} = (f_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k})^\sigma.$$

Утверждается, что $H^n(G, C^k(G, K)) = 0$, $n \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $f \in Z^n(G, C^k(K))$. Положим

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1})_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} = f(\sigma_k, x_1, \ldots, x_{n-1})_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, 1}.$$

Имеем:

$$[\sigma_k f(x_1, \ldots, x_n)]_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}\ 1} - f(\sigma_k x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, 1} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} f(\sigma_k, x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, 1} +$$
$$+ (-1)^{n+1} [f(\sigma_k, x_1, \ldots, x_{n-1})^{x_n}]_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, 1} = 0;$$

$$f(x_1, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} = g(x_2, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k x_1} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g(x_1, \ldots, x_i x_{i-1}, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} +$$
$$+ (-1)^n [g(x_1, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k}]^{x_n}.$$

Значит,

$$f(x_1, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} = (\delta g)\ (x_1, \ldots, x_n)_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k},$$

т. е. $f = \delta g$.

ЛЕММА 5. *Если конечная группа G является группой двусторонних операторов для K, а $K = \sum_\mu K_\mu$ есть прямая сумма инвариантных относительно G подгрупп K_μ, то группа гомологий $H^n(G, K)$ изоморфна прямой сумме $\sum_\mu H^n(G, K_\mu)$.*

Доказательство. Пусть $f \in C^n(K)$. Имеем:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu} f_\mu(x_1, \ldots, x_n),$$

где $f_\mu(x_1, \ldots, x_n) \in K_\mu$, $f_\mu \in C^n(K_\mu)$, причем $f_\mu(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ только для конечного числа индексов μ. В силу конечности G, $f_\mu \neq 0$ также только для конечного числа μ. Поэтому $f = \sum_\mu f_\mu$, а значит,

$$C^n(K) = \sum_{\mu} C^n(K_\mu).$$

При этом, как легко видеть,

$$Z^n(K) = \sum_{\mu} Z^n(K_\mu)$$

и

$$B^n(K) = \sum_{\mu} B^n(K_\mu),$$

откуда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 6. *Пусть (произвольная) группа G является группой операторов для K, распадающейся в «топологическую» прямую сумму $K = \sum_\mu^* K_\mu$ инвариантных подгрупп K_μ. Тогда группа гомологий $H^n(G, K)$ изоморфна «топологической» прямой сумме $\sum_\mu^* H^n(G, K_\mu)$.*

Доказательство. Пусть $f \in C^n(K)$. Имеем:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \{f_\mu(x_1, \ldots, x_n)\}_\mu,$$

где $f_\mu(x_1, \ldots, x_n) \in K_\mu$. Соответствие $f \to \{f_\mu\}_\mu$ есть изоморфизм $C^n(K)$ на $\sum_\mu^* C^n(K_\mu)$, при котором $Z^n(K)$ отображается на $\sum_\mu^* Z^n(K_\mu)$, а $B^n(K)$ — на $\sum_\mu^* B^n(K_\mu)$.

ЛЕММА 7 (теорема Д. К. Фаддеева ([1])). *Пусть K — абелева группа с операторами из G, а K_0 — инвариантная (относительно G) подгруппа K. Если для всех $n \geqslant 1$ $H^n(G, K) = 0$, то группа гомологий $H^{n+1}(G, K_0)$ изоморфна $H^n(G, K/K_0)$, $n \geqslant 1$.*

Далее, группа $H^1(G, K_0)$ изоморфна фактор-группе группы P тех классов смежности $\bar{a} \in K/K_0$, которые удовлетворяют условию $\sigma\bar{a} = \bar{a}^\sigma$, $\sigma \in G$, по подгруппе Q, состоящей из классов смежности, содержащих представителя $a \in K$, удовлетворяющего условию $\sigma a = a^\sigma$.

Доказательство. Обозначим K/K_0 через $\bar{K}$. Для $a \in K$ $\bar{a}$ будет обозначать класс смежности группы K по подгруппе K_0, содержащий a.

Отображение $f \to \bar{f}$, $f \in C^n(K)$, определяемое равенством

$$\bar{f}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)},$$

есть гомоморфизм $C^n(K)$ на $C^n(\bar{K})$. При этом, очевидно, $\delta\bar{f} = \overline{\delta f}$.

Пусть $f \in Z^{n+1}(K_0)$. f можно рассматривать как цикл группы G в группе K, а тогда $f = \delta g$, где $g \in C^n(K)$. Так как $\delta\bar{g} = \bar{f} = 0$, то $\bar{g} \in Z^n(\bar{K})$. Покажем, что соответствие $f \to g \to \bar{g}$ однозначно определяет гомоморфизм $H^{n+1}(K_0)$ в $H^n(\bar{K})$. Действительно, пусть $f_1 \to g_1 \to \bar{g}_1$, причем $f_1 = f + \delta h$, $h \in C^n(K_0)$. Так как $f_1 = \delta g_1$, то

$$\delta(g_1 - g - h) = 0,$$

а тогда

$$g_1 - g - h = \delta l, \quad l \in C^{n-1}(K),$$

откуда $\bar{g}_1 = \bar{g} + \delta\bar{l}$.

Если $f = \delta g$ и $\bar{g} = \delta\bar{k}$, то $f = \delta(g - \delta k)$, при этом $\overline{g - \delta k} = 0$, т. е. $g - \delta k \in C^n(K_0)$ и $f \in B^{n+1}(K_0)$. Следовательно, построенный гомоморфизм $H^{n+1}(K_0)$ в $H^n(\bar{K})$ является изоморфизмом. Если для некоторой функции $g \in C^n(K)$ $\delta\bar{g} = 0$, то положим $f = \delta g$. Тогда $\bar{f} = 0$ и $\delta f = 0$, т. е. $f \in Z^{n+1}(K_0)$ и, значит, наш изоморфизм отображает $H^{n+1}(K_0)$ на $H^n(\bar{K})$.

Докажем вторую часть леммы. Пусть $f \in Z^1(K_0)$. Тогда

$$f(\sigma) = \sigma a - a^\sigma$$

при некотором $a \in K$. Так как $\sigma\bar{a} = \bar{a}^\sigma$, то $\bar{a} \in P$. Если

$$f_1 \equiv f \pmod{B^1(K_0)}$$

и

$$f_1(\sigma) = \sigma a_1 - a_1^\sigma,$$

то при некотором $b \in K_0$

$$\sigma(a_1 - a - b) = (a_1 - a - b)^\sigma,$$

а тогда

$$\bar{a}_1 \equiv \bar{a} \pmod{Q},$$

и мы получаем гомоморфное отображение $H^1(K_0)$ в фактор-группу P/Q. Если для $f \in Z^1(K_0)$

$$f(\sigma) = \sigma a - a^\sigma,$$

причем $a = a_1 + b$, где $b \in K_0$ и $\sigma a_1 = a_1^\sigma$, то

$$f(\sigma) = \sigma b - b^\sigma \text{ и } f \in B^1(K_0),$$

т. е. гомоморфизм $H^1(K_0) \to P/Q$ есть изоморфизм. Если для $a \in K$

$$\sigma\bar{a} = \bar{a}^\sigma,$$

то, положив

$$f(\sigma) = \sigma a - a^{\sigma},$$

получаем цикл f группы G в K_0, откуда следует, что $H^1(K_0)$ отображается на P/Q.

ЛЕММА 8. *Пусть свободная группа F является группой правых операторов для абелевой группы K. $\{v_\mu\}$ — система свободных образующих F. Каковы бы ни были $f_\mu \in K$, существует единственный одномерный цикл f группы F в группе K такой, что $f(v_\mu) = f_\mu$.*

Доказательство. Определяем функцию f на совокупности всех слов равенствами:

$$f(1) = 0, \quad f(v_\mu) = f_\mu, \quad f(v_\mu^{-1}) = -f(v_\mu)^{v_\mu^{-1}}$$

и далее индуктивно:

$$f(xv_\mu) = f(x)^{v_\mu} + f(v_\mu), \quad f(xv_\mu^{-1}) = f(x)^{v_\mu^{-1}} + f(v_\mu^{-1}).$$

Индукцией по длине слова y покажем, что

$$f(xy) = f(x)^y + f(y)$$

и, далее, что

$$f(xv_\mu v_\mu^{-1} y) = f(xv_\mu^{-1} v_\mu y) = f(xy).$$

Таким образом, f есть цикл группы F в группе K. Единственность очевидна.

§ 4. Инвариантность

ТЕОРЕМА 1. *Если G — конечная группа, то группы гомологий $H^n(G, R_0)$ $(n \geqslant 1)$ не зависят от способа представления группы G в виде фактор-группы F/R свободной группы F.*

Следовательно, эти группы гомологий являются инвариантами самой группы G.

ТЕОРЕМА 2. *При предположениях теоремы* В *группы гомологий $H^n(G, \mathrm{Hom}(R_0, K))$ $(n \geqslant 1)$ не зависят от способа представления $G \cong F/R$.* (Здесь G — произвольная группа.)

Доказательство обеих теорем проведем параллельно. При этом там, где речь будет итти о теореме 1, будет предполагаться, что группа G конечна. Для бесконечной группы G теорема 1 уже не имеет места. Действительно, если G — бесконечная циклическая группа, то легко показать, что $H^1(R_0)$ будут различны для различных надлежащим образом подобранных представлений. Если G — прямое произведение двух бесконечных циклических групп, то также и $H^2(R_0)$ зависит от способа представления.

Представление $G \cong F/R$ назовем *регулярным*, если в каждом смежном классе группы F по R можно выбрать по представителю таким образом,

чтобы эти представители составляли свободную систему образующих для группы F. Для двух регулярных представлений группы G F/R и F'/R' группы гомологий, указанные в теоремах 1 и 2, будут изоморфны. В самом деле, в этом случае между свободными группами F и F' естественным образом устанавливается изоморфизм, порождающий изоморфизм между нормальными делителями R и R' и порождающий, далее, операторный изоморфизм между фактор-группами R_0 и R_0' нормальных делителей по их коммутантам. Группы $\mathrm{Hom}(R_0, K)$ и $\mathrm{Hom}(R_0', K)$ также операторно изоморфны. Но для операторно изоморфных групп группы гомологий, очевидно, изоморфны.

Пусть теперь $G \cong F/R$ — произвольное представление G в виде фактор-группы свободной группы, α — гомоморфизм F на G с ядром R, порождающий данное представление, $\{u_\lambda\}$ — какая-нибудь система свободных образующих группы F, $\{\tau\}$ обозначает совокупность тех элементов $\tau \neq 1$ группы G, которые являются образами образующих u_λ при гомоморфизме α.

Элементы τ порождают всю группу G. Действительно, каждый элемент $\sigma \in G$ является образом некоторого слова $W(u_\lambda)$ от образующих u_λ при гомоморфизме α:

$$\sigma = \alpha(W(u_\lambda)) = W(\alpha(u_\lambda)) = W_1(\tau).$$

Для каждого τ обозначим через v_τ какой-нибудь один из элементов u_λ, для которого $\alpha(u_\lambda) = \tau$, так что $\alpha(v_\tau) = \tau$. Пусть теперь u_μ обозначают те из образующих u_λ, которые отличны от v_τ. Если $\alpha(u_\mu) = 1$, то положим $v_\mu = u_\mu$. Если же $\alpha(u_\mu) = \tau$, то полагаем $v_\mu = u_\mu v^{-1}_\tau$. Очевидно, элементы v_τ и v_μ образуют свободную систему образующих группы F, причем

$$\alpha(v_\tau) = \tau, \quad \alpha(v_\mu) = 1.$$

Обозначим через F' свободную группу, порожденную элементами v_τ (F' — подгруппа F), через α' — гомоморфизм F' на G:

$$\alpha'(v_\tau) = \tau$$

и через R' — ядро гомоморфизма α' (очевидно, $R' \subset R$). Гомоморфизм α' естественным образом порождает представление $G \cong F'/R'$.

Построим системы свободных образующих для групп R' и R. Для этого, согласно лемме 1, выбираем надлежащим образом систему представителей из классов смежности F' по R'. Пусть u_σ — представитель из класса, соответствующего элементу $\sigma \in G$, согласно представлению $G \cong F'/R'$ ($u_1 = 1$, $\alpha'(u_\sigma) = \sigma$). Пусть $\{\beta_\varkappa\}$ есть система свободных образующих группы R', найденная согласно лемме 1 (v_τ — образующие F', u_σ — представители F' по R').

Элементы u_σ являются также представителями классов смежности F по R. При построении свободных образующих группы R (по образующим v_τ и v_μ группы F и представителям u_σ) мы получим те же элементы $\{\beta_\varkappa\}$, к которым добавляются элементы

$$u_\sigma^{-1}v_\mu u_\sigma, \quad \sigma \in G$$

(все они отличны от единицы).

Перейдем к фактор-группам R_0' и R_0 групп R' и R по их коммутантам. Построенные свободные образующие R' и R перейдут в базисы абелевых групп R_0' и R_0. Группа R_0' естественным образом операторно изоморфна подгруппе группы R_0, порожденной элементами

$$\overline{\beta}_\varkappa = \beta_\varkappa [R, R] \in R_0.$$

В силу этого изоморфизма будем считать, что $R_0' \subset R_0$. Обозначим через B_μ подгруппу R_0, порожденную элементами

$$\overline{u_\sigma^{-1}v_\mu u_\sigma} = \overline{v}_\mu{}^\sigma, \quad \sigma \in G.$$

Переходя к аддитивной записи, имеем:

$$R_0 = R_0' + \sum_\mu B_\mu.$$

Если G — конечная группа, то B_μ операторно изоморфна группе $C^1(G, J)$, рассмотренной в лемме 3. Действительно, соответствие, ставящее каждому $b = \sum_\sigma b_\sigma \overline{v}_\mu{}^\sigma \in B_\mu$ функцию f, $f_\sigma = b_\sigma$, есть изоморфизм B_μ на $C^1(J)$. Так как

$$b^\varphi = \sum_\sigma b_{\sigma\varphi^{-1}} \overline{v}_\mu{}^\sigma$$

и

$$(f^\varphi)_\sigma = f_{\sigma\varphi^{-1}},$$

то этот изоморфизм операторный. Применяя теперь леммы 3 (при $k = 1$) и 5, устанавливаем, что группа $H^n(R_0)$ изоморфна $H^n(R_0')$.

Группа $\mathrm{Hom}(B_\mu, K)$ операторно изоморфна группе $C^1(G, K)$ леммы 4. Действительно, соответствие, ставящее каждому гомоморфизму h группы B_μ в K функцию $f \in C^1(K)$ по правилу

$$f_\sigma = h(\overline{v}^\sigma)$$

есть изоморфизм $\mathrm{Hom}(B_\mu, K)$ на $C^1(K)$, который в силу равенств ($\varphi \in G$):

$$(\varphi h)(\overline{v}_\mu{}^\sigma) = h(\overline{v}_\mu{}^{\sigma\varphi}) = f_{\sigma\varphi} = (\varphi f)_\sigma,$$

$$(h^\varphi)(\overline{v}_\mu{}^\sigma) = [h(\overline{v}_\mu{}^\sigma)]^\varphi = (f_\sigma)^\varphi = (f^\varphi)_\sigma,$$

является операторным изоморфизмом. Согласно лемме 2,

$$\mathrm{Hom}(R_0, K) \cong \mathrm{Hom}(R_0', K) + \sum_\mu^* \mathrm{Hom}(B_\mu, K).$$

Применяя теперь леммы 6 и 4 (при $k = 1$), получаем, что

$$H^n(\mathrm{Hom}(R_0, K)) \cong H^n(\mathrm{Hom}(R_0', K)).$$

Для каждого элемента $\rho \in G$, отличного от τ (в числе элементов ρ находится и единица G), введем символы v_ρ и рассмотрим свободную группу F'', порожденную элементами v_τ и v_ρ как свободными образующими. Гомоморфизм α'' группы F'' на G, определяемый равенствами

$$\alpha''(v_\tau) = \tau, \quad \alpha''(v_\rho) = 1,$$

порождает представление

$$G \cong F''/R'',$$

R_0'' — фактор-группа R'' по ее коммутанту. Как и выше, докажем, что

$$H^n(R_0'') \cong H^n(R_0')$$

и

$$H^n(\mathrm{Hom}(R_0'', K)) \cong H^n(\mathrm{Hom}(R_0', K)),$$

откуда будет следовать, что

$$H^n(R_0) \cong H^n(R_0''),$$

$$H^n(\mathrm{Hom}(R_0, K)) \cong H^n(\mathrm{Hom}(R_0'', K)).$$

Так так элементы τ порождают всю группу G, то $\rho = W_\rho(\tau)$. Положим

$$v_\tau'' = v_\tau, \quad v_\rho'' = v_\rho W_\rho(v_\tau).$$

Элементы v_τ'' и v_ρ'' образуют свободную систему образующих для F'', причем

$$\alpha''(v_\tau'') = \tau, \quad \alpha''(v_\rho'') = \rho.$$

Следовательно, представление $G \cong F''/R''$ регулярно.

Итак, мы показали, что группы гомологий теорем 1 и 2, построенные для произвольного представления $G \cong F/R$, изоморфны таким же группам гомологий, построенным для регулярного представления $G \cong F''/R''$. Теоремы 1 и 2 доказаны.

§ 5. Доказательство теоремы А

В силу теоремы 1, достаточно доказать теорему А для регулярного представления группы G.

Пусть F — свободная группа со свободными образующими u_σ, $\sigma \in G$. Отображение $u_\sigma \to \sigma$ порождает гомоморфизм F на G, дающий нам регулярное представление $G \cong F/R$ (R — ядро указанного гомоморфизма). Элементы u_τ для $\tau \neq 1$, $\tau \in G$, и 1 образуют систему представителей F по R, удовлетворяющую требованиям леммы 1, а потому, согласно этой лемме, элементы

$$a_{\sigma,\tau} = u_{\sigma\tau}^{-1} u_\sigma u_\tau, \quad \tau \neq 1, \text{ и } a_{\sigma,1} = a_{1,1} = u_1$$

образуют свободную систему образующих для R. При переходе к фактор-группе $R_0 = R / [R, R]$ эта система перейдет в базис R_0. Элементы этого базиса будем обозначать так же, как и соответствующие им свободные образующие R. Для R_0 будем употреблять аддитивную запись. В силу равенства:

$$u_\varphi^{-1} a_{\sigma,\tau} u_\varphi = u_\varphi^{-1} u_{\sigma\tau}^{-1} u_{\sigma\tau\varphi} u_{\sigma\tau\varphi}^{-1} u_\sigma u_{\tau\varphi} u_{\tau\varphi}^{-1} u_\tau u_\varphi = a_{\sigma\tau,\varphi}^{-1} a_{\sigma,\tau\varphi} a_{\tau,\varphi},$$

операторы $\varphi \in G$ действуют на базисные элементы группы R_0 по формуле:

$$a_{\sigma,\tau}^{\varphi} = a_{\tau,\varphi} - a_{\sigma\tau,\varphi} + a_{\sigma,\tau\varphi}. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение аддитивную группу E целочисленных матриц порядка $m = \operatorname{ord} G$ (здесь мы уже предполагаем, что G — конечна) и пусть $e_{\sigma,\tau}$, $\sigma, \tau \in G$, — базис этой группы. Группа E является группой с правыми операторами из G согласно формуле:

$$e_{\sigma,\tau}^{\varphi} = e_{\sigma,\tau\varphi}, \quad \varphi \in G.$$

Группа E операторно изоморфна группе $C^2(G, J)$, рассмотренной в лемме 3. Действительно, соответствие, ставящее элементу

$$g = \sum_{\sigma,\tau} g_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau} \in E$$

функцию

$$f \in C^2(J), \quad f_{\sigma,\tau} = g_{\sigma,\tau},$$

является операторным изоморфизмом в силу равенств:

$$g^{\varphi} = \sum_{\sigma,\tau} g_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau\varphi} = \sum_{\sigma,\tau} g_{\sigma,\tau\varphi^{-1}} e_{\sigma,\tau} = \sum_{\sigma,\tau} (f^{\varphi})_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}.$$

Применяя лемму 3 (при $k = 2$), получаем:

$$H^n(G, E) = 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{2}$$

В группе E рассмотрим элементы

$$b_{\sigma,\tau} = e_{\sigma,\tau} - e_{\sigma\tau,1} + e_{\tau,1}, \quad \sigma, \tau \in G.$$

Имеем:

$$b_{\sigma,1} = b_{1,1} = e_{1,1}; \quad b_{\sigma,\tau}^{\varphi} = e_{\sigma,\tau\varphi} - e_{\sigma\tau,\varphi} + e_{\tau,\varphi} =$$

$$= e_{\sigma,\tau\varphi} - e_{\sigma\tau\varphi,1} + e_{\tau\varphi,1} - e_{\sigma\tau,\varphi} + e_{\sigma\tau\varphi,1} - e_{\varphi,1} + e_{\tau,\varphi} - e_{\tau\varphi,1} + e_{\varphi,1},$$

$$b_{\sigma,\tau}^{\varphi} = b_{\tau,\varphi} - b_{\sigma\tau,\varphi} + b_{\sigma,\tau\varphi}. \tag{3}$$

Элементы $b_{1,1}$ и $b_{\sigma,\tau}$, $\tau \neq 1$, линейно независимы. Пусть B обозначает подгруппу E, порожденную этими элементами. Соответствие $e_{1,1} \to u_1$, $b_{\sigma,\tau} \to a_{\sigma,\tau}$, $\tau \neq 1$, порождает изоморфизм B на R_0, который, в силу (1) и (3), будет операторным. Следовательно,

$$H^n(R_0) \cong H^n(B), \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

Обозначим через $\bar{e}_{\sigma,1}$, $\sigma \neq 1$, смежный класс группы E по подгруппе B, содержащий элемент $e_{\sigma,1}$. Очевидно, $\bar{e}_{\sigma,1}$, $\sigma \neq 1$, образуют базис фактор-группы E/B. Имеем:

$$e_{\sigma,1}^{\tau} = e_{\sigma,\tau} \equiv e_{\sigma\tau,1} - e_{\tau,1} \pmod B.$$

Следовательно,

$$\bar{e}_{\sigma,1}^{\tau} = \bar{e}_{\sigma\tau,1} - \bar{e}_{\tau,1} \tag{5}$$

(при этом имеется в виду, что $\bar{e}_{1,1} = 0$).

Рассмотрим группу Δ целочисленных линейных форм ранга $m = \operatorname{ord} G$ и пусть e_σ, $\sigma \in G$, — ее базисные элементы с операторами из G:

$$e_\sigma^{\tau} = e_{\sigma\tau}.$$

Легко видеть, что группа Δ операторно изоморфна группе $C^1(J)$ леммы 3, так что

$$H^n(\Delta) = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{6}$$

Пусть Γ обозначает подгруппу Δ, порожденную элементами $\gamma_\sigma = e_\sigma - e_1$, $\sigma \neq 1$ (γ_σ линейно независимы). Имеем:

$$\gamma_\sigma^{\tau} = e_{\sigma\tau} - e_\tau = \gamma_{\sigma\tau} - \gamma_\tau \tag{7}$$

(при этом $\gamma_1 = 0$). Из равенств (5) и (7) заключаем, что E/B и Γ операторно изоморфны, а значит:

$$H^n(E/B) \cong H^n(\Gamma), \quad n \geqslant 1. \tag{8}$$

Фактор-группа $J = \Delta/\Gamma$ есть бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $\bar{e}_1$ (класс смежности $\operatorname{mod} \Gamma$, содержащий e_1). Так как $e_1^\sigma \equiv e_1 \pmod \Gamma$, то $\bar{e}_1^\sigma = \bar{e}_1$, т. е. операторы из G действуют на J тождественным образом.

Применим теперь к группам E и Δ лемму 7. В силу (2) и (6), имеем

$$H^n(B) \cong H^{n-1}(E/B), \quad n \geqslant 2, \tag{9}$$

$$H^n(\Gamma) \cong H^{n-1}(\Delta/\Gamma), \quad n \geqslant 2. \tag{10}$$

Сопоставляя (4), (9), (8), (10), получаем:

$$H^n(R_0) \cong H^{n-2}(J), \quad n \geqslant 3.$$

Теорема A доказана.

§ 6. Дополнение к теореме A и ее обобщение

ТЕОРЕМА 3. *В предположениях теоремы* A *группа гомологий* $H^1(G, R_0)$ *есть нулевая группа, а* $H^2(G, R_0)$ *есть циклическая группа порядка* $m = \operatorname{ord} G$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями и результатами § 5. Покажем, что если $b \in \Gamma$ и $b^\tau = b$ при всех $\tau \in G$, то $b = 0$. Действительно, полагая для удобства $\gamma_1 = 0$, имеем (x_σ — целые числа):

$$\sum_\sigma x_\sigma \gamma_\sigma = b = b^\tau = \sum_\sigma (x_\sigma \gamma_{\sigma\tau} - x_\sigma \gamma_\tau) = \sum_\sigma x_{\sigma\tau^{-1}} \gamma_\sigma - \Big(\sum_\sigma x_\sigma\Big) \gamma_\tau,$$

откуда

$$x_{\sigma\tau^{-1}} = x_\sigma \quad \text{при} \quad \sigma \neq 1, \quad \sigma \neq \tau,$$

$$x_1 - \sum_\sigma x_\sigma = x_\tau \quad \text{при} \quad \tau \neq 1.$$

Из первого равенства следует, что

$$x_\sigma = x_\varphi = x \ \text{при} \ \sigma \neq 1, \ \varphi \neq 1,$$

а из второго — что

$$mx = 0.$$

Следовательно,

$$x = 0 \ \text{и} \ b = x_1\gamma_1 = 0,$$

что и утверждалось.

Так как Г операторно изоморфна фактор-группе E/B, то, применяя к группе E и ее подгруппе B вторую часть леммы 7, получаем, что группа $H^1(B)$, а значит, и изоморфная ей группа $H^1(R_0)$ — нулевые группы.

Для доказательства второй половины теоремы рассмотрим фактор-группу Δ/Γ. Здесь все смежные классы Δ по Γ удовлетворяют условию

$$\bar{a}^\sigma = \bar{a}.$$

Пусть $a \in \Delta$ и $a^\sigma = a$. Тогда

$$a = x\sum_\sigma e_\sigma = mxe_1 + x\sum_\sigma \gamma_\sigma \equiv mxe_1 \ (\text{mod}\ \Gamma).$$

Следовательно, инвариантные представители имеются только в классах вида $m\overline{xe_1}$. В силу леммы 7, группа $H^1(\Gamma)$, а вместе с ней и $H^2(R_0)$, есть циклическая группа порядка m. Теорема доказана.

Укажем здесь на одно обобщение теорем А и З. Пусть K — абелева группа с левыми операторами из G. Рассмотрим тензорное произведение $K*R_0$ групп K и R_0. Это есть абелева группа, порожденная элементами (a, r), где $a \in K$, $r \in R_0$, на которые накладываются соотношения:

$$(a_1, r) + (a_2, r) = (a_1 + a_2, r), \quad (a, r_1) + (a, r_2) = (a, r_1 + r_2)$$

$$(a, a_1, a_2 \in K; \ r, r_1, r_2 \in R_0).$$

Для $K*R_0$ группа G является группой двусторонних операторов:

$$\sigma(a, r) = (\sigma a, r), \quad (a, r)^\sigma = (a, r^\sigma), \quad \sigma \in G.$$

ТЕОРЕМА А′. *Если G — конечная группа, то при $n \geqslant 3$ группа гомологий $H^n(G, K*R_0)$ изоморфна группе $H^{n-2}(G, K)$.*

$H^1(G, K*R_0)$ изоморфна фактор-группе группы тех элементов $a \in K$, которые удовлетворяют условию $\sum_\sigma \sigma a = 0$, по подгруппе, порожденной элементами $\sigma a - a$, $\sigma \in G$, $a \in K$.

$H^2(G, K*R_0)$ изоморфна фактор-группе группы инвариантных относительно $\sigma \in G$ элементов K $(\sigma a = a)$ по подгруппе элементов, представимых в виде $\sum\limits_{\sigma} \sigma a$ при $a \in K$.

Теорема A′ превращается в теоремы A и 3, если в качестве K взять группу целых чисел J по сложению с тождественными левыми операторами. Доказательство теоремы A′ проводится вполне аналогично доказательству теоремы A. Отметим, что из теоремы A′ легко следуют теоремы о группах гомологий для циклической группы G, полученные в ([3]) при помощи теоремы B. Действительно, если G — циклическая группа, то в качестве F можно взять бесконечную циклическую группу, а тогда $K*R_0$ операторно изоморфна K.

§ 7. Доказательство теоремы B

Так как группа $H^n(\mathrm{Hom}(R_0, K))$ не зависит от представления $G \cong F/R$ (теорема 2), то для доказательства теоремы B берем регулярное представление. Группа R_0 в этом случае есть свободная абелева группа со свободными образующими $a_{\sigma,\tau}$, $\tau \neq 1$, и $a_{\sigma,1} = a_{1,1}$, причем операторы $\varphi \in G$ действуют на образующие R_0 по формуле:

$$a^{\varphi}_{\sigma,\tau} = a_{\tau,\varphi} - a_{\sigma\tau,\varphi} + a_{\sigma,\tau\varphi}. \tag{1}$$

Это установлено в начале § 5.

Рассмотрим группу $C^2 = C^2(G, K)$ леммы 4 (с двусторонними операторами из G). Каждой функции $f \in C^2$ поставим в соответствие гомоморфизм βf группы R_0 в K, определив его равенством:

$$(\beta f)(a_{\sigma,\tau}) = f_{\sigma,\tau} - f_{\sigma\tau,1} + f_{\tau,1}$$

определение законно, так как $(\beta f)(a_{\sigma,1}) = f_{\sigma,1} - f_{\sigma,1} + f_{1,1} = (\beta f)(a_{1,1})$) Покажем, что отображение $\beta : f \to \beta f$ есть операторный гомоморфизм группы C^2 на группу $\mathrm{Hom}(R_0, K)$. Действительно,

$$\beta(f_1 + f_2) = \beta f_1 + \beta f_2.$$

Если $h \in \mathrm{Hom}(R_0, K)$, то, определив $f \in C^2$ равенством

$$f_{\sigma,\tau} = h(a_{\sigma,\tau}),$$

будем иметь:

$$(\beta f)(a_{\sigma,\tau}) = f_{\sigma,\tau} - f_{\sigma\tau,1} + f_{\tau,1} = h(a_{\sigma,\tau})$$

(ибо $f_{\sigma,1} = f_{1,1}$), т. е. $\beta f = h$. Таким образом, β есть гомоморфизм на $\mathrm{Hom}(R_0, K)$. Далее,

$$\big(\beta(f^{\varphi})\big)(a_{\sigma,\tau}) = (f^{\varphi})_{\sigma,\tau} - (f^{\varphi})_{\sigma\tau,1} + (f^{\varphi})_{\tau,1} = [(\beta f)(a_{\sigma,\tau})]^{\varphi} = \big((\beta f)^{\varphi}\big)(a_{\sigma,\tau}),$$

т. е.

$$\beta(f^{\varphi}) = (\beta f)^{\varphi};$$

$$(\beta(\varphi f))(a_{\sigma,\tau}) = (\varphi f)_{\sigma,\tau} - (\varphi f)_{\sigma\tau,1} + (\varphi f)_{\tau,1} =$$
$$= f_{\tau,\varphi} - f_{\tau\varphi,1} + f_{\varphi,1} - f_{\sigma\tau,\varphi} + f_{\sigma\tau\varphi,1} - f_{\varphi,1} + f_{\sigma,\tau\varphi} - f_{\sigma\tau\varphi,1} + f_{\tau\varphi,1} =$$
$$= (\beta f)(a_{\tau,\varphi} - a_{\sigma\tau,\varphi} + a_{\sigma,\tau\varphi}) = (\beta f)\big(a^{\varphi}_{\sigma,\tau}\big) = (\varphi(\beta f))(a_{\sigma,\tau}),$$

т. е.

$$\beta(\varphi f) = \varphi(\beta f).$$

Следовательно, гомоморфизм β операторный. Если Q обозначает ядро гомоморфизма β (Q состоит из функций $f \in C^2$, удовлетворяющих условию $f_{\sigma,\tau} = f_{\sigma\tau,1} - f_{\tau,1}$), то фактор-группа C^2/Q операторно изоморфна группе $\mathrm{Hom}(R_0, K)$, а значит.

$$H^n(\mathrm{Hom}(R_0, K)) \cong H^n(C^2/Q) \quad (n \geqslant 1). \tag{2}$$

Пусть θ обозначает гомоморфизм группы $C^1 = C^1(G, K)$ в группу C^2, определяемый равенством:

$$(\theta g)_{\sigma,\tau} = g_{\sigma\tau} - g_{\tau}, \quad g \in C^1.$$

Гомоморфизм θ операторный:

$$(\theta(g^{\varphi}))_{\sigma,\tau} = (g_{\sigma\tau} - g_{\tau})^{\varphi} = \big[(\theta g)^{\varphi}\big]_{\sigma,\tau},$$

$$[\theta(\varphi g)]_{\sigma,\tau} = g_{\sigma\tau\varphi} - g_{\tau\varphi} = (\theta g)_{\sigma,\tau\varphi} = [\varphi(\theta g)]_{\sigma,\tau}.$$

Так как

$$(\theta g)_{\sigma,\tau} = g_{\sigma\tau} - g_1 - g_{\tau} + g_1 = (\theta g)_{\sigma\tau,1} - (\theta g)_{\tau,1},$$

то $\theta g \in Q$. Обратно, если $l \in Q$, то, полагая $g_{\sigma} = l_{\sigma,1}$, будем иметь:

$$(\theta g)_{\sigma,\tau} = l_{\sigma\tau,1} - l_{\tau,1} = l_{\sigma,\tau},$$

т. е. $\theta g = l$. Следовательно, θ есть операторный гомоморфизм группы C^1 на группу Q. Ядро P гомоморфизма θ состоит из функций $g \in C^1$, удовлетворяющих условию $g_{\sigma} = g_1$ (постоянные функции). Так как C^1/P и Q операторно изоморфны, то

$$H^n(Q) \cong H^n(C^1/P), \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Соответствие, ставящее функции $g \in P$ ее значение $g_{\sigma} = g_1$, дает нам операторный изоморфизм:

$$P \cong K. \tag{4}$$

В силу леммы 4 (при $k = 1,2$), к группам C^1 и C^2 применима лемма 7, согласно которой получаем:

$$H^n(C^2/Q) \cong H^{n+1}(Q), \quad n \geqslant 1, \tag{5}$$

$$H^n(C^1/P) \cong H^{n+1}(P), \quad n \geqslant 1. \tag{6}$$

Соединяя вместе результаты (2), (5), (3), (6), (4), получаем:

$$H^n(\mathrm{Hom}(R_0, K)) \cong H^{n+2}(K).$$

Теорема В доказана.

§ 8. Случай $n = 0$ теоремы В

Сохраняя обозначения § 2, рассмотрим в предположениях теоремы В группу Φ тех гомоморфизмов h группы R в K, которые удовлетворяют условию:

$$h(u_\sigma^{-1} r u_\sigma) = [h(r)]^\sigma, \quad r \in R, \quad \sigma \in Q.$$

При переходе к фактор-групе R_0 гомоморфизм h порождает операторный (гомоморфизм R_0 в K.)

В силу представления $G \cong F/R$ можно считать, что элементы $x \in F$ являются (правыми) операторами для K. Именно, если $x \in u_\sigma R$, то положим $a^x = a^\sigma$ для $a \in K$.

Пусть f есть одномерный цикл группы F в группе K:

$$f(xy) = f(x)^y + f(y), \quad x, y \in F.$$

Рассматривая функцию f на R, будем иметь:

$$f(r_1, r_2) = f(\ _1), + f(r_2), \quad r_1, r_2 \in R.$$

Следовательно, функция f, рассматриваемая на R, есть гомоморфизм R в K. Обозначим этот гомоморфизм через f_0. Имеем:

$$f_0(u_\sigma^{-1} r u_\sigma) = f(u_\sigma^{-1} r u_\sigma) = f(u_\sigma^{-1} r)^\sigma + f(u_\sigma) =$$
$$= f(u_\sigma^{-1})^\sigma + f(u_\sigma) + f(r)^\sigma = f_0(r)^\sigma,$$

так что $f_0 \in \Phi$. Обозначим через Ψ подгрупу группы Φ, состоящую из образов f_0 циклов $f \in Z^1(F, K)$ при гомоморфизме $f \to f_0$.

ТЕОРЕМА 4 (Eilenberg и Mac Lane). *Фактор-группа Φ/Ψ изоморфна группе гомологий $H^2(G, K)$.*

Доказательство разбивается (как и для теоремы В) на две части. Сначала докажем, что фактор-группа Φ/Ψ не зависит от представления $G \cong F/R$, а затем установим требуемый изоморфизм, использовав некоторое специальное представление.

1. Воспользуемся обозначениями § 4. Пусть Φ', Ψ' и Φ'', Ψ'' имеют те же значения для представлений $\cong G\ F' / R'$ и $G \cong F'' / R''$, рассматриваемых в § 4, какие Φ и Ψ имеют для представления $G \cong F / R$.

Для $h \in \Phi$ отображение $h \to h'$: $h'(r) = h(r)$, $r \in R'$, есть гомоморфизм Φ на Φ'. Если $h = f_0$ для некоторого $f \in Z^1(F, K)$, то

$$h' = (f')_0,$$

где

$$f' \in Z^1(F', K), \quad f'(x) = f(x), \quad x \in F'.$$

Следовательно, если $h \in \Psi$, то $h' \in \Psi'$. Обратно, пусть для некоторого $h \in \Phi$

$$h' \in \Psi'.$$

Значит, существует $g \in Z^1(F', K)$ с условием

$$h' = g_0.$$

В группе F построим цикл f такой, чтобы

$$f(v_\tau) = g(v_\tau) \text{ и } f(v_\mu) = h(v_\mu)$$

(f существует согласно лемме 8). Тогда для $r \in R'$ имеем:

$$f_0(r) = g(r) = h'(r) = h(r);$$

а значит, и для $r \in R$

$$f_0(r) = h(r), \quad f_0 = h, \quad h \in \Psi.$$

Из доказанного вытекает, что

$$\Phi / \Psi \cong \Phi' / \Psi'.$$

Аналогично получим

$$\Phi'' / \Psi'' \cong \Phi' / \Psi'.$$

А так как представление $G \cong F'' / R''$ регулярно, то тем самым доказана независимость Φ / Ψ от представления $G \cong F / R$.

2. Рассмотрим свободную группу F со свободными образующими v_σ, $\sigma \neq 1$, $\sigma \in G$ (v_1 полагаем равным 1). Отображение $v_\sigma \to \sigma$ порождает гомоморфизм F на G, и мы получаем представление

$$G \cong F / R,$$

где R — ядро этого гомоморфизма. Применяя лемму 1 (для представителей v_σ и образующих v_σ, $\sigma \neq 1$), получаем систему свободных образующих для R:

$$a_{\sigma, \tau} = v_{\sigma\tau}^{-1} v_\sigma v_\tau, \quad \sigma \neq 1, \quad \tau \neq 1.$$

Для удобства полагаем еще $a_{\sigma, 1} = a_{1, \tau} = 1$.

Каждый гомоморфизм h группы R в K взаимно однозначно соответствует нормализованной функции $g \in C^2(G, K)$:

$$g_{\sigma, \tau} = h(a_{\sigma, \tau}).$$

(Нормализованной называется функция, значение которой равно 0, если хоть один из аргументов равен 1.) Так как

$$v_{\varphi}^{-1} a_{\sigma,\tau} v_{\varphi} = a_{\sigma\tau,\varphi}^{-1} a_{\sigma,\tau\varphi} a_{\tau,\varphi},$$

то гомоморфизмам $h \in \Phi$ соответствуют функции, удовлетворяющие условию

$$g_{\sigma,\tau}^{\varphi} = g_{\tau,\varphi} - g_{\sigma\tau,\varphi} + g_{\sigma,\tau\varphi},$$

т. е. нормализованные циклы.

Если $h \in \Psi$, т. е. h может быть продолжен до цикла $f \in Z^1(F, K)$, то, полагая

$$f(v_\sigma) = f_\sigma,$$

будем иметь:

$$g_{\sigma,\tau} = h(a_{\sigma,\tau}) = f(v_{\sigma\tau}^{-1} v_\sigma v_\tau) = f(v_{\sigma\tau}^{-1} v_\sigma)^\tau + f_\tau =$$
$$= f(v_{\sigma\tau}^{-1})^{\sigma\tau} + f_\sigma^\tau + f_\tau = f_\tau - f_{\sigma\tau} + f_\sigma^\tau,$$

значит, в этом случае g — граница. Обратно, пусть h соответствует границе g:

$$g_{\sigma,\tau} = h(a_{\sigma,\tau}) = f_\tau - f_{\sigma\tau} + f_\sigma^\tau.$$

Строим цикл $f \in C^1(F, K)$ так, чтобы $f(v_\sigma) = f_\sigma$ (лемма 8). Тогда $f(a_{\sigma,\tau}) = h(a_{\sigma,\tau})$ и $h \in \Psi$.

Следовательно, фактор-группа Φ / Ψ изоморфна фактор-группе

$$Z^2(G, K) / B^2(G, K) = H^2(G, K).$$

Теорема 4 доказана.

Поступило
24. I. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фаддеев Д. К., О фактор-системах в абелевых группах с операторами, Доклады Ак. Наук СССР, 58 (1947), 361—364.
[2] Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., 1944.
[3] Eilenberg S. and MacLane S., Cohomology theory in abstract groups, I, Ann. of Math., 48 (1947), 51—78.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 385—388

Г. А. ФРЕЙМАН

О ГУСТОТЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе вводится понятие густоты последовательности, облегчающее исследование аддитивных свойств последовательностей нулевой плотности.

Назовем густотой α нижний предел последовательности чисел α_N, определяемых соотношениями: $\pi(N) = N^{\alpha_N}$ или $\alpha_N = \frac{\log \pi(N)}{\log N}$, где $\pi(N)$ — число чисел подпоследовательности A натурального ряда чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots, \tag{1}$$

удовлетворяющих неравенству $a_i \leqslant N$.

Итак, густота последовательности (1) определяется следующим образом:

$$\alpha = \varliminf \frac{\log \pi(N)}{\log N},$$

Возникает вопрос: чему равняется густота γ последовательности C, являющейся суммой последовательностей A и B с густотами, соответственно равными α и β?

В общем случае можно лишь утверждать, что

$$\max(\alpha, \beta) \leqslant \gamma \leqslant 1. \tag{2}$$

В качестве примера достижимости нижнего предела неравенства рассмотрим последовательность

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 2^i,\ 2^i + 1,\ \ldots,\ 2^i + [2^{i\alpha}],\ 2^{i+1},\ \ldots .$$

Густота этой последовательности, так же как и густота любой k-кратной последовательности при любом фиксированном k, равна α.

В качестве примера достижимости верхнего предела неравенства (2) рассмотрим две последовательности A и B, которые строятся следующим образом.

Пусть последовательность положительных чисел ε_i стремится к нулю, а числа d_i удовлетворяют соотношению $d_{i+1} > d_i^{\frac{1}{\varepsilon_i}}$.

Образуем последовательности A и B из расположенных в порядке возрастания чисел, удовлетворяющих соответственно соотношениям

$$d_{2i} \leqslant a < d_{2i+1}, \quad d_{2i+1} \leqslant b < d_{2i+2}.$$

Густота каждой из последовательностей A и B равна нулю. В то же время сумма их совпадает с натуральным рядом чисел.

Если, однако, рассматривать суммы таких последовательностей A и B, для которых соответствующие последовательности чисел α_N и β_N имеют

только один предел, то справедливо неравенство $\gamma \leqslant \alpha + \beta$.

Аналогичное неравенство $\eta_k \leqslant k\alpha$, дающее верхнюю границу густоты η_k последовательности kA, имеет место, как легко видеть, для любой последовательности (1) густоты α.

Отсюда, в частности, следует, что k-кратная сумма последовательности нулевой густоты имеет также нулевую густоту и не может поэтому совпасть с натуральным рядом ни при каком фиксированном k.

Пусть $\eta = \lim \eta_k$. Ясно, что условие $\eta = 1$ является необходимым для того, чтобы последовательность была базисом натурального ряда чисел.

В общем случае η, ввиду (2), ограничено: $\alpha \leqslant \eta \leqslant 1$.

Ниже рассматривается вопрос о величине η при наличии тех или иных условий, налагаемых на последовательность (1).

ТЕОРЕМА I. *Если любой член последовательности* (1) *может быть представлен в виде* $a_i = a_j + O(a_j^\sigma)$, *где* $\sigma < 1$, *а последовательность чисел* a_j *имеет нулевую густоту, то* $\eta \leqslant \sigma$.

Доказательство легко получить, если учесть, что любой член последовательности kA представляется в виде

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} = a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_k} + O((a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_k})^\sigma),$$

откуда следует, что $\eta_k \leqslant \sigma$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

ЛЕММА. *Если* d_i — *положительные числа*, $\sum_{i=1}^{r} d_i = S$, $d_i \leqslant d$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, *то*

$$\sum_{i=1}^{r} d_i^\beta \geqslant \frac{S}{d} d^\beta.$$

Представляя это неравенство в виде $\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{d_i}{d}\right)^\beta \geqslant \frac{S}{d}$, мы видим, что при $\beta = 1$ оно обращается в равенство, а при уменьшении β левая часть может только увеличиться.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА II. *Пусть сумма разностей между соседними числами последовательности* (1)

$$\sum_{a_i < N} a_i - a_{i-1},$$

взятая по тем i, *при которых* $a_i - a_{i-1} = O(a_i^{\sigma_1})$, *равняется* $N^{\sigma_{2N}}$. *Пусть, далее,* $\sigma_2 = \underline{\lim}\, \sigma_{2N}$. *Тогда*

$$\eta \geqslant \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{1 - \sigma_1}, \quad \eta_k \geqslant \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{1 - \sigma_1}(1 - \sigma_1^k).$$

Доказательство. Обозначим через Δ_i разность $a_i - a_{i-1}$ между двумя соседними членами последовательности (1).

Оценим снизу количество членов $a_i^{(k)} = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$ последовательности kA, для которых $\Delta_{i_r} = O(a_{i_r}^{\sigma_1})$, $a_{i_{r+1}} < \Delta_{i_r+1}$, $(r = 1, 2, \ldots k-1)$.

При σ_2', сколь угодно близком к σ_2, в случае $\sigma_2' < \sigma_2$, количество $a_{i_{r+1}}$ при фиксированном $a_{i_r} \gg \Delta_{i_r+1}^{\sigma_2'-\sigma_1}$. Количество чисел $a_{i_1} \gg N^{\sigma_2'-\sigma_1}$; количество чисел $a_i^{(k)} \gg \sum_{\Delta_{i_1}} \sum_{\Delta_{i_2}} \ldots \sum_{\Delta_{i_{k-1}}} \Delta_{i_{k-1}}^{\sigma_2'-\sigma_1}$;

Если верно неравенство

$$\sum_{\Delta_{i_1}}\sum_{\Delta_{i_2}}\ldots\sum_{\Delta_{i_{k-1}}}\Delta_{i_{k-1}}^{\sigma_2'-\sigma_1}\gg N^{(\sigma_2'-\sigma_1)(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_1^{k-1})},$$

то, на основании вышеприведенной леммы и неравенства $\Delta_{i_1}=O(N^{\sigma_1})$, мы имеем:

$$\sum_{\Delta_{i_1}}\sum_{\Delta_{i_2}}\ldots\sum_{\Delta_{i_k}}\Delta_{i_k}^{\sigma_2'-\sigma_1}\gg\sum_{\Delta_{i_1}}\Delta_{i_1}^{(\sigma_2'-\sigma_1)(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_1^{k-1})}\gg$$

$$\gg\frac{N^{\sigma_2'}}{N^{\sigma_1}}N^{\sigma_1(\sigma_2'-\sigma_1)(1+\sigma_1+\cdots+\sigma_1^{k-1})}=N^{(\sigma_2'-\sigma_1)(1+\sigma^1+\cdots+\sigma_1^{k})},$$

Индуктивный переход осуществлен. Из доказанного неравенства сразу следует утверждение теоремы.

В частном случае, когда $\sigma_2=1$, мы получим: $\eta=1$, $\eta_k\geqslant 1-\sigma_1^k$.

Приведем пример, показывающий, что в этом случае теорему усилить нельзя. Рассмотрим последовательность

$$q,\ 2q,\ ..,\ [\beta]\,q,\ r_1q^2,\ (r_1+1)\,q^2,\ldots,\ [\beta^2]\,q^2,\ r_2q^3,\ (r_2+1)\,q^3,\ldots,\ [\beta^3]\,q^3,\ r_3q^4,\ \ldots, \tag{3}$$

где $r_j=\left[\frac{\beta^j}{q}\right]+1$, $q>1$ — целое, $\beta>1$.

Густота этой последовательности

$$\alpha=\varliminf\frac{\log\pi(N)}{\log N}=\frac{\log\beta}{\log\beta q}.$$

Рассмотрим один из членов последовательности, полученной путем k-кратного сложения последовательности (3):

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}=s_1q^{j_1}+s_2q^{j_2}+\cdots+s_kq^{i_k},\quad i_1\geqslant i_2\geqslant\cdots\geqslant i_k.$$

Сумму первых двух членов можно представить следующим образом:

$$s_1q^{j_1}+s_2q^{j_2}=\overline{s}_1q^{\overline{j}_1}+s_2'q^{j_2}.$$

Величины $\overline{s}_1$, $\overline{j}_1$, s_2' определяются одной из следующих трех систем соотношений:

1. $\overline{j}_1=j_1$, $\overline{s}_1<[\beta^{j_1}]$, $s_2'\,q^{j_2}<q^{j_1}$
2. $\overline{j}_1=j_1$, $\overline{s}_1=[\beta^{j_1}]$, $s_2'\,q^{j_2}<r_{j_1}q^{j_1+1}-[\beta^{j_1}]\,q^{j_1}$
3. $\overline{j}_1=j_1+1$, $s_2'\,q^{j_2}<q^{j_1+1}$.

Последовательно преобразуя все члены, получим

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}=\overline{a}_{i_1}+\overline{a}_{i_2}+\cdots+\overline{a}_{i_k}=\overline{s}_1\,q^{\overline{j}_1}+\overline{s}_2\,q^{\overline{j}_2}+\cdots+\overline{s}_k\,q^{\overline{j}_k},$$

причем

$$\overline{a}_{i_1}=O(N),\ \overline{a}_{i_2}<\overline{a}_{i_1+1}-\overline{a}_{i_1}=O(N^{1-\alpha}),\ \ldots,\ \overline{a}_{i_k}<\overline{a}_{i_{k-1}+1}-\overline{a}_{i_{k-1}}=O(N^{(1-\alpha)^{k-1}}).$$

Поэтому число членов $\pi_k(N)$ последовательности kA удовлетворяет следующему неравенству:

$$\pi_k(N)\ll N^{\alpha+\alpha(1-\alpha)+\alpha(1-\alpha)^2+\cdots+\alpha(1-\alpha)^{k-1}}=N^{1-(1-\alpha)^k}.$$

Пользуясь этим неравенством и теоремой II, получим

$$\eta_k=1-(1-\alpha)^k.$$

Если наложить дополнительные условия на последовательность (1), то теорему II можно усилить.

ТЕОРЕМА III. *Если выполнены условия предыдущей теоремы и между единицей и любым N найдется такой отрезок натурального ряда чисел длины $N^{\sigma_1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, что любой входящий в него отрезок длины N^{σ_1} содержит хоть один член последовательности* (1), *то*

$$\eta \geqslant \sigma_2, \quad \eta_k \geqslant \sigma_2 - \sigma_1 \frac{\sigma_1^{k-1}}{(\sigma_1+\varepsilon)^{k-1}}.$$

Доказательство. Пусть числам

$$N^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\varepsilon}},\ N^{\frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1+\varepsilon)^2}},\ \ldots,\ N^{\frac{\sigma_1^{k-1}}{(\sigma_1+\varepsilon)^{k-1}}}$$

соответствуют упомянутые в формулировке теоремы отрезки

$$(e_1,\ e_1'),\quad (e_2,\ e_2'),\ \ldots,\ (e_{k-1},\ e_{k-1}'),$$

где

$$e_i > 0,\quad e_i' - e_i \geqslant N^{\frac{\sigma_1^i}{(\sigma_1+\varepsilon)^{i-1}}},\quad e_i' \leqslant N^{\frac{\sigma_1^i}{(\sigma_1+\varepsilon)^i}}.$$

Сумма длин всех отрезков

$$(a_{i-1} + e_1 + e_2 + \cdots + e_{k-1},\ a_i + e_1' + e_2' + \cdots + e_{k-1}'),$$

для которых $a_i - a_{i-1} = O(a_i^{\sigma_1})$,

$$\geqslant N^{\sigma_2'},$$

где σ_2' сколь угодно близко к σ_2.

Если отрезок длины $N^{\frac{\sigma_1^k}{(\sigma_1+\varepsilon)^{k-1}}}$ лежит в одном из этих отрезков, то он содержит по крайней мере одну точку последовательности kA. Поэтому

$$\pi_k(N) \geqslant N^{\sigma_2' - \sigma_1 \frac{\sigma_1^{k-1}}{(\sigma_1+\varepsilon)^{k-1}}}.$$

Полученное неравенство доказывает теорему.

В качестве примера к теоремам I и III рассмотрим следующую последовательность:

$$1, 2, \ldots, 2^i, 2^i + [\delta^i], 2^i + 2[\delta^i], \ldots, 2^i + [\beta^i][\delta^i], 2^{i+1}, \ldots,$$

где $\delta > 1$, $\beta > 1$, $\delta\beta < 2$. Густота этой последовательности $\alpha = \frac{\log\beta}{\log 2}$.

В силу теоремы I, $\eta \leqslant \frac{\log\delta\beta}{\log 2}$, а в силу теоремы III, $\eta \geqslant \frac{\log\delta\beta}{\log 2}$.

Таким образом, $\eta = \frac{\log\delta\beta}{\log 2}$. Приведенный пример показывает, что результаты теорем I и III не могут быть усилены без дополнительных условий, наложенных на последовательность.

Поступило
25. II. 1952

ЛИТЕРАТУРА

Шнирельман Л. Г., Об аддитивных свойствах чисел, Известия Донского политехнического ин-та, 14 (1930), 3—28.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 389—404

З. И. КОЗЛОВА

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТЕОРЕМАМИ КРАТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ *

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

В работе устанавливается взаимозависимость между теоремами кратной отделимости и на этой основе выводится ряд новых теорем.

Н. Н. Лузиным для A-множеств были установлены первая и вторая теоремы отделимости [(1), гл. III].

ТЕОРЕМА 1. *Два A-множества без общих точек отделимы B-множествами.*

ТЕОРЕМА 2. *Если у двух A-множеств удалить их общую часть, то остатки отделимы CA-множествами.*

Аналогичные теоремы были установлены Н. Н. Лузиным для B-множеств [(1), гл. II]. В дальнейшем эти теоремы обобщались многими авторами. В первую очередь здесь следует упомянуть работы П. С. Новикова (2)—(7), который впервые ввел понятие кратной отделимости и установил ряд случаев, в которых она имеет место. Впоследствии ряд теорем кратной отделимости был установлен Н. Н. Лузиным (8), В. К. Серпинским (9), С. Ружевичем (10), А. А. Ляпуновым (11)—(15) и мной (16). Впрочем, А. А. Ляпунов показал (14), что все известные теоремы о кратной отделимости являются частными случаями одной общей теоремы из теории операций над множествами (кроме случая элементов класса α и операции $\underline{\lim}$).

Теоремы о кратной отделимости имеют следующий вид.

Рассматривается конечная или счетная система множеств

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n,\ \ldots, \tag{1}$$

принадлежащих к некоторому классу K, и одна из теоретико-множественных операций Π (в конечном или счетном числе), $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, A-операция **, δs-операция *** и доказываются утверждения следующего типа:

---

* Краткое содержание настоящей работы было опубликовано в Докладах Академии Наук СССР [см. (16)].

** A-операцией над системой множеств $\{E_{n_1\ldots n_k}\}$ называют операцию вида:

$$A(\{E_{n_1 n_2\ldots n_k}\}) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots} \prod_k E_{n_1 n_2 \ldots n_k}.$$

*** δs-операцией с базой N над системой множеств, взятых в определенном порядке, $\mathscr{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$, называется операция

$$\Phi_n(\{E_n\}) = \sum_{\nu \subset N} \prod_{n_k \subset \nu} E_{n_k},$$

где N есть некоторая совокупность последовательностей целых положительных чисел $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$.

«Если результат соответствующей операции над множествами системы (1) пуст, то эти множества можно заключить в некоторые множества максимального тела класса K так, что результат той же операции над ними будет пуст» (теорема 1);

«Если результат соответствующей операции над множествами системы (1) не пуст, то, удалив его из каждого множества системы (1), получим такие множества, которые могут быть заключены в множества дополнительного класса CK так, что результат той же операции над этими последними множествами будет пуст» (теорема 2).

Целью настоящей статьи является систематизация ряда вопросов, связанных с кратной отделимостью, в первую очередь — выяснение взаимной зависимости теорем кратной отделимости.

Во всем дальнейшем (U) обозначает некоторую систему подмножеств множества X, (CU) — систему их дополнений.

Система U называется s-, d-(σ-, δ-) системой, если она инвариантна относительно конечных (счетных) сумм или пересечений, и m-системой, если общая часть систем (U) и (CU) [система $M(U)$] есть $(s; d)$-система.

Введем следующую систему аксиом кратной отделимости.

I группа аксиом отделимости.

АКСИОМА I_2. *Если*

$$E_1 \in (U), \quad E_2 \in (U) \quad и \quad E_1 \cdot E_2 = 0,$$

то существуют $H_1 \in M(U)$ *и* $H_2 \in M(U)$ *такие, что*

$$H_1 \supset E_1, \quad H_2 \supset E_2 \quad и \quad H_1 \cdot H_2 = 0.$$

АКСИОМА I_k*. *Если*

$$E_1 \in (U),\ E_2 \in (U), \ldots, E_k \in (U) \ и \ \prod_{n=1}^{k} E_n = 0,$$

то существуют $H_1 \in M(U),\ H_2 \in M(U), \ldots, H_k \in M(U)$ *такие, что*

$$H_n \supset E_n \quad (n = 1, 2, \ldots, k) \quad и \quad \prod_{n=1}^{k} H_n = 0.$$

АКСИОМА I_Π $[\mathrm{I}_{\underline{\lim}}, \mathrm{I}_{\overline{\lim}}, \mathrm{I}_A, \mathrm{I}_{\Phi_N}]$. *Если*

$$E_1 \in (U),\ E_2 \in (U), \ldots, E_n \in (U), \ldots \ и \ \prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0$$

[*соответственно*, $\underline{\lim}\, E_n = 0,\ \overline{\lim}\, E_n = 0,\ A(\{E_n\}) = 0,\ \Phi_N(\{E_n\}) = 0$],

то существуют $H_1 \in M(U),\ H_2 \in M(U), \ldots, H_n \in M(U), \ldots$ *такие, что*

$$H_n \supset E_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \ и \ \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0$$

[*соответственно* $\underline{\lim}\, H_n = 0,\ \overline{\lim}\, H_n = 0,\ A(\{H_n\}) = 0,\ \Phi_N(\{H_n\}) = 0$].

---

* k может являться любым целым числом. В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда соответствующие аксиомы выполняются при любом целом k.

II группа аксиом отделимости.

АКСИОМА II_2. *Если*

$$E_1 \in (U), \quad E_2 \in (U),$$

то существуют

$$H_1 \in (CU), \quad H_2 \in (CU)$$

такие, что

$$H_1 \supset E_1 - E_1 \cdot E_2, \quad H_2 \supset E_2 - E_1 \cdot E_2$$

и

$$H_1 \cdot H_2 = 0.$$

АКСИОМА II_k. *Если*

$$E_1 \in (U),\ E_2 \in (U), \ldots, E_k \in (U),$$

то существуют

$$H_1 \in (CU),\ H_2 \in (CU), \ldots, H_k \in (CU)$$

такие, что

$$H_n \supset E_n - \prod_{m=1}^{k} E_m \quad (n = 1, 2, \ldots, k)$$

и

$$\prod_{n=1}^{k} H_n = 0.$$

АКСИОМА II_Π $[\mathrm{II}_{\underline{\lim}}, \mathrm{II}_{\overline{\lim}}, \mathrm{II}_A, \mathrm{II}_{\Phi_N}]$. *Если*

$$E_1 \in (U),\ E_2 \in (U), \ldots, E_n \in (U), \ldots,$$

то существуют

$$H_1 \in (CU),\ H_2 \in (CU), \ldots, H_n \in (CU), \ldots$$

такие, что

$$H_n \supset E_n - \prod_{m=1}^{\infty} E_m \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

[*соответственно* $H_n \supset E_n - \underline{\lim}\, E_m$, $H_n \supset E_n - \overline{\lim}\, E_m$, $H_n \supset E_n - A(\{E_n\})$, $H_n \supset E_m - \Phi_{N_n}(\{E_m\})$ *] *и*

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0$$

[*соответственно* $\underline{\lim}\, H_n = 0$, $\overline{\lim}\, H_n = 0$, $A(\{H_n\}) = 0$, $\Phi_N(\{H_n\}) = 0$].

III группа аксиом отделимости. Аксиомы III_2, III_k, III_Π, $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$, III_A, III_{Φ_N} получаются из соответствующих аксиом группы II, если вместо условия $H_n \in (CU)$ наложить условие $H_n \in (U)$.

---

* См. ([14]), лемма 1.

IV группа аксиом отделимости. Аксиомы IV_2, IV_k, IV_Π, $\mathrm{IV}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$, IV_A, IV_{Φ_N} получаются из соответствующих аксиом группы II, если дополнительно потребовать, чтобы множества системы (U) были попарно без общих точек.

Известно, что A-множества удовлетворяют аксиомам I_2 [(1), стр. 157], I_k (2), I_Π (3), $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$ (11), II_2 [(1), стр. 210], II_k (10), II_Π (4), $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$ [(12), теорема IV], $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$ (12).

Элементы класса α(él α) удовлетворяют аксиомам I_2 [(1), стр. 67], I_k (2), I_Π (12), II_2 (17), II_k (10), II_Π (12), $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$ (12).

CA-множества удовлетворяют аксиомам III_2 [(1), стр. 217], III_k (10). Этим же аксиомам удовлетворяют и множества класса α(inf α), достижимые снизу.

Кроме того, известно, что элементы класса α(él α) не удовлетворяют аксиоме $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$ (12), CA-множества не удовлетворяют аксиоме I_2 [(1), стр. 220], I_k (12), $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$ (12), и множества класса α(inf α), достижимые снизу, не удовлетворяют аксиомам I_2, I_k (17).

Бóльшая часть этих теорем доказывалась независимо. Однако были уже известны отдельные случаи взаимной зависимости аксиом отделимости:

1. ТЕОРЕМА П. С. Новикова (2). *Если в (d, m)-системе выполняется аксиома I_2, то выполняется и аксиома I_k.*

2. ТЕОРЕМА С. Ружевич (10). *Если в (s, d)-системе выполняется аксиома II_2 (или аксиома III_2), то выполняется и аксиома II_k (или аксиома III_k).*

3. ТЕОРЕМА Н. Н. Лузина (1). *Если в системе (U) выполняется аксиома II_2 (или аксиома III_2), то в системе (CU) выполняется аксиома III_2 (или аксиома II_2).*

Мною в работе (16) был установлен ряд новых случаев взаимной зависимости аксиом отделимости.

ТЕОРЕМА I. *Если в σ-системе [δ-системе] (U) выполняется аксиома II_Π [соответственно III_Π], то выполняются и аксиомы II_k, II_2 [соответственно III_k, III_2].*

Доказательство. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k$ — произвольные множества σ-системы (U) и

$$E = \prod_{n=1}^{k} E_n.$$

Образуем множества $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_{k+1}, \ldots$, где $E_k = E_{k+1} = E_{k+2} = \ldots$. Ясно, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = \prod_{n=1}^{k} E_n = E.$$

В силу выполнения в системе (U) аксиомы II_Π, существуют множества

$$H_1, H_2, \ldots, H_k, H_{k+1}, \ldots$$

дополнительной системы (CU) такие, что

$$H_n \supset E_n - \prod_{m=1}^{\infty} E_m = E_n - E \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Множество

$$H = H_k \cdot H_{k+1} \cdot H_{k+2} \ldots \tag{2}$$

принадлежит системе (CU), так как она является δ-системой. Кроме того, $H \supset E_k - E$, так как каждый из множителей произведения (2) содержит в себе $E_k - E$; при этом $H_n \supset E_n - E$ $(n = 1, 2, \ldots, k-1)$, как отмечено выше. Далее,

$$H_1 \cdot H_2 \cdots H_{k-1} \cdot H = \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Следовательно, в σ-системе (U) выполняется аксиома II_k, в частности, аксиома II_2.

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА II. *Если в s-системе* (U) *выполняется аксиома* II_Π, *то выполняется и аксиома* $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$.

Доказательство. Пусть

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

— произвольная последовательность множеств s-системы (U) и пусть

$$E = \underline{\lim}\, E_n = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdots) + (E_2 \cdot E_3 \cdots) + (E_3 \cdots) + \cdots.$$

Рассмотрим все бесконечные произведения этой формулы и применим к каждому из них аксиому II_Π. Пусть

$$H_n^n,\ H_{n+1}^n, \ldots H_{n+m}^n, \ldots$$

— последовательность множеств дополнительной системы (CU) таких, что

$$H_{n+m}^n \supset E_{n+m} - \prod_{k=n}^{\infty} E_k \quad (m = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$\prod_{m=0}^{\infty} H_{n+m}^n = 0. \tag{3}$$

Так как

$$\underline{\lim}\, E_k \supset \prod_{k=n}^{\infty} E_k,$$

то

$$H_{n+m}^n \supset E_{n+m} - \prod_{k=n}^{\infty} E_k \supset E_{n+m} - \underline{\lim}\, E_k.$$

Множество

$$H_p = \prod_{n=1}^{p} H_p^n \tag{4}$$

принадлежит системе (CU), так как она является d-системой. Кроме того,

$$H_p \supset E_p - \underline{\lim}\, E_k,$$

так как каждый из множителей произведения (4), где $n \leqslant p$, содержит в себе $E_p - \underline{\lim} E_k$.

Докажем, что $\underline{\lim} H_p = 0$. Допустим, что $\underline{\lim} H_n \neq 0$ и пусть $x_0 \in \underline{\lim} H_p$. Это значит, что существует такое натуральное число n, что $x_0 \in H_i$ при всех $i \geqslant n$. Но

$$H_i = H_{n+m} = \prod_{k=1}^{n+m} H_{n+m}^k \text{ при } m = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Следовательно,

$$x_0 \in H_{n+m}^n \text{ при } m = 0, 1, 2, 3, \ldots ,$$

а это значит, что

$$x_0 \in \prod_{m=0}^{\infty} H_{n+m}^n,$$

что противоречит равенству (3).

Таким образом, $\underline{\lim} H_p = 0$, т. е. в системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$.

ТЕОРЕМА III. *Если в σ-системе (U) выполняется аксиома II_{Π}, то выполняется и аксиома $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$.*

Доказательство. Пусть

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

— произвольная последовательность множеств σ-системы (U). Пусть

$$E = \overline{\lim} E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \cdots) \cdot (E_2 + E_3 + \cdots) \cdot (E_3 + \cdots) \cdots = \\ = E_1' \cdot E_2' \cdot E_3' \ldots E_n' \ldots ,$$

где

$$E_n' = \sum_{k=n}^{\infty} E_n. \tag{5}$$

Так как система (U) является σ-системой, то множества $E_n' \in (U)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и образуют убывающую последовательность множеств этой системы:

$$E_1' \supset E_2' \supset \cdots \supset E_n' \supset \cdots . \tag{6}$$

В силу того что в системе (U) выполняется аксиома II_{Π}, найдется последовательность множеств дополнительной системы (CU)

$$H_1', H_2', \ldots, H_n', \ldots$$

таких, что

$$H_n' \supset E_n' - E \quad (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{7}$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n' = 0.$$

Множества

$$H_n = \prod_{k=1}^{\infty} H_k' \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

принадлежат дополнительной системе (CU), так как она является δ-системой, и образуют убывающую последовательность вложенных друг в друга множеств:

$$H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_n \supset \cdots .$$

Так как, на основании (7), (6) и (5),

$$H'_i \supset E'_i - E \supset E'_n - E \supset E_n - E$$

для $i \leqslant n$, то

$$H_n = H'_1 \cdot H'_2 \cdots H'_n \supset E_n - E = E_n - \overline{\lim}\, E_k.$$

Кроме того,

$$\overline{\lim}\, H_n = \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0,$$

так как это пересечение содержит своим сомножителем $\prod\limits_{n=1}^{\infty} H'_n = 0$. Следовательно, в σ-системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$.

ТЕОРЕМА IV. *Если в системе (U) выполняются аксиома I_2 и аксиома II_α (где α — любой из символов k, Π, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, A, Φ_N), то в системе (U) выполняется и аксиома I_α.*

Доказательство. Докажем теорему для случая $\alpha = \overline{\lim}$. Пусть

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

— множества системы (U), для которых $\overline{\lim}\, E_n = 0$. Так как в системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$, то существуют множества $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ дополнительной системы (CU) такие, что $H_n \supset E_n$ и $\overline{\lim}\, H_n = 0$.

Рассмотрим множества

$$E_n \subset H_n \text{ и } CH_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Множества E_n и CH_n принадлежат системе (U). Так как в системе (U) выполняется аксиома I_2, то существуют множества N_n максимального тела $M(U)$ такие, что

$$N_n \supset E_n, \quad CN_n \supset CH_n.$$

Ясно, что

$$N_n \subset H_n.$$

Отсюда

$$\overline{\lim}\, N_n \subset \overline{\lim}\, H_n = 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}\, N_n = 0.$$

Это значит, что в системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$.

Все остальные случаи доказываются аналогично.

Замечание 1. Легко видеть, что если в некоторой системе (U) выполняется аксиома II_α или же аксиома I_α, то выполняется и аксиома IV_α ($\alpha = 2$, k, Π, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, A, Φ_N).

Замечание 2. Если в некоторой системе выполняется одна из аксиом I_k, II_k, III_k, IV_k, то выполняются соответственно и аксиомы I_2, II_2, III_2, IV_2.

ТЕОРЕМА V. *Если в σ-системе (U) выполняется аксиома* IV_2 (IV_k), *то выполняются и аксиомы* $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$, $\mathrm{IV}_{\underline{\lim}}$ *и* IV_{Π}.

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$$

— произвольная последовательность множеств σ-системы (U) попарно без общих точек.

Зафиксируем n и рассмотрим все пары множеств $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_i$, где $i \neq n$. Так как в системе (U) выполняется аксиома IV_2, то существуют множества $H_n^{(i)}$ и $H_i^{(n)}$ системы (CU) такие, что

$$H_n^{(i)} \supset \mathcal{E}_n, \quad H_i^{(n)} \supset \mathcal{E}_i \text{ и } H_n^{(i)} \cdot H_i^{(n)} = 0.$$

Возьмем пересечение всех отделителей множества $\mathcal{E}_n$:

$$H_n = \prod_{i \neq n} H_n^{(i)}.$$

Множество $H_n \in (CU)$, так как (CU) является δ-системой. Кроме того, $H_n \supset \mathcal{E}_n$. Ясно, что

$$H_n \cdot H_m = 0 \tag{8}$$

при $n \neq m$, так как

$$H_n \cdot H_m \subset H_n^{(m)} \cdot H_m^{(n)} = 0.$$

В силу соотношения (8),

$$\overline{\lim} H_n = (H_1 + H_2 + H_3 + \cdots)\ (H_2 + H_3 + \cdots)\ (H_3 + \cdots) \cdots = 0.$$

Следовательно, в системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

ТЕОРЕМА VI. *Если в произвольной системе (U) выполняется аксиома* I_{Π}, *то выполняется и аксиома* I_2.

Доказательство. Пусть E_1 и E_2 — два произвольных множества системы (U), для которых $E_1 \cdot E_2 = 0$.

Образуем множества

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots,$$

где

$$E_2 = E_3 = \cdots = E_n = \cdots.$$

Очевидно, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cdot E_2 = 0.$$

Так как в системе (U) выполняется аксиома I_{Π}, то существуют множества

$$H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, \ldots$$

максимального тела системы (U) такие, что

$$H_n \supset E_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ и } \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Рассмотрим множество

$$H = H_2 \cdot H_3 \cdots H_n \cdots .$$

Легко видеть, что

$$H_1 \cdot H = \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Множество H_1 принадлежит максимальному телу системы (U), кроме того, $H_1 \supset E_1$, $H \subset E_2$. Но тогда множество CH_1 также принадлежит максимальному телу системы (U) и $CH_1 \supset E_2$. Следовательно, в системе (U) выполняется аксиома I_2.

ТЕОРЕМА VII[1]. *Если в δ-системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, то выполняется и аксиома III_2.*

Доказательство. Возьмем два произвольных множества E_1 и E_2 δ-системы (U) и образуем множества

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots,$$

где

$$E_1 = E_3 = \ldots = E_{2n-1} = \ldots,$$

$$E_2 = E_4 = \ldots = E_{2n} \quad = \ldots .$$

Ясно, что

$$\underline{\lim}\, E_n = E_1 \cdot E_2 = E.$$

Так как в системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, то существуют множества

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$$

системы (U) такие, что

$$H_n \supset E_n - \underline{\lim}\, E_k = E_n - E \text{ и } \underline{\lim}\, H_n = 0.$$

Но тогда и

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Рассмотрим множества

$$H_1^* = H_1 \cdot H_3 \cdots H_{2n-1} \cdots$$

и

$$H_2^* = H_2 \cdot H_4 \cdots H_{2n} \cdots .$$

H_1^* и H_2^* принадлежат δ-системе (U), причем

$$H_1^* \supset E_1 - E, \quad H_2^* \supset E_2 - E$$

и

$$H_1^* \cdot H_2^* = \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Следовательно, в системе (U) выполняется аксиома III_2.

ТЕОРЕМА VII[2]. *Если в δ-системе (U) выполняется аксиома I_2, а в системе (CU) выполняется аксиома $\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$, то в системе (CU) выполняется и аксиома I_2.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — два произвольных множества системы (CU), для которых $\mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_2 = 0$.

Построим множества

$$\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots,$$

где

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_3 = \ldots = \mathscr{E}_{2n-1} = \ldots,$$

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_4 = \ldots = \mathscr{E}_{2n} \quad = \ldots.$$

Ясно, что

$$\underline{\lim}\, \mathscr{E}_n = \mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_2 = 0.$$

Так как в системе (CU) выполняется аксиома $\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$, то существует последовательность множеств

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$$

максимального тела системы (U) таких, что

$$H_n \supset \mathscr{E}_n \quad \text{и} \quad \underline{\lim}\, H_n = 0.$$

Но тогда и

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Рассмотрим множества

$$H_1^* = H_1 \cdot H_3 \cdots H_{2n-1} \cdots$$

и

$$H_2^* = H_2 \cdot H_4 \cdots H_{2n} \cdots.$$

Оба множества H_1^* и H_2^* принадлежат δ-системе (U), причем

$$H_1^* \supset \mathscr{E}_1, \quad H_2^* \supset \mathscr{E}_2 \quad \text{и} \quad H_1^* \cdot H_2^* = \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Так как в системе (U) выполняется аксиома I_2, то существуют два множества N_1 и N_2 максимального тела системы (U) такие, что

$$N_1 \supset H_1^*, \quad N_2 \supset H_2^* \quad \text{и} \quad N_1 \cdot N_2 = 0.$$

Но

$$N_1 \supset H_1^* \supset \mathscr{E}_1, \quad N_2 \supset H_2^* \supset \mathscr{E}_2.$$

Это означает, что в системе (CU) выполняется аксиома I_2.

ТЕОРЕМА VIII. *Если в системе (U) выполняется аксиома I_α (α — любой из символов 2, k, Π, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, A, Φ_N), а в системе (CU) выполняется аксиома II_α, то в системе (CU) выполняется и аксиома I_α.*

Доказательство. Докажем теорему для случая счетного пересечения. Возьмем произвольную последовательность множеств

$$\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$$

системы (CU), для которой $\prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_n = 0$.

Так как в системе (CU) выполняется аксиома II_Π, то существует последовательность множеств

$$H_1,\ H_2, \ldots, H_n, \ldots$$

системы (U) таких, что

$$H_n \supset \mathscr{E}_n - \prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_k = \mathscr{E}_n \text{ и } \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

В силу выполнения аксиомы I_Π в системе (U), существует последовательность множеств

$$N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$$

максимального тела системы (U) таких, что

$$N_n \supset H_n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} N_n = 0.$$

Но тогда

$$N_n \supset H_n \supset \mathscr{E}_n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} N_n = 0.$$

Это означает, что в системе (CU) выполняется аксиома I_Π. Все остальные случаи доказываются аналогично.

ТЕОРЕМА IX. *Если в d-системе* (U) *выполняется аксиома* III_α (α — *любой из символов* 2, k, Π, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, A, Φ_N), *то в системе* (CU) *выполняется аксиома* IV_α.

Доказательство. Докажем теорему для случая $\alpha = \overline{\lim}$. Пусть

$$\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$$

— попарно не пересекающиеся множества системы (CU). Рассмотрим множества

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$$

системы (U) такие, что

$$H_n \supset \mathscr{E}_n$$

(они всегда существуют, например, $H_n = C\mathscr{E}_{n+1}$). Образуем последовательность новых множеств:

$$\begin{aligned} &E_1 = H_1, \\ &E_2 = C\mathscr{E}_1 \cdot H_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &E_n = C\mathscr{E}_1 \cdot C\mathscr{E}_2 \cdots C\mathscr{E}_{n-1} \cdot H_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Множества E_n принадлежат системе (U), так как она является d-системой и

$$E_n \supset \mathscr{E}_n,$$

в силу того, что

$$H_n \supset \mathscr{E}_n \text{ и } C\mathscr{E}_m \supset \mathscr{E}_n \text{ при } m \neq n.$$

Кроме того,

$$\mathscr{E}_n \cdot \overline{\lim}\, E_m = 0,$$

так как

$$\mathcal{E}_n \cdot E_{n+k} = 0$$

при $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Из выполнимости в системе (U) аксиомы $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$ следует существование последовательности множеств

$$N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$$

системы (U) таких, что

$$N_n \supset E_n - \overline{\lim}\, E_m \supset \mathcal{E}_n$$

и

$$\overline{\lim}\, N_n = 0.$$

Следовательно, в системе (CU) необходимо выполняется аксиома $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$.

Точно так же доказывается теорема для случая $\alpha = \underline{\lim}, \Pi, A, \Phi_N$. Случай $\alpha = 2, k$ доказывается аналогично, если положить

$$E_1 = H_1 \cdot C\mathcal{E}_2 \cdot C\mathcal{E}_3 \cdots C\mathcal{E}_k,$$
$$E_2 = H_2 \cdot C\mathcal{E}_1 \cdot C\mathcal{E}_3 \cdots C\mathcal{E}_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_k = H_k \cdot C\mathcal{E}_1 \cdot C\mathcal{E}_2 \cdots C\mathcal{E}_{k-1}.$$

ТЕОРЕМА X. *Если в (σ, d)-системе (U) выполняется аксиома III_{Π}, то выполняется и аксиома $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы III, если соотношения $H'_n \in (CU)$ заменить соотношениями $H'_n \in (U)$.

ТЕОРЕМА XI. *Если в (σ, d)-системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, то выполняется и аксиома $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$.*

Доказательство. Пусть дана произвольная последовательность множеств

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

из (σ, d)-системы (U) и пусть

$$E = \overline{\lim}\, E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \cdots) \cdot (E_2 + E_3 + \cdots)(E_3 + \cdots) \cdots =$$
$$= E'_1 \cdot E'_2 \cdot E'_3 \cdots E'_n \cdots,$$

где

$$E'_n = \sum_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Так как система (U) является σ-системой, то $E'_n \in (U)$ и образуют убывающую последовательность множеств этой системы:

$$E'_1 \supset E'_2 \supset \cdots \supset E'_n \supset \cdots.$$

Очевидно, что

$$\underline{\lim}\, E'_n = \prod_{n=1}^{\infty} E'_n = \overline{\lim}\, E_n = E.$$

Так как в системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, то существует последовательность множеств

$$H'_1, H'_2, \ldots, H'_n, \ldots$$

системы (U) таких, что

$$H'_n \supset E'_n - \underline{\lim}\, E'_m = E'_n - \overline{\lim}\, E_m$$

и

$$\underline{\lim}\, H'_n = 0.$$

Но тогда и

$$\prod_{n=1}^{\infty} H'_n = 0. \tag{9}$$

Положим

$$H_n = \prod_{k=1}^{n} H'_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Множества H_n принадлежат системе (U), так как она является d-системой и образует убывающую последовательность множеств

$$H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots .$$

Кроме того,

$$H_n = \prod_{k=1}^{n} H'_k \supset E_n - \overline{\lim}\, E_m,$$

так как

$$H'_k \supset E'_k - \overline{\lim}\, E_m \supset E'_n - \overline{\lim}\, E_m \supset E_n - \overline{\lim}\, E_m$$

при всех $k \leqslant n$, и

$$\overline{\lim}\, H_n = \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0,$$

вследствие того, что, в силу (9), (10),

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} H'_n = 0.$$

Таким образом, в (σ, m)-системе (U) выполняется аксиома $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$.

На основании указанной взаимной зависимости аксиом кратной отделимости независимого доказательства для B-, A- и CA-множеств требуют лишь следующие теоремы кратной отделимости.

1. Выполнимость аксиом I_2, II_{Π} для A-множеств и él α и дополнительно выполнимость аксиомы II_2 для él α.

2. Невыполнимость аксиомы $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$ для CA-множеств и él α и невыполнимость аксиомы IV_2 для inf α [см. ([18])].

Из основных теорем кратной отделимости, на основании теорем взаимной зависимости аксиом кратной отделимости, как следствие получаются все ранее известные теоремы кратной отделимости и ряд новых. Именно:

1. Так как A-множества образуют (σ, δ, m)-систему и удовлетворяют аксиомам I_2 и II_Π, то они удовлетворяют аксиомам I_k и I_Π, $\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$ на основании теоремы IV, аксиоме II_2, II_k — на основании теоремы I, аксиоме $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы II, аксиоме $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$ —на основании теоремы III, аксиомам IV_2, IV_k, IV_Π, $\mathrm{IV}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$ — на основании замечания 1 и не удовлетворяют аксиомам III_2, III_k на основании теоремы IX, аксиоме III_Π — на основании теоремы I, аксиоме $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы VII[1] и аксиоме $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$ — на основании теоремы IX.

2. Так как CA-множества образуют (σ, δ, m)-систему и не удовлетворяют аксиоме $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$, а A-множества удовлетворяют аксиоме II_2, то CA-множества удовлетворяют аксиоме III_2 на основании теоремы Н. Н. Лузина и аксиоме III_k — на основании теоремы С. Ружевич и не удовлетворяют аксиоме I_2 на основании теоремы V и замечания 1, аксиоме I_k — на основании замечания 2, аксиоме I_Π — на основании теоремы VI, аксиоме $\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы VII[2], аксиоме $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$ — на основании замечания 1, аксиомам II_2, II_k, II_Π, $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$ — на основании теоремы VIII и аксиомам IV_2, IV_k — на основании теоремы V.

3. Так как семейство él α образует (s, δ, m)-систему, удовлетворяет аксиомам I_2, II_Π, II_2 и не удовлетворяет аксиоме $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$, а семейство множеств inf α не удовлетворяет аксиоме IV_2, то система él α удовлетворяет аксиомам I_k, I_Π, $\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$ на основании теоремы V, аксиоме II_k — на основании теоремы С. Ружевич, аксиоме $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы II и аксиомам IV_2, IV_k, IV_Π, $\mathrm{IV}_{\underline{\lim}}$ — на основании замечания 1 и не удовлетворяет аксиомам $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$, $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$ на основании замечания 1, аксиоме III_2 — на основании теоремы IX, аксиоме III_k — на основании замечания 2, аксиоме III_Π — на основании теоремы I и аксиоме $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы VII[1].

4. Так как семейство множеств inf α образует (σ, d, m)-систему и не удовлетворяет аксиоме IV_2, а семейство él α удовлетворяет аксиоме II_2, но не удовлетворяет аксиоме $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$, то семейство множеств inf α удовлетворяет аксиоме III_2 на основании теоремы Н. Н. Лузина и аксиоме III_k — на основании теоремы С. Ружевич и не удовлетворяет аксиоме I_2 на основании замечания 1, аксиоме I_k — на основании замечания 2, аксиоме I_Π — на основании теоремы VI, аксиоме $\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы VII[2], аксиомам II_2, II_k, II_Π, $\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы VIII, аксиоме $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$ — на основании теоремы IX, аксиоме III_Π — на основании теоремы X, аксиоме $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$ — на основании теоремы XI и аксиоме IV_k — на основании замечания 2.

На основании изложенного можно дать сводку всего того, что известно по кратной отделимости для B-, A- и CA-множеств. В нижеследующих таблицах столбцы соответствуют аксиомам, а строки — системам множеств. Знак + означает, что для соответствующей системы множеств соответствующая аксиома выполнена; знак — означает, что аксиома не выполнена; знак ? означает, что выполнимость аксиомы нам неизвестна. Звездочкой отмечены аксиомы отделимости, известные ранее.

Те предложения, которые требуют самостоятельного доказательства, заключены в прямоугольники; все остальные являются следствиями из них.

I группа аксиом отделимости

Тип множества	Операции				
	I_s	I_k	$I_{п}$	$I_{\underline{\lim}}$	$I_{\overline{\lim}}$
A	$\boxed{+}^*$	+*	+*	+	+*
élα	$\boxed{+}^*$	+*	+*	+	—*
CA	—*	—*	—	—	—*
infα	—*	—*	—	—	?

II группа аксиом отделимости

Тип множества	Операции				
	II_s	II_k	$II_{п}$	$II_{\underline{\lim}}$	$II_{\overline{\lim}}$
A	+*	+*	$\boxed{+}^*$	+*	+*
élα	$\boxed{+}^*$	+*	$\boxed{+}^*$	+*	—
CA	—	—	—	—	—
infα	—	—	—	—	?

III группа аксиом отделимости

Тип множества	Операции				
	III_s	III_k	$III_{п}$	$III_{\underline{\lim}}$	$III_{\overline{\lim}}$
A	—	—	—	—	—
élα	—	—	—	—	?
CA	+*	+*	?	?	?
infα	+*	+*	—	—	—

IV группа аксиом отделимости

Тип множества	Операции				
	IV_s	VI_k	$IV_п$	$IV_{\underline{lim}}$	$IV_{\overline{lim}}$
A	$+^*$	$+^*$	$+^*$	$+^*$	$+^*$
élα	$+^*$	$+^*$	$+^*$	$+^*$	$\boxed{-}$
CA	—	—	?	?	$\boxed{-}$
infα	$\boxed{-}$	—	?	?	?

Сталинградский педагогический
институт им. А. С. Серафимовича

Поступило
19. III. 1952

ЛИТЕРАТУРА

1 Lusin N. N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930.

2 Новиков П. С., Об одном свойстве аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5 (1934), 273—276.

3 Новиков П. С., О счетно-кратной отделимости аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, III, № 3 (1934), 145—148.

4 Новиков П. С., Обобщение второго принципа отделимости, Доклады Ак. Наук СССР, IV, № 1—2 (1934), 8—11.

5 Новиков П. С., О некоторых системах множеств, инвариантных относительно А-операций, Доклады Ак. Наук СССР, III, № 8—9 (1934), 557—560.

6 Новиков П. С., Отделимость C-множеств, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., № 2 (1937), 253—264.

7 Новиков П. С., О кратной отделимости проективных множеств второго класса, Fundamenta Math., XXV (1935), 459—466.

8 Лузин Н. Н., Несколько замечаний о кратной отделимости, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5 (1934), 280—284.

9 Sierpiński W., Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B, Fundamenta Math., t. XXIII (1934), 292—303.

10 Ruziewicz S., Sur la séparabilité multiple des ensembles, Fundamenta Math., t. XXIV (1935), 199—205.

11 Ляпунов А. А., О счетно-кратной отделимости аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5 (1934), 276—280.

12 Ляпунов А. А., К теории кратной отделимости, Матем. сб. 1 (43) : 4 (1936), 503—510.

13 Ляпунов А. А., О кратной отделимости для A-операции, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., № 5—6 (1939), 539—552.

14 Ляпунов А. А., О кратной отделимости для δs-операций, Доклады Ак. Наук СССР, LIII, № 5 (1946), 399—402.

15 Ляпунов А. А., Об R-множествах, Доклады Ак. Наук СССР, № 9 (1947), 1887—1890.

16 Козлова З. И., О кратной отделимости, Доклады Ак. Наук СССР, XXVII, № 2 (1940), 108—111.

17 Lusin N., Les analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques, Fundamenta Math., t. XVI (1930), 48—76

18 Козлова З. И., Основные теоремы кратной отделимости, Ученые записки Сталинградского пединститута, вып. 1 (1948), 156—168.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

16 (1952), 405—426

А. Г. ЛУНЦ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА КОНТАКТНЫХ СХЕМ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В статье разрабатывается специальный математический аппарат для решения задач теории релейно-контактных схем. В частности, указывается алгебраический метод построения контактной схемы по заданным условиям ее работы.

Характерной чертой современного этапа автоматизации является комплексная автоматизация производственных процессов в целом. Автоматизируются не только отдельные производственные процессы, но и управление этими автоматизированными процессами. Решение проблем автоматизации в значительной степени основано на применении релейно-контактных схем. С ростом автоматизации усложняется строение применяемых релейно-контактных схем, и вопрос о создании теории конструирования схем становится все более актуальным. В. И. Шестаков [см. (3), (4)] показал, что математическим аппаратом для теории схем, имеющих некоторое специальное строение (П-схемы), может служить булевская алгебра [см. (1), (2)].

Используя теоретические результаты Шестакова, М. А. Гаврилов разработал методы применения теории к практическим задачам инженерной практики. Гаврилову принадлежит ряд теоретических и практических результатов, относящихся к теории общих и специальных схем (6). Настоящая статья содержит краткое изложение части результатов диссертационной работы автора и посвящена алгебраическим методам исследования и построения контактных схем. Аппаратом для таких методов служат матрицы и функции над булевской алгеброй.

§ 1. Булевская алгебра

Не останавливаясь на теории булевских алгебр, с которой читатель может ознакомиться в работах (1), (2), укажем только, что булевской алгеброй называется совокупность элементов $\mathfrak{A}$, над которыми введены две бинарные операции: «сложение» и «умножение», подчиняющиеся тем же законам, что и теоретико-множественная сумма и пересечение подмножеств какого-нибудь множества. Именно:

I. $(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc).$

II. $a+b=b+a, \quad ab=ba.$

III. $(a+b)c=ac+bc.$

IV. Существуют элементы «0» и «1» со свойствами:

$$a+0=a, \quad a\cdot 1=a.$$

V. $a+a=a.$

VI. Для каждого элемента a существует инверсный элемент $\overline{a}$ со свойствами:

$$a+\overline{a}=1, \quad a\overline{a}=0.$$

Здесь a, b, c обозначают любые элементы из алгебры $\mathfrak{A}$. Пишут $a \leqslant b$, если существует такой элемент $c \in \mathfrak{A}$, что $b=a+c$.

Простейшая булевская алгебра, которую мы в дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{B}$, состоит из двух элементов 0 и 1. Таблицы сложения и умножения в этой алгебре имеют вид:

$$0+0=0, \quad 1+0=0+1=1, \quad 1+1=1,$$
$$0 \cdot 0=0, \quad 1 \cdot 0=0 \cdot 1=0, \quad 1 \cdot 1=1,$$
$$\overline{0}=1, \quad \overline{1}=0.$$

Если к некоторой булевской алгебре $\mathfrak{A}$ присоединить символы x_1, $x_2, \ldots, x_n$ (а также символы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$), распространив на них законы I—VI, то получим новую булевскую алгебру $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которую исходная алгебра $\mathfrak{A}$ войдет как подалгебра. Элементы алгебры $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются функциями над алгеброй $\mathfrak{A}$ и обозначаются $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$. Каждая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, согласно определению, является некоторым выражением, составленным из элементов алгебры $\mathfrak{A}$ и символов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соединенных знаками сложения, умножения и инверсии. При этом одна и та же функция может быть представлена разными на вид выражениями. Например, функция $ax_1\overline{x}_2+x_1x_2$ (где $a \in \mathfrak{A}$) может быть представлена также как $x_1(a+x_2)$, так как из аксиом I—VI можно вывести равенство:

$$ax_1\overline{x}_2+x_1x_2=x_1(a+x_2).$$

Интересно отметить, что если значения двух функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ совпадают на алгебре $\mathfrak{B}$ (т. е. когда $x_1, x_2, \ldots, x$ принимают всевозможные значения из $\mathfrak{B}$), то

$$f(x_1, \ldots, x_n)=g(x_1, \ldots, x_n).$$

Отсюда, между прочим, следует, что для того чтобы доказать справедливость какой-нибудь формулы, записывающейся при помощи знаков сложения, умножения, инверсии элемента и равенства, например, $\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$, для любой булевской алгебры, достаточно проверить ее только для алгебры $\mathfrak{B}$, что, конечно, не представляет труда.

§ 2. Контактная схема

Контакты, которые мы рассматриваем, могут находиться только в одном из двух состояний: в замкнутом или разомкнутом. В замкнутом состоянии контакт замыкает цепь, в которую он последовательно включен, в разомкнутом — размыкает эту цепь.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ булевскую алгебру, состоящую только из двух элементов: 0 и 1.

Проводимостью контакта назовем переменную величину со значениями из $\mathfrak{B}$, равную 1, когда контакт замкнут, и 0, когда контакт разомкнут.

Звеном назовем соединение двух точек посредством одного контакта, а проводимостью звена — проводимость находящегося на нем контакта. Контактная схема представляет собой конечную совокупность точек в пространстве (узлы схемы), некоторые пары из которых соединены одним или несколькими звеньями. Вне контактной схемы находятся реле, которые воздействуют на контакты схемы. При этом каждый контакт схемы является либо «замыкающим», либо «размыкающим» контактом определенного реле. Каждое реле, независимо от других реле, может либо сработать, либо не сработать (отпустить); в первом случае оно замкнет все свои замыкающие контакты и разомкнет все свои размыкающие, во втором случае, наоборот, разомкнет замыкающие контакты и замкнет размыкающие.

Условимся обозначать контакты теми же символами, что и их проводимости. Именно, каждый замыкающий контакт реле A будем обозначать буквой a, а каждый размыкающий контакт этого же реле — символом $\bar{a}$ (поскольку проводимости замыкающего и размыкающего контактов одного и того же реле являются величинами инверсными). Таким образом, если $A_1, A_2 \ldots, A_m$ — реле рассматриваемой схемы, то проводимости $a_1, a_2 \ldots, a_m$ замыкающих контактов этих реле являются независимыми переменными величинами со значениями из алгебры $\mathfrak{B}$. Принятое нами условие о независимости работы реле позволяет в дальнейшем говорить только о контактной схеме и входящих в нее контактах (т. е. о переменных $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_m$) без всякого упоминания о реле. Поэтому для рассматриваемых в настоящей статье схем мы применяем название «контактные» вместо «релейно-контактные».

Если два определенных узла схемы M_1 и M_2 приняты за полюсы, то контактная схема называется двухполюсной. Проводимостью двухполюсной схемы называется переменная величина со значениями из алгебры $\mathfrak{B}$, равная 1, если при данном состоянии контактов в схеме имеется замкнутая (в электрическом смысле) цепь, соединяющая полюсы M_1 и M_2, и равная 0, если такой цепи в схеме нет. Проводимость двухполюсной схемы является вполне определенной функцией от переменных $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_m$, т. е. величиной булевской алгебры $\mathfrak{B}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Назовем элементарной цепью всякий сам себя не пересекающий путь на схеме, соединяющий полюсы M_1 и M_2. Элементарная цепь является последовательным соединением звеньев, поэтому она будет замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты все ее звенья. Следовательно, проводимость элементарной цепи равна произведению проводимостей составляющих ее звеньев (произведение в алгебре $\mathfrak{B}$ равно 1 тогда и только тогда, когда равны 1 все множители). Проводимость двухполюсной схемы равна сумме проводимостей всех ее элементарных цепей, так как схема замкнет свои полюсы тогда и только тогда, когда в ней имеется хотя бы одна замкнутая элементарная цепь (сумма в алгебре $\mathfrak{B}$ равна 1 тогда и только тогда, когда имеется слагаемое, равное 1). Например, схема на рис. 1а имеет три элементарные цепи и проводимость ее равна

$$ab + a\bar{c} + b\bar{c}$$

(через a, b, c обозначены замыкающие контакты трех реле). Схема на рис. 1б имеет четыре элементарные цепи и ту же проводимость

$$ab + a\bar{c}a + ba + b\bar{c}b = ab + a\bar{c} + b\bar{c}.$$

Определение проводимости заданной (например, чертежом) контактной схемы называется анализом схемы, а построение схемы по заданной проводимости — синтезом.

В практике конструирования контактных схем большая экономия контактов достигается за счет применения вентильных элементов. Вентильным элементом называется приспособление, которое при последовательном включении в цепь пропускает ток только в одном определенном направ-

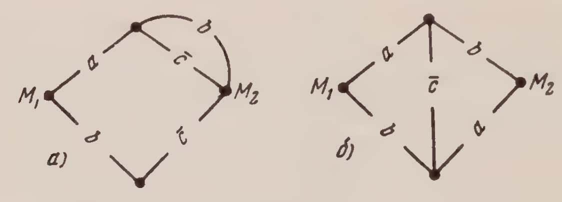


Рис. 1

лении. В качестве вентильных элементов могут быть применены, например, твердые выпрямители, электронные лампы и т. п. Проводимость вентильного элемента зависит от рассматриваемого направления цепи, в которую он последовательно включен. В одном направлении эта проводимость равна 1 (проводящее направление), в другом направлении — 0 (запирающее направление). Так же как и контакты, вентильный элемент на

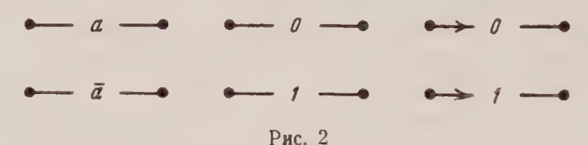


Рис. 2

схеме будем обозначать его проводимостью (т. е. 0 или 1) и стрелкой указывать то направление, в котором эта проводимость имеет место. Кроме того, мы будем допускать, что в контактной схеме, кроме контактов реле и вентильных элементов, могут встречаться «всегда замкнутые» и «всегда разомкнутые» контакты, обозначениями которых будут, соответственно, 1 и 0. Данное выше определение звена следует соответствующим образом дополнить (рис. 2). Наличие в двухполюсной контактной схеме вентильных элементов вынуждает различать две проводимости схемы: от одного полюса к другому и в обратном направлении.

§ 3. Матрицы над булевской алгеброй

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная булевская алгебра. Будем рассматривать матрицы над $\mathfrak{A}$ (т. е. с элементами из $\mathfrak{A}$). Как и для обычных матриц

(над полем), для матриц над $\mathfrak{A}$ можно ввести операции сложения и (матричного) умножения, которые мы будем записывать так:

$$A+B, \quad A\times B.$$

При этом будут иметь место также ассоциативные, коммутативный (для сложения) и дистрибутивный законы. Кроме этого, введем операцию «булевского» произведения: $AB=C$ матриц A и B, определив элементы матрицы C через элементы матриц A и B следующим образом:

$$c_{\alpha,\beta}=a_{\alpha,\beta}\,b_{\alpha,\beta}$$

для всех индексов α и β. Множество $\mathfrak{A}_n$ квадратных матриц n-го порядка над булевской алгеброй $\mathfrak{A}$ относительно операций сложения и булевского умножения является булевской алгеброй. Нулем этой алгебры является матрица O, все элементы которой нули, а единицей — матрица I, все элементы которой равны единице. Неравенство $A\leqslant B$ в алгебре $\mathfrak{A}_n$ означает, что $a_{\alpha,\beta}\leqslant b_{\alpha,\beta}$ при $\alpha, \beta=1, 2, \ldots, n$. Наконец, инверсной к A является матрица $\overline{A}$, элементы которой инверсны по отношению к соответствующим элементам матрицы A, т. е.

$$\{\overline{A}\}_{\alpha,\beta}=\overline{a}_{\alpha,\beta}.$$

Если $A\leqslant B$, а C — любая матрица из $\mathfrak{A}_n$, то

$$A\times C\leqslant B\times C \text{ и } C\times A\leqslant C\times B.$$

Действительно, из $A\leqslant B$ следует, что $A+B=B$; далее,

$$A\times C+B\times C=(A+B)\times C=B\times C,$$

откуда вытекает, что

$$A\times C\leqslant B\times C.$$

Пользуясь только что доказанными неравенствами, легко показать, что если $A_1\leqslant A_2$ и $B_1\leqslant B_2$, то

$$A_1\times B_1\leqslant A_2\times B_2.$$

Обозначим через E матрицу с единицами по главной диагонали и нулями на остальных местах. Для любой матрицы A имеет место:

$$A\times E=E\times A=A.$$

Матрицу A назовем «нормированной», если ее диагональные элементы равны 1, т. е. $A\geqslant E$. Из вышеприведенных неравенств для нормированной матрицы A следуют неравенства:

$$E\leqslant A\leqslant A^2\leqslant A^3\leqslant\ldots, \tag{1}$$

где $A^2=A\times A$, $A^3=A^2\times A$ и т. д.

Докажем, что для нормированной матрицы A всегда имеет место равенство:

$$A^{n-1}=A^n, \tag{2}$$

где n — порядок матрицы A. Обозначая элементы матрицы A^k через $a^k_{\alpha,\beta}$, будем иметь:

$$a^n_{k_0, k_n} = \sum_{k_1, \ldots, k_{n-1}=1}^{n} a_{k_0, k_1} a_{k_1, k_2} \cdots a_{k_{n-1}, k_n}.$$

Если $k_0 = k_n$, то

$$a^n_{k_0, k_n} = 1 = a^{n-1}_{k_0, k_n}.$$

Пусть $k_0 \neq k_n$. Рассмотрим слагаемое

$$a_{k_0, k_1} a_{k_1, k_2} \cdots a_{k_{n-1}, k_n}. \tag{3}$$

Среди $n+1$ чисел $k_0, k_1, \ldots, k_n$ должны быть одинаковые. Пусть $k_i = k_j$, где $i < j$, тогда, опуская в (3) часть множителей, получим неравенства:

$$a_{k_0, k_1} \cdots a_{k_{n-1}, k_n} \leqslant a_{k_0, k_1} \cdots a_{k_{i-1}\, k_i}\, a_{k_j, k_{j+1}} \cdots a_{\; n-1, k_n} \leqslant a^{n-(j-i)}_{k_0, k_n} \leqslant a^{n-1}_{k_0, k_n}.$$

Таким образом, $a^n_{k_0, k_n} \leqslant a^{n-1}_{k_0, k_n}$, т. е. $A^n \leqslant A^{n-1}$. Из этого неравенства и неравенств (1) следует доказываемое равенство (2).

Наименьшее натуральное число r, для которого $A^r = A^{r+1}$, назовем «показателем» нормированной матрицы A. Из (2) следует, что всегда (считая $n > 1$) $r < n$. Из $A^r = A^{r+1}$ вытекает: $A^k = A^r$ при всяком $k \geqslant r$.

§ 4. Контактные многополюсники

Пусть имеется контактная схема F. Если указана некоторая последовательность $M_1, M_2, \ldots, M_n$ из узлов схемы F, то контактная схема F называется n-полюсной, а указанные узлы — ее полюсами. Обозначим

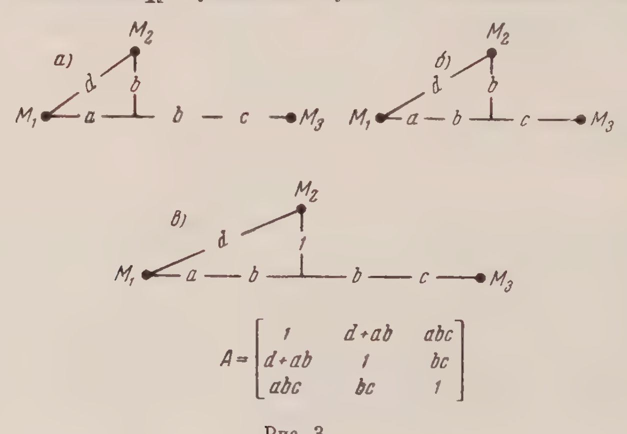


Рис. 3

через $a_{\alpha, \beta}$ сумму проводимостей всевозможных элементарных цепей схемы F, идущих от полюса M_α к полюсу M_β, минуя остальные полюсы (имеются в виду проводимости цепей в направлении от M_α к M_β). Положим $a_{\alpha,\beta} = 0$, если таких цепей в схеме не имеется, и $a_{\alpha, \beta} = 1$, если M_α и M_β совпадают. Величину $a_{\alpha, \beta}$ назовем «непосредственной» проводимостью от полюса M_α к полюсу M_β. Непосредственные проводимости между полюсами запишем в виде нормированной квадратной матрицы

n-го порядка A. Если в контактной схеме F отсутствуют вентильные элементы, то матрица A будет симметрической. Матрица A не однозначно описывает многополюсную схему. Например, трехполюсным схемам (рис. 3) будет отвечать одна и та же матрица.

Всякую n-полюсную контактную схему, непосредственные проводимости которой образуют матрицу A, будем называть контактным n-полюсником A. Понятие многополюсника может быть применено для алгебраической записи контактных схем. Для того чтобы записать контактную схему в виде матрицы, надо ее рассматривать как многополюсник, причем за полюсы взять все узлы данной схемы. Если за полюсы возьмем не все узлы, то получим приблизительное описание строения схемы.

Обозначим через $\chi_{\alpha,\beta}(A)$ сумму проводимостей всех элементарных цепей схемы F, идущих от полюса M_α к полюсу M_β. Положим $\chi_{\alpha,\beta}(A)=0$, если таких цепей в схеме не имеется, и $\chi_{\alpha,\beta}(A)=1$, если M_α совпадает с M_β. Величину $\chi_{\alpha,\beta}(A)$ назовем «полной» проводимостью от полюса M_α к полюсу M_β многополюсника A (эта величина не зависит от способа реализации многополюсника A в виде схемы F). Квадратную матрицу $\chi(A)$, составленную из n^2 величин $\chi_{\alpha,\beta}(A)$, назовем «характеристикой» многополюсника A. Например, характеристика трехполюсника A, реализации которого изображены на рис. 3, равна

$$\chi(A)=\begin{bmatrix} 1 & d+ab & bc(a+d) \\ d+ab & 1 & bc \\ bc(a+d) & bc & 1 \end{bmatrix}.$$

Два n-полюсника A и B, имеющие одинаковые характеристики $\chi(A)=\chi(B)$, будем называть «эквивалентными», записывая это $A\sim B$. Матрица $\chi(A)$ в известном смысле характеризует работу многополюсника A. Пусть, например, часть некоторой электрической схемы относительно точек соприкосновения этой части с остальными частями схемы представляет собой контактный многополюсник A. Тогда, не изменяя работы схемы в целом, можно многополюсник A заменить любым другим эквивалентным многополюсником.

Для полной проводимости можно написать следующее выражение, вытекающее из самого определения:

$$\chi_{\alpha,\beta}(A)=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)} a_{\alpha,k_1}a_{k_1,k_2}\cdots a_{k_m,\beta}, \tag{4}$$

где $(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ пробегает всевозможные размещения из элементов $1,2,\ldots,\alpha-1,\ \alpha+1,\ldots,\beta-1,\beta+1,\ldots,n$ по $m=0,1,2,\ldots,n-2$ элементов. При этом «размещению из 0 элементов» в сумме (4) соответствует слагаемое $a_{\alpha\beta}$.

Исходя из формулы (4), мы можем понятие «характеристики» перенести на нормированные матрицы над любой булевской алгеброй $\mathfrak{A}$. В дальнейшем под $\mathfrak{A}$ мы будем понимать произвольную булевскую алгебру; однако, имея в виду только приложения к контактным схемам, мы на протяжении всей статьи будем пользоваться соответствующей этим схемам терминологией. В частности, нормированные матрицы над $\mathfrak{A}$ час-

будем называть многополюсниками. В приложениях к контактным схемам под алгеброй $\mathfrak{A}$ следует понимать алгебру $\mathfrak{B}(a_1, a_2 \ldots, a_m)$ всех функций над $\mathfrak{B}$ от проводимостей $a_1, a_2, \ldots a_m$ замыкающих контактов.

Возникают две основные задачи:

а) определить характеристику $\chi(A)$ заданного многополюсника A (анализ многополюсника);

б) найти многополюсники A, имеющие заданную характеристику $\chi(A)$ (синтез многополюсника).

Формула (4), выражающая элементы матрицы $\chi(A)$ через элементы матрицы A, хотя и дает способ анализа многополюсника, но для практического применения совершенно непригодна. В работе дается несколько решений поставленных задач, причем задача синтеза рассматривается в более общей формулировке, чем это сделано выше, что вызвано потребностями электротехнической инженерной практики.

§ 5. Первый способ анализа многополюсников

Пусть A — произвольная квадратная матрица n-го порядка над алгеброй $\mathfrak{A}$. «Определителем» $|A|$ матрицы A назовем функцию ее элементов, составленную следующим образом:

$$|A| = \sum_{S \in \mathfrak{S}_n} a_{1, S1}\, a_{2, S2} \cdots a_{n, Sn}, \tag{5}$$

где S пробегает все подстановки из n чисел: $1, 2, \ldots, n$ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, а «Sk» обозначает то число, в которое подстановка S переводит число k. Формула (5) отличается от определения обычного определителя только отсутствием символа Кронекера, поэтому естественно ожидать, что теория таких определителей в некоторой степени окажется аналогичной теории обычных определителей. Мы перечислим некоторые свойства таких определителей.

I. Определитель не изменится от перестановки строк со столбцами.

II. Определитель не изменится от перестановки двух строк (столбцов).

III. Определитель может быть разложен по элементам какого-нибудь ряда:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha, k} A_{\alpha, k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k, \beta} A_{k, \beta}, \tag{6}$$

где $A_{\alpha, k}$ — минор определителя $|A|$, т. е. определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из определителя $|A|$ вычеркиванием α-й строки и k-го столбца. Имеет место и более общее разложение (теорема Лапласа).

IV. Если все элементы одного ряда имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

V. Если элементы какого-нибудь ряда суть суммы из двух слагаемых, то определитель представляется как сумма двух определителей.

Матрицу, составленную из миноров матрицы A,

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} \dots A_{n,1} \\ \dots\dots\dots \\ A_{1,n} \dots A_{n,n} \end{bmatrix},$$

назовем «взаимной» к матрице A.

Первый способ анализа многополюсников дает следующая

ТЕОРЕМА. *Характеристика нормированной матрицы A равна матрице, взаимной к A, т. е.*

$$\chi_{\alpha,\beta}(A) = A_{\beta,\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n). \tag{7}$$

Доказательство. Прежде всего выведем выражение для минора $A_{\beta,\alpha}$, справедливое для любой квадратной матрицы. Для этого запишем формулу (5) в несколько иной форме. Пусть α и β — фиксированные индексы. Разложим каждую подстановку S на произведение независимых циклов. Пусть $(\beta, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m)$ — тот цикл подстановки S, который содержит символ β $(m \leqslant n)$. Тогда слагаемое суммы (5), соответствующее подстановке S, имеет множители $a_{\beta,\beta_2}, a_{\beta_2,\beta_3}, \dots, a_{\beta_m,\beta}$; обозначив произведение остальных множителей через a_S, перепишем формулу (5) в виде:

$$|A| = \sum_{S \in \mathfrak{S}_n} a_{\beta,\beta_2} a_{\beta_2,\beta_3} \cdots a_{\beta_m,\beta} a_S, \tag{8}$$

где m, конечно, зависит от подстановки S. Если теперь в тождестве (8) положить $a_{\beta,k} = 0$ при $k \neq \alpha$ и $\alpha_{\beta,\alpha} = 1$, то левая часть обратится в минор $A_{\beta,\alpha}$ (свойство III определителей), а в правой части останутся только слагаемые, в которых $\beta_2 = \alpha$, т. е. только слагаемые, соответствующие подстановкам S, переводящим символ β в символ α. Таким образом, получим:

$$A_{\beta,\alpha} = \sum_{S\beta = \alpha} a_{\alpha,\beta_3} a_{\beta_3,\beta_4} \cdots a_{\beta_m,\beta} a_S, \tag{9}$$

где сумма распространена только на те подстановки из $\mathfrak{S}_n$, которые переводят β в α.

Предположим теперь, что A — нормированная матрица. Среди подстановок S, имеющих фиксированный цикл $(\beta, \alpha, \beta_3, \dots, \beta_m)$, содержится и одноцикленная подстановка

$$S' = (\beta, \alpha, \beta_3, \dots, \beta_m).$$

Соответствующее этой подстановке слагаемое суммы (9) имеет вид

$$a_{\alpha,\beta_3} a_{\beta_3,\beta_4} \cdots a_{\beta_m,\beta},$$

так как в этом случае $a_{S'} = 1$ (вследствие нормированности матрицы A). Все слагаемые, соответствующие подстановкам S, имеющим фиксированный цикл S' и отличным от S', можно в сумме (9) опустить, так как

$$a_{\alpha,\beta_3} \cdots a_{\beta_m,\beta} a_S \leqslant a_{\alpha,\beta_3} \cdots a_{\beta_m,\beta}.$$

Таким образом,

$$A_{\beta,\alpha} = \sum_{S'\beta=\alpha} a_{\alpha,\beta_3} a_{\beta_3,\beta_4} \cdots a_{\beta_m,\beta}, \tag{10}$$

где $S' = (\beta, \alpha, \beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_m)$ пробегает одноцикленные подстановки, переводящие символ β в α. Правая часть равенства (10) совпадает с правой частью равенства (4), откуда и следует доказываемое равенство (7).

Из формул (7) и (10) следует неравенство:

$$\chi(A) \leqslant A^{n-1}. \tag{11}$$

Действительно, для каждого слагаемого правой части (10) имеем:

$$a_{\alpha,\beta_3} \cdots a_{\beta_m,\beta} \leqslant a^{m-1}_{\alpha,\beta} \leqslant a^{n-1}_{\alpha,\beta},$$

так как $m \leqslant n$. Следовательно, для всей суммы (10) получаем:

$$\chi_{\alpha,\beta}(A) = A_{\beta,\alpha} \leqslant a^{n-1}_{\alpha,\beta}.$$

§ 6. Второй способ анализа многополюсников

Второй способ анализа вытекает из формулы

$$\chi(A) = A^r, \tag{12}$$

где r — показатель нормированной матрицы A. Так как $A^r = A^{n-1}$ и имеет место неравенство (11), то для доказательства формулы (12) достаточно показать, что

$$A^{n-1} \leqslant \chi(A). \tag{13}$$

Пусть k_1 и k_n — фиксированные индексы и $k_1 \neq k_n$. Имеем:

$$a^{n-1}_{k_1,k_n} = \sum_{k_2,\ldots,k_{n-1}=1}^{n} a_{k_1,k_2} a_{k_2,k_3} \cdots a_{k_{n-1},k_n}. \tag{14}$$

Рассмотрим слагаемое $a_{k_1,k_2} a_{k_2,k_3} \cdots a_{k_{n-1},k_n}$. Если среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ есть равные, например, $k_i = k_j$, где $i < j$, то, опуская множители $a_{k_i,k_{i+1}}, a_{k_{i+1},k_{i+2}}, \ldots, a_{k_{j-1},k_j}$, получим неравенство:

$$a_{k_1,k_2} \cdots a_{k_{n-1},k_n} \leqslant a_{k_1,k_2} \cdots a_{k_{i-1},k_i} a_{k_j,k_{j+1}} \cdots a_{k_{n-1},k_n}.$$

Если среди оставшихся индексов $k_1, k_2, \ldots, k_i, k_{j+1}, \ldots, k_n$ есть равные, то, подобно предыдущему, опять опускаем некоторые множители и т. д., пока не придем к неравенству:

$$a_{k_1,k_2} \cdots a_{k_{n-1},k_n} \leqslant a_{k_1,l_1} a_{l_1,l_2} \cdots a_{l_m,k_n},$$

где среди индексов $k_1, l_1, l_2, \ldots, l_m, k_n$ уже нет равных. Но тогда

$$a_{k_1,l_1} \cdots a_{l_m,k_n} \leqslant \chi_{k_1,k_n}(A)$$

и, следовательно, для суммы (14) получаем неравенство:

$$a^{n-1}_{k_1,k_n} \leqslant \chi_{k_1,k_n}(A),$$

справедливое для всех значений индексов k_1 и k_n (в том числе и при $k_1 = k_n$), т. е. неравенство (13).

В частности, для двухполюсника

$$\chi(A) = A \quad (n = 2). \tag{15}$$

Из доказанного равенства (12) (см. также конец параграфа 3) вытекает:

$$A \times \chi(A) = \chi(A) \times A = \chi(A)^2 = \chi(\chi(A)) = \chi(A). \tag{16}$$

Если $A \leqslant B$, где A и B — нормированные матрицы, то $A^k \leqslant B^k$, следовательно, и

$$\chi(A) \leqslant \chi(B).$$

Характеристиками являются нормированные матрицы, показатель которых равен единице, и только они.

Для того чтобы нормированная матрица A была характеристикой, необходимо и достаточно, чтобы ее элементы удовлетворяли неравенствам:

$$a_{\alpha, k} a_{k, \beta} \leqslant a_{\alpha, \beta} \tag{17}$$

при всех индексах α, β, k. Действительно, из (17) следует:

$$a_{\alpha, \beta} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha, k} a_{k, \beta} = a^2_{\alpha, \beta},$$

$$A \geqslant A^2,$$

откуда $A = A^2$ и $r = 1$. Обратно, если A — характеристика, то $A = A^2$, откуда

$$a_{\alpha, \beta} = \sum_{k=1}^{n} a_{\alpha, k} a_{k, \beta} \geqslant a_{\alpha, k} a_{k, \beta}$$

для любого k.

§ 7. Характеристическая функция

Всякой нормированной матрице A из $\mathfrak{A}_n$ сопоставим функцию от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha, \beta} x_\alpha \overline{x}_\beta, \tag{18}$$

коэффициентами которой служат элементы матрицы A. Такого вида функцию будем называть «характеристической функцией», именно, характеристической функцией матрицы (или многополюсника) A. Докажем две леммы:

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*:

$$f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{\chi(A)}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{19}$$

Доказательство.

$$f_{A^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a^2_{\alpha, \beta} x_\alpha \overline{x}_\beta = \sum_{\alpha, \beta, k=1}^{n} a_{\alpha, k} a_{k, \beta} x_\alpha \overline{x}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta, k=1}^{n} a_{\alpha, k} a_{k, \beta} x_\alpha \overline{x}_\beta (x_k + \overline{x}_k) = \sum_{\alpha, \beta, k=1}^{n} a_{\alpha, k} a_{k, \beta} x_\alpha \overline{x}_\beta x_k +$$

$$+ \sum_{\alpha, \beta, k=1}^{n} a_{\alpha, k} a_{k, \beta} x_\alpha \overline{x}_\beta \overline{x}_k \leqslant \sum_{\alpha, \beta, k=1}^{n} a_{k, \beta} x_k \overline{x}_\beta + \sum_{\alpha, \beta, k=1}^{n} a_{\alpha, k} x_\alpha \overline{x}_k =$$

$$= f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_A(x_1, \ldots, x_n),$$

т. е. $f_{A^2} \leqslant f_A$; с другой стороны, из $A \leqslant A^2$ следует противоположное неравенство: $f_A \leqslant f_{A^2}$, таким образом,

$$f_A = f_{A^2}.$$

Применяя последовательно доказанное равенство, получим:

$$f_A = f_{A^2} = f_{A^4} = f_{A^8} = \ldots = f_{\chi(A)},$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Каждая строка характеристики матрицы A является решением «характеристического» уравнения $f_A(x_1, \ldots, x_n) = 0$, т. е.*

$$f_A(\chi_{\gamma, 1}(A), \chi_{\gamma, 2}(A), \ldots, \chi_{\gamma, n}(A)) = 0 \tag{20}$$

при любом $\gamma = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пользуясь тем, что $\chi(A) \times A = \chi(A)$, получаем:

$$f_A(\chi_{\gamma, 1}(A), \ldots \chi_{\gamma, n}(A)) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha, \beta} \chi_{\gamma, \alpha}(A) \overline{\chi}_{\gamma, \beta}(A) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} \{\chi(A) \times A\}_{\gamma, \beta} \overline{\chi}_{\gamma, \beta}(A) = \sum_{\beta=1}^{n} \chi_{\gamma, \beta}(A) \overline{\chi}_{\gamma, \beta}(A) = 0.$$

Самая запись (18) характеристической функции многополюсника A является в то же время записью многополюсника A. Мы покажем, что характеристическая функция характеризует работу многополюсника A. Именно, имеет место предложение: *для того чтобы две матрицы A и B были эквивалентны, несбходимо и достаточно, чтсбы были равны их характеристические функции.* Это предложение непосредственно вытекает из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. *Неравенство характеристик*

$$\chi(A) \leqslant \chi(B) \tag{21}$$

двух многополюсников A и B равносильно такому же неравенству их характеристических функций:

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f_B(x_1, \ldots, x_n). \tag{22}$$

Доказательство. Пусть имеет место (21), тогда $f_{\chi(A)} \leqslant f_{\chi(B)}$, а в силу леммы 1 отсюда вытекает неравенство (22).

Пусть имеет место (22). Подставим в это неравенство

$$x_k = \chi_{\gamma,k}(B) \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

тогда получим, в силу леммы 2:

$$f_A(\chi_{\gamma,1}(B), \chi_{\gamma,2}(B), \ldots, \chi_{\gamma,n}(B)) \leqslant 0,$$

т. е.

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\chi_{\gamma,\alpha}(B)\overline{\chi}_{\gamma,\beta}(B) = 0,$$

или

$$\sum_{\beta=1}^{n} \{\chi(B) \times A\}_{\gamma,\beta}\overline{\chi}_{\gamma,\beta}(B) = 0.$$

Таким образом, при любых значениях индексов γ и β имеем:

$$\{\chi(B) \times A\}_{\gamma,\beta} \leqslant \chi_{\gamma,\beta}(B),$$

или

$$\chi(B) \times A \leqslant \chi(B),$$

а так как

$$\chi(B) \times A \geqslant E \times A = A,$$

то $A \leqslant \chi(B)$ и, наконец,

$$\chi(A) \leqslant \chi(B),$$

и теорема доказана.

Доказанная теорема дает алгебраический метод преобразования многополюсника в эквивалентный многополюсник. Если A и B — эквивалентные многополюсники, то, по доказанному, равны и их характеристические функции, а это означает, что тождественными преобразованиями (т. е. при помощи аксиом булевской алгебры) функция $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ * может быть преобразована к виду $f_B(x_1, \ldots, x_n)$ **.

§ 8. Исключение переменных из характеристической функции

Чтобы записать строение двухполюсной (или многополюсной) схемы с достаточной полнотой, приходится эту схему рассматривать как многополюсник, причем за полюсы многополюсника принимаются все (или почти все) узлы схемы. В таком многополюснике не все полюсы играют одинаковую роль. Существенны только те полюсы, которые совпадают с полюсами рассматриваемой электрической схемы, остальные полюсы играют лишь вспомогательную роль. Поэтому при преобразовании такого многополюсника требование неизменности всей его характеристики является излишне сильным. Достаточно ограничиться требованием неизменности только тех элементов характеристики, которые соответствуют парам су-

---

* Имеется в виду выражение $\sum a_{\alpha,\beta}x_\alpha\overline{x}_\beta$.

** Имеется в виду выражение $\sum b_{\alpha,\beta}x_\alpha\overline{x}_\beta$.

щественных полюсов. Что же касается вспомогательных полюсов, то даже нет необходимости, чтобы их количество оставалось без изменения. Мы введем еще две операции над характеристическими функциями, которые позволят производить такого рода преобразование многополюсников посредством преобразования их характеристических функций.

Переход от функции $f(x)$ к ее точной нижней границе $f(0)\ f(1)$ будем называть «исключением» переменной x из функции $f(x)$ и писать:

$$(Ex)\, f(x) = f(0)\, f(1).$$

Обратную операцию — восстановление функции от x по ее точной нижней границе — будем называть «введением» переменной x. Обратная операция, в отличие от прямой, не однозначна. В дальнейшем нам часто придется пользоваться следующей простой формулой:

$$(Ex)\,(ax + b\bar{x} + c) = ab + c. \tag{23}$$

Если из характеристической функции $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ мы исключим переменную x_n, то получим опять характеристическую функцию некоторого $(n-1)$-полюсника B:

$$(Ex_n)\, f_A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n-1} a_{\alpha, \beta} x_\alpha \bar{x}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{n-1} a_{\alpha, n} x_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{n-1} a_{n, \beta} \bar{x}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta=1}^{n-1} (a_{\alpha, \beta} + a_{\alpha, n} a_{n, \beta})\, x_\alpha \bar{x}_\beta = f\ \ (x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{24}$$

где

$$b_{\alpha, \beta} = a_{\alpha, \beta} + a_{\alpha, n} a_{n, \beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Будем говорить, что многополюсник B получен исключением полюса M_n из многополюсника A.

ТЕОРЕМА. *При исключении полюса M_n из n-многополюсника A элементы характеристики, соответствующие оставшимся полюсам, остаются без изменения, т. е.*

$$\chi_{\alpha, \beta}(B) = \chi_{\alpha, \beta}(A) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{25}$$

где B — результат исключения полюса M_n из A.

Доказательство. Исключая переменную x_n из функции $f_{\chi(A)}(x_1, \ldots, x_n)$, получим:

$$(Ex_n)\, f_{\chi(A)}(x_1, \ldots, x_n) = f_C(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где

$$c_{\alpha, \beta} = \chi_{\alpha, \beta}(A) + \chi_{\alpha, n}(A)\, \chi_{n, \beta}(A) \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1),$$

или, принимая во внимание неравенства (17), имеющие место для элементов характеристики,

$$c_{\alpha, \beta} = \chi_{\alpha, \beta}(A) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{26}$$

Матрица C является характеристикой, так как ее элементы удовлетворяют неравенствам (17). Из $f_A = f_{\chi(A)}$ и однозначности операции исключения имеем:

$$(Ex_n)\, f_A = (Ex_n)\, f_{\chi,(A)},$$

т. е.

$$f_B(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_C(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

откуда $B \sim C$, а так как C — характеристика, то $\chi(B) = \chi(C) = C$;

$$\chi_{\alpha,\beta}(A) = c_{\alpha,\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), получим равенства (25).

Из доказанной теоремы вытекает третий способ анализа многополюсников. Если из характеристической функции $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ последовательно исключим переменные $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_3$, то получим характеристическую функцию двухполюсника, проводимости которого суть $\chi_{1,2}(A)$ и $\chi_{2,1}(A)$:

$$(Ex_3)(Ex_4) \ldots (Ex_n)\, f_A(x_1, \ldots, x_n) = \chi_{1,2}(A)\, x_1\bar{x}_2 + \chi_{2,1}(A)\, x_2\bar{x}_1.$$

Положив в последнем равенстве $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, получим:

$$\chi_{1,2}(A) = (Ex_3)(Ex_4) \ldots (Ex_n)\, f_A(1, 0, x_3, \ldots, x_n) \tag{28}$$

или

$$\chi_{1,2}(A) = \prod_{x_3, x_4, \ldots, x_n = 0}^{1} f_A(1, 0, x_3, \ldots, x_n).$$

При вычислении правой части (28) можно сначала положить $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, а потом исключать переменные; результат от такой перестановки действий не изменится. Для других элементов характеристики получаются формулы, аналогичные формуле (28). Эти формулы и дают третий способ анализа.

§ 9. Введение вспомогательных полюсов

Операция исключения переменной из характеристической функции однозначна и может быть произведена, например, по формуле (24). Для того чтобы ввести новую переменную в характеристическую функцию, можно также воспользоваться этой формулой. Для этого представим характеристическую функцию f_A в виде:

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha, n+1} x_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{n} b_{n+1, \beta} \bar{x}_\beta + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} b_{\alpha,\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta, \tag{29}$$

где $b_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$ — соответствующим образом подобранные коэффициенты. Тогда правую часть последнего равенства можно представить как результат исключения некоторой переменной x_{n+1} из характеристической функции $f_B(x_1, \ldots, x_{n+1})$:

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = (Ex_{n+1})\, f_B(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Согласно теореме предыдущего параграфа, элементы характеристик многополюсников A и B, соответствующие первоначальным n полюсам, будут одинаковыми:

$$\chi_{\alpha,\beta}(A)=\chi_{\alpha,\beta}(B), \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Будем говорить, что $(n+1)$-полюсник B получен из n-полюсника A введением нового полюса M_{n+1}. Если исходный многополюсник A симметричен и в результате введения нового полюса мы хотим получить опять симметричный многополюсник B, то необходимо потребовать, чтобы коэффициенты правой части (29) удовлетворяли условию симметрии:

$$b_{ij}=b_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{30}$$

Конечно, характеристическую функцию f_A можно многими способами представить в виде (29), поэтому и многими способами можно ввести новый полюс в многополюсник A.

§ 10. Общее преобразование многополюсников

Введенные операции над характеристическими функциями позволяют поставить вопрос о преобразовании многополюсников в более общем виде, чем это было сделано раньше. Пусть A — рассматриваемый n-полюсник с полюсами $M_1, M_2, \ldots, M_m, \ldots, M_n$, и пусть, по условию задачи, полюсы $M_1, M_2, \ldots, M_m$ являются «существенными», а остальные — «вспомогательными». Это следует понимать в том смысле, что данную задачу решает n-полюсник A и всякий p-полюсник B $(p \geqslant m)$, для которого

$$\chi_{\alpha,\beta}(B)=\chi_{\alpha,\beta}(A) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m). \tag{31}$$

Обозначим полюсы многополюсника B через $M_1, M_2, \ldots, M_m, M'_{m+1}, \ldots$ $\ldots, M'_p$, а характеристические функции многополюсников A и B — через $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_B(x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_p)$. Переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$, $x'_{m+1}, \ldots, x'_p$, соответствующие вспомогательным полюсам многополюсников A и B, будем называть параметрами. Согласно ранее изложенному, условия (31) равносильны равенству результатов исключения параметров из характеристических функций f_A и f_B:

$$(Ex_{m+1})\ldots(Ex_n)\,f_A(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$=(Ex'_{m+1})\ldots(Ex'_p)\,f_B(x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_p). \tag{32}$$

При помощи этого равенства нетрудно показать, что тождественными преобразованиями, исключением параметров и введением новых характеристическая функция многополюсника A может быть преобразована в характеристическую функцию всякого многополюсника B, удовлетворяющего условиям (31). Действительно, исключением параметров $x_{m+1}, \ldots, x_n$ функция $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ преобразуется в левую часть равенства (32). Тождественными преобразованиями левая часть (32) может быть преобразована в правую. А правая часть равенства (32) введением параметров $x'_{m+1}, \ldots, x'_p$ преобразуется в характеристическую функцию многопо-

люсника B. В частности, если в A все полюсы существенны ($m = n$), то, по крайней мере теоретически, отпадает необходимость в операции исключения параметров. Этот последний случай построения многополюсника B с заданными элементами характеристики $\chi_{\alpha,\beta}(B)$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$) является естественным обобщением задачи, названной нами в § 4 синтезом многополюсника. Синтез двухполюсника в этом обобщенном смысле соответствует задаче построения двухполюсной контактной схемы.

Пример 1. Построим двухполюсную схему A с проводимостями

$$\chi_{1,2}(A) = bd + ac + ad, \quad \chi_{2,1}(A) = bd + ac + bc.$$

Преобразуем характеристическую функцию двухполюсника:

$$f(x_1, x_2) = (bd + ac + ad)\, x_1\bar{x}_2 + (bd + ac + bc)\, x_2\bar{x}_1 =$$

$$= (ax_1 + cx_2)(a\bar{x}_1 + b\bar{x}_1 + c\bar{x}_2 + d\bar{x}_2) + bd\,(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1).$$

Введем параметр x_3:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + cx_2)\,\bar{x}_3 + (a\bar{x}_1 + b\bar{x}_1 + c\bar{x}_2 + d\bar{x}_2)\, x_3 +$$

$$+ bd\,(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1) = a\,(x_1 \circ x_3) + c\,(x_2 \circ x_3) +$$

$$+ d\bar{x}_2 x_3 + b\bar{x}_1 x_3 + bd\,(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1) =$$

$$= a\,(x_1 \circ x_3) + c\,(x_2 \circ x_3) + (bx_1 + dx_2 + x_3)(b\bar{x}_1 + d\bar{x}_2),$$

где обозначено *: $x_\alpha\bar{x}_\beta + x_\beta\bar{x}_\alpha = x_\alpha \circ x_\beta$.

Введем параметр x_4:

$$f_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = a\,(x_1 \circ x_3) + c\,(x_2 \circ x_3) + (bx_1 + dx_2 + x_3)\,\bar{x}_4 +$$

$$+ (b\bar{x}_1 + d\bar{x}_2)\, x_4 = a\,(x_1 \circ x_3) + c\,(x_2 \circ x_3) + b\,(x_1 \circ x_4) + d\,(x_2 \circ x_4) + x_3\bar{x}_4.$$

Четырехполюсник A изображен на рис. 4.

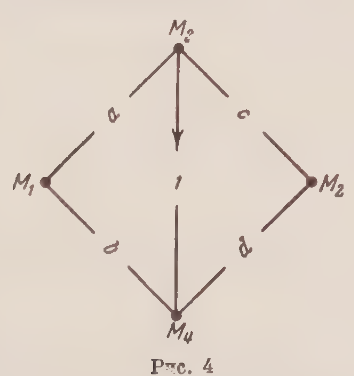


Рис. 4

Отметим один частный способ введения нового параметра в характеристическую функцию симметрического многополюсника. Допустим, что

* Операция $x \circ y$ в алгебре $\mathfrak{B}$ есть не что иное, как обычное сложение по модулю 2.

из характеристической функции $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ возможно выделить слагаемое вида $ab(x_\alpha \circ x_\beta)$, т. е.

$$ab(x_\alpha \circ x_\beta) \leqslant f_A(x_1, \ldots, x_n)$$

(где a и b — величины из $\mathfrak{A}$). Тогда слагаемое $ab(x_\alpha \circ x_\beta)$ можно заменить суммой

$$a(x_\alpha \circ x_{n+1}) + b(x_{n+1} \circ x_\beta).$$

Действительно,

$$ab(x_\alpha \circ x_\beta) = ab(x_\alpha \bar{x}_\beta + x_\beta \bar{x}_\alpha) = (ax_\alpha + bx_\beta)(a\bar{x}_\alpha + b\bar{x}_\beta).$$

Вводя новый параметр x_{n+1}, получим:

$$(ax_\alpha + bx_\beta)\bar{x}_{n+1} + (a\bar{x}_\alpha + b\bar{x}_\beta)x_{n+1} = a(x_\alpha \circ x_{n+1}) + b(x_{n+1} \circ x_\beta).$$

Остальные слагаемые характеристической функции $f_A(x_1, \ldots, x_n)$ при таком введении параметра x_{n+1} остаются без изменения. Если ограничиться только этим частным способом введения параметра, то в результате получится так называемая П-схема, и любая П-схема заданной проводимости может быть получена этим способом. Мы рассмотрим это на примере, причем применим способ в такой форме, в которой он в точности совпадает с методом Шестакова (4) построения П-схем.

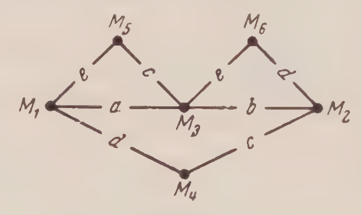


Рис. 5

Пример 2. Построим двухполюсную контактную схему без вентильных элементов с проводимостью

$$\chi = ab + acd + bec + dc.$$

Представим χ в виде какого-нибудь П-выражения, например,

$$\chi = (a + ec)(b + ed) + dc.$$

В характеристическую функцию двухполюсника

$$\chi(x_1 \circ x_2) = (a + ec)(b + ed)(x_1 \circ x_2) + dc(x_1 \circ x_2)$$

введем параметры x_3 и x_4:

$$(a + ec)(x_1 \circ x_3) + (b + ed)(x_3 \circ x_2) + d(x_1 \circ x_4) + c(x_4 \circ x_2) =$$

$$= a(x_1 \circ x_3) + b(x_3 \circ x_2) + d(x_1 \circ x_4) + c(x_4 \circ x_2) + ec(x_1 \circ x_3) + ed(x_3 \circ x_2).$$

Вводим параметры x_5 и x_6:

$$a(x_1 \circ x_3) + b(x_3 \circ x_2) + d(x_1 \circ x_4) + c(x_4 \circ x_2) +$$

$$+ e(x_1 \circ x_5) + c(x_5 \circ x_3) + e(x_3 \circ x_3) + d(x_6 \circ x_2).$$

Получившаяся П-схема изображена на рис. 5. Если не ограничиваться этим частным способом введения параметров, то можно получить схему, содержащую только 5 контактов ([8]).

При построении двухполюсной схемы A с заданной проводимостью $\chi_{1,2}(A)$ можно ввести небольшое упрощение в выкладках, если с самого начала положить $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, т. е. преобразовывать функцию $f_A(1, 0, x_3, \ldots, x_n)$ от параметров $x_3, \ldots, x_n$. Как показывает формула (28), тождественные преобразования функции $f_A(1, 0, x_3, \ldots, x_n)$, исключение параметров и введение новых параметров не изменяют проводимости $\chi_{1,2}(A)$. Обратно, при помощи перечисленных операций многополюсник A может быть преобразован в любой многополюсник B, для которого

$$\chi_{1,2}(B) = \chi_{1,2}(A).$$

Действительно, последнее равенство равносильно равенству:

$$(Ex_3) \ldots (Ex_n) f_A(1, 0, x_3, \ldots, x_n) = (Ex'_3) \ldots (Ex'_p) f_B(1, 0, x'_3, \ldots, x'_p),$$

откуда и следует, что при помощи перечисленных операций функция $f_A(1, 0, x_3, \ldots, x_n)$ может быть преобразована в функцию $f_B(1, 0, x'_3, \ldots, x'_p)$. Заметим, что в выражение функции $f_A(1, 0, x_3, \ldots, x_n)$ не входят проводимости $a_{\alpha,1}$, $a_{2,\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$), поэтому эти коэффициенты в выражении для характеристической функции $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ могут быть взяты произвольно. Если же ищется симметрический многополюсник A (т. е. строится схема без вентильных элементов), то эти коэффициенты определяются условиями симметрии:

$$a_{\alpha,1} = a_{1,\alpha}, \quad a_{2,\beta} = a_{\beta,2}.$$

В заключение рассмотрим несколько примеров на построение схем с вентильными и без вентильных элементов.

Пример 3. Построим двухполюсную схему A с проводимостью

$$\chi_{1,2}(A) = ac + bc + bd + bg + ge.$$

Имеем для двухполюсника:

$$f(1, 0) = b(c + d + g) + ac + ge.$$

Вводим параметр x_3:

$$f(1, 0, x_3) = b\bar{x}_3 + (c + d + g)\, x_3 + ac + ge =$$

$$= (x_3 + e)\, g + b\bar{x}_3 + (c + d)\, x_3 + ac.$$

Вводим параметр x_4:

$$f(1, 0, x_3, x_4) = (x_3 + e)\, \bar{x}_4 + gx_4 + b\bar{x}_3 + (c + d)\, x_3 + ac =$$

$$= (a + x_3)\, c + gx_4 + x_3\bar{x}_4 + e\bar{x}_4 + b\bar{x}_3 + dx_3.$$

Вводим параметр x_5:

$$f_A(1, 0, x_3, x_4, x_5) = (a + x_3)\, \bar{x}_5 + cx_5 + gx_4 + x_3\bar{x}_4 + e\bar{x}_4 + b\bar{x}_3 + dx_3.$$

Берем недостающие элементы пятиполюсника A:

$$a_{\alpha,1} = a_{1,\alpha}, \quad a_{2,\beta} = a_{\beta,2},$$

т. е.

$$f_A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = a(x_1 \circ x_5) + x_3\bar{x}_5 + c(x_2 \circ x_5) +$$

$$+ g(x_2 \circ x_4) + x_3\bar{x}_4 + e(x_1 \circ x_4) + b(x_1 \circ x_3) + d(x_3 \circ x_2)$$

(см. рис. 6).

Пример 4. Построим двухполюсную схему A без вентильных элементов, проводимость которой

$$\chi_{1,}\ A) = gh + gec + abc + adh + gdbc + abeh + adec.$$

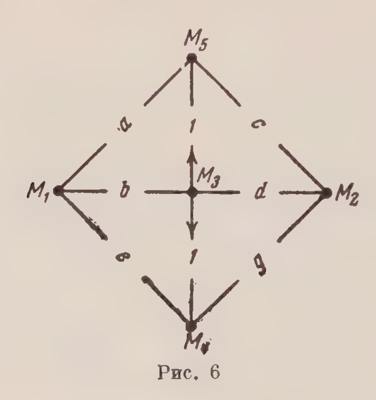


Рис. 6

Преобразуем это выражение:

$$(g + ad + abe)(h + ec + dbc) + abc.$$

Вводим параметр x_3:

$$(g + ad + abe)\bar{x}_3 + (h + ec + dbc)x_3 + abc =$$

$$= [(d + be)x_3 + a] \cdot [(d + be)\bar{x}_3 + bc] + g\bar{x}_3 + (h + ec)x_3.$$

Рис. 7

Вводим параметр x_4:

$$[(d + be)x_3 + a]\bar{x}_4 + [(d + be)\bar{x}_3 + bc]x_4 + g\bar{x}_3 + (h + ec)x_3 =$$

$$= (d + be)(x_3 \circ x_4) + a\bar{x}_4 + bcx_4 + g\bar{x}_3 + (h + ec)x_3 =$$

$$= (bx_4 + ex_3)(b\bar{x}_4 + e\bar{x}_3 + c) + d(x_3 \circ x_4) + a\bar{x}_4 + g\bar{x}_3 + hx_3.$$

Вводим параметр x_5:

$$(bx_4 + ex_3)\bar{x}_5 + (b\bar{x}_4 + e\bar{x}_3 + c)x_5 + d(x_3 \circ x_4) + a\bar{x}_4 + g\bar{x}_3 + hx_3 =$$
$$= b(x_4 \circ x_5) + e(x_3 \circ x_5) + cx_5 + d(x_3 \circ x_4) + a\bar{x}_4 + g\bar{x}_3 + hx_3.$$

Исходя из последнего выражения, пишем характеристическую функцию симметрического пятиполюсника A:

$$f_A = b(x_4 \circ x_5) + e(x_3 \circ x_5) + c(x_5 \circ x_2) + d(x_3 \circ x_4) +$$
$$+ a(x_1 \circ x_4) + g(x_1 \circ x_3) + h(x_3 \circ x_2).$$

Пятиполюсник A изображен на рис. 7.

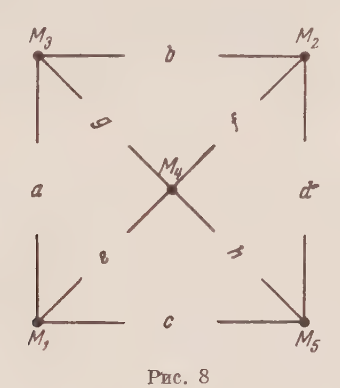


Рис. 8

Пример 5. Построим двухполюсную схему A без вентильных элементов с проводимостью

$$\chi_{1,2}(A) = ab + cd + agf + chf + aghd + chgb + ef + egb + ehd =$$
$$= (a + eg + chg)(b + gf + ghd) + cd + chf + ef + ehd.$$

Вводя последовательно параметры x_3, x_4, x_5, будем иметь:

$$(a + eg + chg)\bar{x}_3 + (b + gf + ghd)x_3 + cd + chf + ef + ehd =$$
$$= (gx_3 + e + ch)(g\bar{x}_3 + f + hd) + a\bar{x}_3 + bx_3 + cd,$$
$$(gx_3 + e + ch)\bar{x}_4 + (g\bar{x}_3 + f + hd)x_4 + a\bar{x}_3 + bx_3 + cd =$$
$$= g(x_3 \circ x_4) + (e + ch)\bar{x}_4 + (f + hd)x_4 + a\bar{x}_3 + bx_3 + cd =$$
$$= (hx_4 + c)(h\bar{x}_4 + d) + g(x_3 \circ x_4) + e\bar{x}_4 + fx_4 + a\bar{x}_3 + bx_3,$$
$$(hx_4 + c)\bar{x}_5 + (h\bar{x}_4 + d)x_5 + g(x_3 \circ x_4) + e\bar{x}_4 + fx_4 + a\bar{x}_3 + bx_3 =$$
$$= h(x_4 \circ x_5) + c\bar{x}_5 + dx_5 + g(x_3 \circ x_4) + e\bar{x}_4 + fx_4 + a\bar{x}_3 + bx_3.$$

Исходя из последнего выражения, можно непосредственно построить пятиполюсник A (рис. 8).

Поступило
12. V. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кутюра Л., Алгебра логики, Одесса, 1909.
[2] Birkhoff G., Latice theory, Amer. math. Soc., Colloqu. publications, v. 25, 1940.
[3] Шестаков В. И., Об одном символическом исчислении, применимом к теории релейно-контактных схем, Ученые зап. МГУ, вып. 73, кн. 5 (1944), 45—48.
[4] Шестаков В. И., Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (Алгебра *A*-схем), Автоматика и телемеханика, № 2 (1941), 15—24.
[5] Shannon C., Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits, Trans. Amer. Inst. Electr. Engineers (1938), 713—722.
[6] Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем, М.— Л., 1950.
[7] Лунц А. Г., Приложение матричной булевской алгебры к анализу и синтезу релейно-контактных схем, Доклады Ак. Наук СССР, 70, № 3 (1950), 421—423.
[8] Лунц А. Г., Синтез и анализ релейно-контактных схем с помощью характеристических функций, Доклады Ак. Наук СССР, 75, № 2 (1950), 201—204.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 427—436

З. И. БОРЕВИЧ

ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ p-РАСШИРЕНИЙ РЕГУЛЯРНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ*

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В работе устанавливается, что n-мерная ($n \geqslant 3$) группа гомологий p-расширения регулярного локального поля с группой Галуа G изоморфна ($n-2$)-мерной группе гомологий группы G в бесконечной циклической группе с тождественными операторами.

§ 1

Пусть K/k — конечное нормальное расширение поля k с группой Галуа G. Образ элемента $a \in K$ при автоморфизме $\sigma \in G$ будем обозначать через a^σ. Мультипликативную группу K^* не равных нулю элементов поля K можно рассматривать как группу с правыми операторами из G. Можно говорить поэтому о группах гомологий $H^n(G, K^*)$ группы G в группе K^*, которые естественно называть *группами гомологий расширения* K/k. [Относительно групп гомологий групп см. ([4]) или, в другой терминологии, ([2]).]

Группы гомологий расширений размерности 1 и 2 (в других терминах) встречались уже давно. Известная теорема Шпейзера утверждает, что $H^1(G, K^*) = 1$. Группа $H^2(G, K^*)$ возникает в задаче об описании простых алгебр с центром k (теория скрещенных произведений). Именно, 2-мерная группа гомологий поля K/k изоморфна группе тех классов простых алгебр с центром k, для которых поле K является полем разложения. В теории алгебр встречается также и $H^3(G, K^*)$.

Представляется интересным изучение групп $H^n(G, K^*)$ и самих по себе, так как эти группы гомологий являются инвариантами расширения K/k, отражающими свойства мультипликативной группы поля K как операторной группы.

Основной результат настоящей работы заключается в следующем. Локальное поле (конечное расширение поля p-адических чисел) назовем *регулярным*, если оно не содержит первообразных корней p-й степени из единицы. Нормальное (конечное) расширение K/k назовем p-расширением [см. ([1])], если его группа Галуа есть p-группа.

ТЕОРЕМА. *При* $n \geqslant 3$ *группа гомологий* $H^n(G, K^*)$ *p-расширения* K/k *регулярного локального поля* k *с группой Галуа* G *изоморфна*

---

* Настоящая работа и значительная часть работы ([3]) составляют основное содержание кандидатской диссертации, выполненной под руководством проф. Д. К. Фаддеева, которому автор выражает глубокую благодарность за многие советы и указания.

$H^{n-2}(G, J)$, где J — бесконечная циклическая группа с тождественными операторами.

Интересно отметить, что для указанных расширений группы $H^n(G, K^*)$ зависят только от их групп Галуа. Из теоремы в частности следует, что $H^3(G, K^*)$ есть единичная группа, $H^4(G, K^*)$ изоморфна группе характеров группы G, $H^5(G, K^*)$ изоморфна мультипликатору Шура группы G [см. (2), доказательство теоремы 5].

Для доказательства теоремы установим предварительно некоторые вспомогательные предложения, среди которых центральное место занимает лемма 4, легко вытекающая из результатов, полученных И. Р. Шафаревичем в работе (1).

§ 2

ЛЕММА 1. *Пусть A — абелева группа без кручения (в мультипликативной записи), для которой конечная группа G порядка m является группой (правых) операторов. Тогда*

$$Z^n(G, A^m) \subset B^n(G, A), \quad n \geqslant 1.$$

Здесь A^m обозначает подгруппу m-х степеней группы A.

Доказательство. Пусть $f \in Z^n(G, A^m)$. Положим

$$\prod_{\sigma} f(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) = [g(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})]^m,$$

где $g \in C^{n-1}(G, A)$. Имеем:

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) f(\sigma\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \prod_{i=1}^{n-1} f(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_i\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)^{(-1)^{i+1}} \cdot$$
$$\cdot f(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})^{(-1)^{n+1}\sigma_n} = 1.$$

Перемножив все такие равенства для всех $\sigma \in G$, получим:

$$[f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)]^m = [(\delta g)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)]^m,$$

откуда следует, что $f = \delta g$. Значит, $f \in B^n(G, A)$, и лемма доказана.

ЛЕММА 2. *При условиях леммы 1 группа гомологий $H^n(G, A/A^m)$ содержит подгруппу, изоморфную $H^n(G, A)$, фактор-группа по которой изоморфна $H^{n+1}(G, A)$, $n \geqslant 1$.*

При этом операторы $\sigma \in G$ действуют на элементы A/A^m естественным образом, т. е. $\bar{a}^\sigma = \overline{a^\sigma}$ ($\bar{a}$ — класс смежности, содержащий $a \in A$).

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм A на $\bar{A} = A/A^m$. Этот гомоморфизм естественным образом порождает гомоморфизм $C^n(G, A)$ на $C^n(G, \bar{A})$, именно, если $f \in C^n(G, A)$, то определяем $\bar{f} \in C^n(G, \bar{A})$ равенством:

$$\bar{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \overline{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} \quad (\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in G).$$

При гомоморфизме $f \to \bar{f}$ группа циклов $Z^n(G, A)$ отобразится на группу $\overline{Z^n(G, A)}$, содержащуюся, как легко видеть, в $Z^n(G, \bar{A})$. Группа границ

$B^n(G, A)$ отображается на $B^n(G, \overline{A})$. Если рассматривать этот гомоморфизм на группе $Z^n(G, A)$, то ядром его будет группа $Z^n(G, A^m)$, которая, в силу леммы 1, содержится в $B^n(G, A)$. Поэтому для $n \geqslant 1$

$$H^n(G, A) = Z^n(G, A) / B^n(G, A) \cong \overline{Z^n(G, A)} / B^n(G, \overline{A}).$$

Воспользуемся теперь результатом работы (2) (теорема 3), согласно которому при $n \geqslant 1$ имеем:

$$[Z^{n+1}(G, A^m) \cap B^{n+1}(G, A)] / B^{n+1}(G, A^m) \cong Z^n(G, \overline{A}) / \overline{Z^n(G, A)}.$$

В силу леммы 1, левая часть равна группе $H^{n+1}(G, A^m)$, которая изоморфна $H^{n+1}(G, A)$, ибо A и A^m операторно изоморфны. Таким образом, группа $H^n(G, \overline{A})$ имеет подгруппу $\overline{Z^n(G, A)} / B^n(G, \overline{A})$, изоморфную $H^n(G, A)$, фактор-группа по которой изоморфна $H^{n+1}(G, A)$. Лемма доказана.

§ 3

Предположим, что G — p-группа, а абелева группа (без кручения) A такова, что фактор-группы $A_i = A / A^{p^i}$ конечны, а пересечение всех A^{p^i} состоит только из единицы.

Пусть χ_i^j при $i < j$ есть естественный (операторный) гомоморфизм A_j на A_i. Очевидно, что $\chi_i^j \chi_j^k = \chi_i^k$, если $i < j < k$. Рассмотрим совокупность $\widetilde{A}$ последовательностей

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\} = \{a_i\},$$

где $a_i \in A_i$, причем $\chi_i^j a_j = a_i$ при $i < j$. Множество $\widetilde{A}$ образует абелеву группу относительно следующей операции умножения:

$$\{a_i\}\{b_i\} = \{a_i b_i\}.$$

Группа G становится группой операторов для $\widetilde{A}$, согласно определению

$$\{a_i\}^\sigma = \{a_i^\sigma\} \qquad (\sigma \in G)$$

($\{a_i^\sigma\}$ принадлежат $\widetilde{A}$, ибо $\chi_i^j(a_j^\sigma) = (\chi_i^j a_j)^\sigma = a_i^\sigma$). Группу $\widetilde{A}$ назовем *замыканием* группы A.

ЛЕММА 3. *Группа гомологий $H^n(G, A)$ изоморфна группе $H^n(G, \widetilde{A})$, $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть μ_i обозначает естественный операторный гомоморфизм A на A_i. Очевидно, что при $i < j$ $\mu_i = \chi_i^j \mu_j$. Рассмотрим отображение $a \to \mu a = \{\mu_i a\}$, $a \in A$. Так как $\chi_i^j \mu_j a = \mu_i a$, то $\mu a \in \widetilde{A}$. Далее,

$$\mu(ab) = \{(\mu_i a)(\mu_i b)\} = (\mu a)(\mu b),$$

$$\mu(a^\sigma) = \{(\mu_i a)^\sigma\} = (\mu a)^\sigma.$$

Если $\mu a = 1$, то $\mu_i a = 1$, т. е. $a \in A^{p^i}$ при любом i, а тогда $a = 1$. Таким образом, μ есть операторный изоморфизм A в $\widetilde{A}$.

Если $f \in C^n(G, A)$, то μf будет обозначать функцию из $C^n(G, \widetilde{A})$, определяемую равенством:

$$(\mu f)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mu(f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)), \quad \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in G.$$

Отображение $f \to \mu f$ есть изоморфизм $C^n(G, A)$ в $C^n(G, \widetilde{A})$, при котором циклы переходят в циклы, а границы — в границы. Покажем, что этот изоморфизм порождает изоморфное отображение $H^n(G, A)$ в $H^n(G, \widetilde{A})$, для чего достаточно показать, что всякий цикл, отобразившийся в границу, сам есть граница.

Обозначим через φ_r естественный гомоморфизм $\widetilde{A}$ на $A_r : \varphi_r\{a_i\} = a_r$. При этом r таково, что

$$p^r = m = \operatorname{ord} G$$

Гомоморфизмы μ_r и φ_r групп A и $\widetilde{A}$ на A_r естественным образом (аналогично изоморфизму μ) порождают гомоморфизмы групп $C^n(G, A)$ и $C^n(G, \widetilde{A})$ на группу $C^n(G, A_r)$, которые обозначаем также через μ_r и φ_r.

Пусть теперь $f \in Z^n(G, A)$ и $\mu f = \delta h$, где $h \in C^{n-1}(G, \widetilde{A})$. Так как μ_r отображает $C^{n-1}(G, A)$ на $C^{n-1}(G, A_r)$, то существует функция $g \in C^{n-1}(G, A)$ такая, что

$$\varphi_r h = \mu_r g.$$

Оператор δ перестановочен с гомоморфизмами φ_r и μ_r, поэтому

$$\mu_r f = \varphi_r \mu f = \varphi_r \delta h = \delta \mu_r g = \mu_r \delta g.$$

Следовательно,

$$\mu_r(f \delta g^{-1}) = 1,$$

т. е. все значения цикла $f\delta g^{-1}$ принадлежат ядру гомоморфизма μ_r — группе A^m. Применяя лемму 1, получаем, что $f\delta g^{-1}$ есть граница в A, а значит, и f есть граница.

Покажем, что ядро гомоморфизма φ_r совпадает с группой $\widetilde{A}^m$. Пусть $\{a_i\} \in \widetilde{A}$, причем $a_r = 1$. Так как

$$\chi_r^{r+i} a_{r+i} = 1,$$

то $a_{r+i} \in A_{r+i}^{p^r}$, ибо ядро гомоморфизма χ_i^j совпадает с $A_j^{p^i}$. Следовательно, для каждого i найдется элемент $b_{r+i} \in A_{r+i}$ такой, что

$$a_{r+i} = b_{r+i}^{p^r}.$$

Элемент b_{r+i} определен не однозначно, а с точностью до множителя из $A_{r+i}^{p^i}$, так как ядро гомоморфизма $A_{r+i} \to A_{r+i}^{p^r}$ равно $A_{r+i}^{p^i}$. Для каждого i положим теперь

$$c_i = \chi_i^{r+i} b_{r+i}.$$

Элемент c_i определен однозначно, ибо элементы из $A_{r+i}^{p^i}$ отображаются при гомоморфизме χ_i^{r+i} в единицу. Последовательность $\{c_i\}$ принадлежит $\widetilde{A}$. Действительно, при $i < j$ имеем:

$$\chi_i^j c_j = \chi_i^{r+j} b_{r+j} = \chi_i^{r+i} \chi_{r+i}^{r+j} b_{r+j} = \chi_i^{r+i} b'_{r+i} = c_i,$$

так как

$$(b'_{r+i})^{p^r} = \chi_{r+i}^{r+j} b_{r+j}^{p^r} = \chi_{r+i}^{r+j} a_{r+j} = a_{r+i}.$$

Далее,

$$c_i^m = \chi_i^{r+i} b_{r+i}^m = \chi_i^{r+i} a_{r+i} = a_i.$$

Следовательно, $\{a_i\} \in \widetilde{A}^m$ и ядро гомоморфизма φ_r содержится в $\widetilde{A}^m$. Обратное включение очевидно.

Таким образом, фактор-группы A / A^m и $\widetilde{A} / \widetilde{A}^m$ операторно изоморфны, откуда следует, что группа гомологий $H^n(G, A / A^m)$ изоморфна $H^n(G, \widetilde{A} / \widetilde{A}^m)$, $n \geqslant 1$. Группа $\widetilde{A}$, как легко видеть, не имеет кручения. Применяя лемму 2, получим:

$$\operatorname{ord} H^n(G, A) \cdot \operatorname{ord} H^{n+1}(G, A) =$$

$$= \operatorname{ord} H^n(G, A) \cdot \operatorname{ord} H^{n+1}(G, \widetilde{A}).$$

Все встречающиеся здесь порядки конечны, ибо из конечности G и A / A^m следует, что $H^n(G, A / A^m)$ конечна. Сопоставляя это равенство с неравенством

$$\operatorname{ord} H^n(G, A) \leqslant \operatorname{ord} H^n(G, \widetilde{A}), \quad n \geqslant 1,$$

находим, что

$$\operatorname{ord} H^n(G, A) = \operatorname{ord} H^n(G, \widetilde{A}),$$

откуда следует, что группа гомологий $H^n(G, A)$ изоморфна $H^n(G, \widetilde{A})$. Лемма 3 доказана.

§ 4

ЛЕММА 4. *Пусть k — регулярное локальное поле степени ν над полем p-адических чисел, F — свободная группа ранга $\nu + 1$. Каждому элементу $x \in F$ и каждому p-расширению K / k можно сопоставить символ (x, K), являющийся автоморфизмом поля K / k и обладающий свойствами:*

1) *при постоянном K отображение $x \to (x, K)$, $x \in F$, есть гомоморфизм F на группу Галуа поля K / k;*

2) *если $K_1 \subset K_2$, то автоморфизм (x, K_2) на поле K_1 индуцирует автоморфизм (x, K_1).*

Доказательство. В группе F строим индуктивно убывающую последовательность нормальных делителей: $F_0 = F$, а F_{i+1} есть подгруппа F_i, порожденная коммутантом и p-ми степенями группы F_i. Над полем k строим возрастающую последовательность p-расширений: $K_0 = k$, K_{i+1} есть поле классов над полем K_i для группы $(K_i^*)_d$ (K^* — мультипликативная группа поля K_i). Как показано в работе ([1]), группа Галуа G_i поля K_i / k изоморфна фактор-групше F / F_i. Следовательно, существует гомоморфизм ψ_i группы F на G_i, причем ядро каждого такого гомоморфизма совпадает с F_i. Далее, в работе ([1]) установлено, что каждый автоморфизм фактор-группы группы G_i индуцируется некоторым автоморфизмом группы G_i.

Пусть χ_i^j обозначает естественный гомоморфизм группы Галуа G_j на группу Галуа G_i. Утверждаем, что существует последовательность гомоморфизмов:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots$$

группы F на G_i, обладающих свойством:

$$\varphi_i = \chi_i^j \varphi_j \quad \text{при} \quad i < j.$$

Построим такую последовательность индуктивно, положив $\varphi_1 = \psi_1$. Пусть гомоморфизм φ_i уже определен. Гомоморфизм $\chi_i^{i+1} \psi_{i+1}$ отображает F на G_i (с ядром F_i). Поэтому

$$\chi_i^{i+1} \psi_{i+1} = \gamma \varphi_i,$$

где γ — некоторый автоморфизм группы G_i. Автоморфизм γ^{-1} группы G_i индуцируется некоторым автоморфизмом α группы G_{i+1}, т. е.

$$\gamma^{-1} \chi_i^{i+1} = \chi_i^{i+1} \alpha.$$

Положим

$$\varphi_{i+1} = \alpha \psi_{i+1}.$$

Тогда

$$\chi_i^{i+1} \varphi_{i+1} = \chi_i^{i+1} \alpha \psi_{i+1} = \gamma^{-1} \chi_i^{i+1} \psi_{i+1} = \gamma^{-1} \gamma \varphi_i = \varphi_i.$$

Так построенная последовательность гомоморфизмов φ_i обладает требуемым свойством.

Пусть теперь K — произвольное p-расширение поля k. Возьмем i такое, что $K \subset K_i$, и положим

$$(x, K) = \chi_K^i \varphi_i x,$$

где χ_K^i — естественный гомоморфизм группы Галуа поля K_i / k на группу Галуа поля K / k. Символ (x, K) не зависит от выбора i. Легко видеть, что условия 1) и 2) леммы 4 удовлетворяются.

§ 5

Пусть K / k — p-расширение регулярного локального поля k с группой Галуа G.

Мультипликативная группа K^* поля K распадается в прямое произведение трех групп:

$$K^* = \{\pi\} \times Q \times E,$$

где $\{\pi\}$ — бесконечная циклическая группа, порожденная простым элементом π поля K, Q — группа элементов конечного порядка группы K^*, E — группа главных единиц (1-единиц) поля K. Порядок Q взаимно прост с p, ибо поле K также регулярно. Группы Q и E инвариантны относительно операторов из G.

ЛЕММА 5. *Простой элемент $\pi \in K^*$ можно выбрать таким образом, что группа $\mathfrak{A} = \{\pi\} \times E$ будет инвариантна относительно группы операторов G.*

Доказательство. Для $\sigma \in G$ имеем:

$$\pi^{\sigma} = \pi\zeta_{\sigma}\varepsilon_{\sigma},$$

где $\zeta_{\sigma} \in Q$, $\varepsilon_{\sigma} \in E$. Далее,

$$\pi^{\sigma\tau} = \pi\zeta_{\sigma\tau}\varepsilon_{\sigma\tau} = (\pi\zeta_{\sigma}\varepsilon_{\sigma})^{\tau} = \pi\zeta_{\tau}\varepsilon_{\tau}\zeta_{\sigma}^{\tau}\varepsilon_{\sigma}^{\tau},$$

откуда

$$\zeta_{\sigma\tau} = \zeta_{\tau}\zeta_{\sigma}^{\tau},$$

т. е. функция ζ_{σ}, $\sigma \in G$, есть цикл в группе Q. Так как порядок G взаимно прост с порядком Q, то все циклы G в Q являются границами [см. (2), теорема 1]. Следовательно, существует $\zeta \in Q$ такое, что

$$\zeta_{\sigma} = \zeta^{1-\sigma}.$$

Положим

$$\pi_1 = \pi\zeta.$$

Тогда

$$\pi_1^{\sigma} = \pi\zeta_{\sigma}\varepsilon_{\sigma}\zeta^{\sigma} = \pi\zeta\varepsilon_{\sigma} = \pi_1\varepsilon_{\sigma}.$$

Группа $\mathfrak{A} = \{\pi_1\} \times E$ инвариантна относительно операторов из G. Лемма доказана.

Рассмотрим свободную группу F леммы 4. Пусть R обозначает ядро гомоморфизма $x \to (x, K)$, $x \in F$. R_0 — фактор-группа группы R по ее коммутанту. Группа G является группой (правых) операторов для R_0. Именно, если $u_{\sigma} \in F$, $\sigma \in G$, таковы, что $(u_{\sigma}, K) = \sigma$, то

$$\bar{r}^{\sigma} = \overline{u_{\sigma}^{-1} r u_{\sigma}},$$

где $\bar{r}$ обозначает класс смежности из R_0, содержащий представителя $r \in R$.

Группы R_0 и $\mathfrak{A}$ удовлетворяют условиям, сформулированным в начале § 3. Следовательно, можно определить замыкания $\tilde{R}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$ групп R_0 и $\mathfrak{A}$ соответственно.

ЛЕММА 6. *Группы $\tilde{R}_0$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$ операторно изоморфны.*

Доказательство. Для $i \geqslant 1$ положим

$$R_i = R_0 / R_0^{p^i},$$

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} / \mathfrak{A}^{p^i}.$$

При $i < j$ пусть φ_i^j обозначает естественный гомоморфизм R_j на R_i, а χ_i^j — естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}_j$ на $\mathfrak{A}_i$. Установим существование операторных изоморфизмов f_i групп R_i на $\mathfrak{A}_i$, обладающих свойством:

$$f_i\varphi_i^j = \chi_i^j f_j \quad \text{при} \quad i < j.$$

Пусть K_i обозначает поле классов над полем K для группы $(K^*)^{p^i}$. $\mathfrak{G}_i$ — группа Галуа расширения K_i/K. Поле K_i является нормальным и относительно k. Поэтому группа G естественным образом является группой операторов для абелевой группы $\mathfrak{G}_i$. Именно, если $\sigma \in G$, $\alpha \in \mathfrak{G}_i$, то

$$\alpha^{\sigma} = \omega^{-1}\alpha\omega,$$

где ω есть какой-нибудь автоморфизм поля K_i/k, который на поле K индуцирует автоморфизм σ (в обозначении $\omega|_K = \sigma$).

Рассмотрим гомоморфизм $x \to (x, K_i)$, $x \in F$, группы F на группу Галуа поля K_i/k. Ядро этого гомоморфизма содержится в R. При $x \in R$ отображение $x \to (x, K_i)$ является гомоморфизмом R на абелеву группу $\mathfrak{G}_i$, откуда следует, что $(x, K_i) = 1$, если x принадлежит коммутанту $[R, R]$ группы R. Можно считать поэтому, что символ (x, K_i) определен для $x \in F_0 = F/[R, R]$. При $x \in R_0$ отображение $x \to (x, K_i)$ будет гомоморфизмом R_0 на $\mathfrak{G}_i$, ядро которого содержит $R_0^{p^i}$. Порядок группы $\mathfrak{G}_i$ равен индексу

$$(K^* : (K^*)^{p^i}) = p^{i(m\nu+1)}$$

(ибо абсолютная степень поля K равна $m\nu$, m — порядок G). С другой стороны, индекс $(R_0 : R_0^{p^i})$ также равен $p^{i(m\nu+1)}$, так как ранг R_0 равен $m\nu + 1$ (теорема Шрейера). Следовательно, ядро гомоморфизма $x \to (x, K_i)$, $x \in R_0$, равно $R_0^{p^i}$, и этот гомоморфизм порождает изоморфизм R_i на $\mathfrak{G}_i$, который будет операторным в силу равенства

$$(u_\sigma^{-1} x u_\sigma, K_i) = (u_\sigma, K_i)^{-1} (x, K_i) (u_\sigma, K_i),$$

где $x \in R_0$, а $u_\sigma \in F_0$, причем

$$(u_\sigma, K_i)|_K = (u_\sigma, K) = \sigma.$$

Воспользуемся теперь символом Хассе [см. ([5])], который каждому $a \in K^*$ ставит в соответствие автоморфизм $\left(\frac{K_i/K}{a}\right)$ из группы Галуа $\mathfrak{G}_i$ поля K_i/K так, что отображение $a \to \left(\frac{K_i/K}{a}\right)$ есть гомоморфизм K^* на $\mathfrak{G}_i$ с ядром $(K^*)^{p^i}$. При этом имеют место следующие свойства:

1) при $i < j$ автоморфизм $\left(\frac{K_j/K}{a}\right)$ индуцирует на поле K_i автоморфизм $\left(\frac{K_i/K}{a}\right)$;

2) если ω — автоморфизм поля K_i/k, то

$$\left(\frac{K_i/K}{a^\omega}\right) = \omega^{-1} \left(\frac{K_i/K}{a}\right) \omega.$$

Так как Q содержится в $(K^*)^{p^i}$ $\left(\text{а значит, } \left(\frac{K_i/K}{a}\right) = 1 \text{ при } a \in Q\right)$, то можно считать, что символ Хассе определен на группе $\mathfrak{A}$, причем свойства 1) и 2), очевидно, сохраняются. Таким образом, отображение $a \to \left(\frac{K_i/K}{a}\right)$, $a \in \mathfrak{A}$, есть операторный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{G}_i$ с ядром $\mathfrak{A}^{p^i}$, который естественным образом порождает операторный изоморфизм $\mathfrak{G}_i$ на $\mathfrak{A}_i$.

Итак, при помощи символа (x, K_i) группа R_i операторно изоморфно отображается на $\mathfrak{G}_i$, а последняя при помощи символа Хассе — на $\mathfrak{A}_i$. Построенный операторный изоморфизм R_i на $\mathfrak{A}_i$ обозначим через f_i $(i \geqslant 1)$.

Покажем теперь, что гомоморфизмы $f_i \varphi_i^j$ и $\chi_i^j f_j\,(i<j)$ отображают $xR_0^{p^j} \in R_j$ в один и тот же элемент из $\mathfrak{A}_i$. Действительно,

$$f_i \varphi_i^j: \quad xR_0^{p^j} \to xR_0^{p^i} \to (x, K_i) = \left(\frac{K_i/K}{a}\right) \to a\mathfrak{A}^{p^i} \in \mathfrak{A}_i.$$

$$\chi_i^j f: \quad xR_0^{p^j} \to (x, K_j) = \left(\frac{K_j/K}{b}\right) \to b\mathfrak{A}^{p^j} \to b\mathfrak{A}^{p^i} \in \mathfrak{A}_i.$$

Однако

$$\left(\frac{K_i/K}{a}\right) = (x, K_i) = (x, K_j)\mid_{K_i} = \left(\frac{K_j/K}{b}\right)\Big|_{K_i} = \left(\frac{K_i/K}{b}\right),$$

так что

$$a\mathfrak{A}^{p^i} = b\mathfrak{A}^{p^i}.$$

Следовательно,

$$f_i \varphi_i^j = \chi_i^j f_j.$$

Теперь легко показать, что группы $\widetilde{R}_0$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}$ операторно изоморфны. Пусть $\{x_i\} \in \widetilde{R}_0$. Положим

$$f\{x_i\} = \{f_i x_i\}.$$

При $i<j$

$$\chi_i^j f_j x_j = f_i \varphi_i^j x_j = f_i x_i,$$

так что $f\{x_i\} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Легко видеть, что f есть изоморфизм $\widetilde{R}_0$ на $\widetilde{\mathfrak{A}}$. В силу равенств

$$f(\{x_i\}^\sigma) = f\{x_i^\sigma\} = \{f_i(x_i^\sigma)\} = \{(f_i x_i)^\sigma\} = \{f_i x_i\}^\sigma = (f\{x_i\})^\sigma,$$

изоморфизм f операторный. Лемма 6 доказана.

§ 6

Доказательство теоремы. Мультипликативная группа K^* поля K представляется в виде прямого произведения $K^* = Q \times \mathfrak{A}$ (лемма 5). Как уже отмечено выше, $H^n(G, Q) = 1$ (доказательство леммы 5). Поэтому группа $H^n(G, K^*)$ изоморфна $H^n(G, \mathfrak{A})$ [см. ([3]), лемма 5]. В силу леммы 3, группа $H^n(G, \mathfrak{A})$ изоморфна $H^n(G, \widetilde{\mathfrak{A}})$, а группа $H^n(G, R_0)$ изоморфна $H^n(G, \widetilde{R}_0)$ (R_0 — группа, рассмотренная в § 5). Но группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\widetilde{R}_0$ операторно изоморфны (лемма 6), поэтому $H^n(G, K^*)$ изоморфна $H^n(G, R_0)$ при всех $n \geqslant 1$. При $n \geqslant 3$ группа $H^n(G, R_0)$ изоморфна $H^{n-2}(G, J)$, что установлено в работе ([3]) (теорема А). Следовательно,

$$H^n(G, K^*) \cong H^{n-2}(G, J),$$

и теорема доказана.

Замечание. Так как $H^1(G, R_0) = 1$, а $H^2(G, R_0)$ есть циклическая группа порядка $m = \operatorname{ord} G$ [см. ([3]), теорема 3], то из приведенного доказательства вытекают также следующие хорошо известные факты: $H^1(G, K^*)$ есть единичная группа, а $H^2(G, K^*)$ есть циклическая группа порядка m.

Поступило
16. II. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шафаревич И. Р., О p-расширениях, Матем. сб., 20, 62 : 2 (1947), 351—363.
[2] Фаддеев Д. К., О фактор-системах в абелевых группах с операторами, Доклады Ак. Наук СССР, т. 58, № 3 (1947), 361—364.
[3] Боревич З. И., О группах гомологий, связанных со свободной группой, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 16 (1952), 365—384.
[4] Eilenberg S. and Mac Lane S., Cohomology theory in abstract groups. I, Ann. of Math., 48 (1947), 51—78.
[5] Chevalley C., La théorie du symbole de restes normiques, J. reine und angew. Math., 169 (1933), 140—156.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 437—458

П. П. ПАВЛОВ

СИЛОВСКИЕ p-ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ПРОСТЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ p

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе исследуется силовская p-подгруппа линейной группы над полем из p элементов. Находятся образующие этой группы и соотношения между ними, определяющие группу. Находится также группа всех автоморфизмов исследуемой группы.

Введение

Полной линейной группой над полем F называется группа всех невырожденных матриц с коэффициентами из F. Полная линейная группа имеет нормальный делитель, состоящий из всех матриц с определителем единица. Эта группа называется специальной линейной группой.

В дальнейшем порядок матриц будет считаться всегда одним и тем же числом n, а поле F — простым полем из p элементов.

Нами будет исследована силовская p-подгруппа линейной группы. При этом безразлично, с какой линейной группой — полной или специальной — мы имеем дело, так как индекс специальной в полной группе равен $p-1$ и, следовательно, взаимно прост с p.

Всякая конечная группа имеет изоморфное представление матрицами над полем из p элементов, например, регулярное.

Следовательно, всякая конечная группа изоморфна подгруппе полной линейной группы. Если исходная группа была p-группой, то изоморфная ей подгруппа полной линейной группы содержится в силовской p-подгруппе.

Таким образом, силовские p-подгруппы линейной группы являются универсальными p-группами в том смысле, что всякая p-группа изоморфна некоторой подгруппе силовской p-подгруппы линейной группы. Это оправдывает их более подробное изучение.

Аналогичный вопрос для силовских p-подгрупп симметрических групп решен в докторской диссертации Калужнина ([4]).

Когда настоящая работа была уже закончена, появилась работа Дюбиш и Перлис ([6]), в которой исследовалась группа автоморфизмов треугольной алгебры (т. е. алгебры, состоящей из матриц, у которых под главной диагональю и на ней стоят нули) над произвольным полем. Так как группа треугольных матриц является одной из силовских p-подгрупп линейной группы (см. § 1), то для исследованного в нашей работе случая, когда основное поле состоит из p-элементов, результаты работы Дюбиш и Перлис получаются как следствие наших результатов.

§ 1. Группа треугольных матриц с единичной диагональю

Пусть $e_{i,k}$ — матрица n-го порядка, у которой на i-й строке и k-м столбце стоит единица, а во всех других клетках — нули. Тогда любую треугольную матрицу A, у которой в клетках ниже первой главной диагонали стоят нули, на первой главной диагонали везде единицы, а в остальных клетках — числа $a_{i,k}$ поля вычетов по простому числу p, записываем в виде

$$A = 1 + \sum_{i<k} a_{i,k} e_{i,k}.$$

Треугольные матрицы названного вида будем называть просто *треугольными матрицами*, так как они чаще всего встречаются в настоящем исследовании. Имеет место

ТЕОРЕМА. *Порядок группы треугольных матриц равен* $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Доказательство. Число произвольных коэффициентов $a_{i,k}$ в треугольной матрице n-го порядка равно $\frac{n(n-1)}{2}$ и каждый коэффициент принимает p различных значений.

Обратим внимание на тот факт, что порядок силовской p-подгруппы общей группы линейных подстановок также равен $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Отсюда следует, что группа треугольных матриц является одной из силовских p-подгрупп в названной группе.

Строение группы автоморфизмов силовской p-подгруппы общей группы линейных подстановок будет известно, если мы изучим автоморфизмы группы треугольных матриц, потому что по известной теореме из теории групп [см. (²), стр. 93] две силовские p-подгруппы по одному и тому же простому числу сопряжены друг другу внутри всей данной группы.

§ 2. Образующие треугольной группы и соотношения между ними

Пользуясь свойствами

$$e_{i,k} \cdot e_{k,j} = e_{ij},$$

$$e_{il} \cdot e_{kj} = 0 \quad (l \neq k),$$

представим матрицу A в виде:

$$\begin{aligned} A = {} & (1 + a_{n-1,n} e_{n-1,n}) \times \\ & (1 + a_{n-2,n} e_{n-2,n})(1 + a_{n-2,n-1} e_{n-2,n-1}) \times \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (1 + a_{1,n} e_{1,n})(1 + a_{1,n-1} e_{1,n-1}) \cdots (1 - a_{12} e_{12}). \end{aligned} \tag{1}$$

Иногда бывает удобна сокращенная запись:

$$1 + e_{i,k} = \varepsilon_{i,k}.$$

Тогда A запишется так:

$$\begin{aligned} A = {} & \varepsilon_{n-1,n}^{a_{n-1,n}} \times \\ & \varepsilon_{n-2,n}^{a_{n-2,n}} \cdot \varepsilon_{n-2,n-1}^{a_{n-2,n-1}} \times \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \varepsilon_{1,n}^{a_{1,n}} \cdot \varepsilon_{1,n-1}^{a_{1,n-1}} \cdots \varepsilon_{1,2}^{a_{1,2}}. \end{aligned} \tag{1'}$$

Заметим, что коэффициенты $a_{i,k}$ в (1) и показатели $a_{i,k}$ в (1′) — одни и те же числа.

Из формулы (1′) следует, что матрицы $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ с $\alpha<\beta$ являются образующими группы треугольных матриц. Из дальнейшего будет видно, что уже некоторая часть этих матриц является системой образующих. Поэтому мы будем систему матриц $e_{\alpha,\beta}$ называть промежуточной системой образующих.

Для коммутаторов матриц $\varepsilon_{\alpha,\beta}^{a_{\alpha,\beta}}$, $\varepsilon_{\gamma,\delta}^{a_{\gamma\delta}}$, $\varepsilon_{\beta,\delta}^{a_{\beta\delta}}$, $\varepsilon_{\gamma\delta}^{a_{\gamma\delta}}$ верны соотношения, выраженные в следующей лемме.

ЛЕММА 1.

$$1)\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{-a_{\alpha,\beta}}\cdot\varepsilon_{\gamma\delta}^{-a_{\gamma\delta}}\cdot\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\gamma\delta}^{a_{\gamma\delta}}=1,$$

где $\beta\neq\gamma$, $\alpha\neq\delta$;

$$2)\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{-a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\beta\delta}^{-a_{\beta\delta}}\cdot\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\beta\delta}^{a_{\beta\delta}}=\varepsilon_{\alpha\delta}^{a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}};$$

$$3)\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{-a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\gamma\alpha}^{-a_{\gamma\alpha}}\cdot\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\gamma\alpha}^{a_{\gamma\alpha}}=\varepsilon_{\gamma\beta}^{-a_{\gamma\alpha}a_{\alpha\beta}}.$$

Доказательство. Соотношения получаются прямым вычислением:

$$\begin{aligned}1)\ &(1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})(1-a_{\gamma\delta}e_{\gamma\delta})(1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})(1+a_{\gamma\delta}e_{\gamma\delta})=\\&=(1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}-a_{\gamma\delta}e_{\gamma\delta})(1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+a_{\gamma\delta}e_{\alpha\delta})=\\&=1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}-a_{\gamma\delta}e_{\gamma\delta}+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+a_{\gamma\delta}e_{\gamma\delta}=1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2)\ &(1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})(1-a_{\beta\delta}e_{\beta\delta})(1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})(1+a_{\beta\delta}e_{\beta\delta})=\\&=(1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}-a_{\beta\delta}e_{\beta\delta}+a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}e_{\alpha\delta})(1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+\\&+a_{\beta\delta}e_{\beta\delta}e_{\beta\delta}+a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}e_{\alpha\delta})=1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}-a_{\beta\delta}e_{\beta\delta}+\\&+a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}e_{\alpha\delta}+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+a_{\beta\delta}e_{\beta\delta}+a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}e_{\alpha\delta}-a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}e_{\alpha\delta}=\\&=1+a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}e_{\alpha\delta}=(1+e_{\alpha\delta})^{a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}}=\varepsilon_{\alpha\delta}^{a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3)\ &(1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})(1-a_{\gamma\alpha}e_{\gamma\alpha})(1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})(1+a_{\gamma\alpha}e_{\gamma\alpha})=\\&=(1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}-a_{\gamma\alpha}e_{\gamma\alpha})(1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+a_{\gamma\alpha}e_{\gamma\alpha})=\\&=1-a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}-a_{\gamma\alpha}e_{\gamma\alpha}+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+a_{\gamma\alpha}e_{\gamma\alpha}-a_{\gamma\alpha}a_{\alpha\beta}e_{\gamma\beta}=\\&=1-a_{\gamma\alpha}a_{\alpha\beta}e_{\gamma\beta}=(1+\varepsilon_{\gamma\beta})^{-a_{\gamma\alpha}a_{\alpha\beta}}=\varepsilon_{\gamma\beta}^{-a_{\gamma\alpha}a_{\alpha\beta}}.\end{aligned}$$

Из соотношения 1) следует, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\cdot\varepsilon_{\gamma\delta}=\varepsilon_{\gamma\delta}\cdot\varepsilon_{\alpha\beta},$$

если $\beta\neq\gamma$ и $\alpha\neq\delta$, т. е. матрицы $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\gamma\delta}$ являются перестановочными между собою. Так, например, в 2) коммутатор $\varepsilon_{\alpha\delta}$ матриц $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\beta\gamma}$ перестановочен с каждой из этих матриц, а в 3) коммутатор $\varepsilon_{\gamma\beta}^{-1}$ перестановочен с каждой из матриц $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\gamma\alpha}$.

Из леммы 1 легко получить следующие формулы преобразования одной матрицы при помощи другой:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ \varepsilon_{\gamma\delta}^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}=\varepsilon_{\alpha\beta},\ \text{если}\ \beta\neq\gamma,\quad \alpha\neq\delta,\quad \alpha<\beta,\quad \gamma<\delta;\\&2)\ \varepsilon_{\beta\delta}^{-a_{\beta\delta}}\cdot\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\beta\delta}^{a_{\beta\delta}}=\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\alpha\delta}^{a_{\alpha\beta}a_{\beta\delta}};\\&3)\ \varepsilon_{\gamma\alpha}^{-a_{\gamma\alpha}}\cdot\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\gamma\alpha}^{a_{\gamma\alpha}}=\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}\cdot\varepsilon_{\gamma\beta}^{-a_{\alpha\beta}a_{\gamma\alpha}}.\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Присоединяя к формулам (А) соотношение

$$e_{\alpha,\beta}^{p} = 1,$$

получаем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. *Между матрицами e_{ij} существуют соотношения:*

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & (e_{\alpha,\beta},\ e_{\gamma,\delta}) = 1, \quad \alpha \neq \delta, \quad \delta \neq \gamma, \\ 2) & (e_{\alpha,\beta},\ e_{\beta,\delta}) = e_{\alpha,\delta}, \\ & (e_{\alpha,\beta},\ e_{\gamma,\alpha}) = e_{\gamma,\beta}^{-1}, \\ 3) & e_{\alpha\beta}^{(p)} = 1. \end{array}\right\} \quad (B)$$

Пользуясь соотношением 2) из (В), мы можем множитель $e_{\alpha,\beta}$, $\alpha < \beta$, представить в виде коммутатора множителей $e_{\alpha,\beta-1}$ и $e_{\beta-1,\beta}$:

$$e_{\alpha\beta} = (e_{\alpha,\beta-1},\ e_{\beta-1,\beta}) = e_{\alpha,\beta-1}^{-1} \cdot e_{\beta-1,\beta} \cdot e_{\alpha,\beta-1} \cdot e_{\beta-1,\beta};$$

точно так же

$$e_{\alpha,\beta-1} = (e_{\alpha,\beta-2},\ e_{\beta-2,\beta-1}).$$

Таким образом, $e_{\alpha,\beta}$ есть двукратный коммутатор:

$$e_{\alpha,\beta} = ((e_{\alpha,\beta-2},\ e_{\beta-2,\beta-1}) \cdot e_{\beta-1,\beta})$$

элементов

$$e_{\alpha,\beta-2}, \quad e_{\beta-2,\beta-1} \quad \text{и} \quad e_{\beta-1,\beta}.$$

В конечном счете $e_{\alpha,\beta}$ представим в виде многократного коммутатора множителей вида $e_{\gamma,\gamma+1}$:

$$e_{\alpha,\beta} = (((\ldots((e_{\alpha,\alpha+1},\ e_{\alpha+1,\alpha+2}),\ e_{\alpha+2,\alpha+3})\ldots),\ e_{\beta-2,\beta-1}),\ e_{\beta-1,\beta}). \quad (\alpha)$$

Формула (α) показывает, что $e_{\alpha,\beta}$ является некоторым произведением множителей вида $e_{\gamma,\gamma+1}$, в которых первый и второй индексы отличаются друг от друга на единицу.

Так как $e_{\alpha,\beta}$ составляют систему образующих, то $e_{\alpha,\alpha+1}$ ($\alpha = 1, \ldots, n-1$) тоже составляют систему образующих.

Образующие $e_{\alpha,\alpha+1}$ мы будем называть основными образующими. Из теоремы Бернсайда [см. ([5]), стр. 131] следует, что не существует системы образующих, которая содержала бы меньше образующих, чем система основных образующих.

Всякое соотношение между элементами группы в конечном счете есть соотношение между основными образующими вида:

$$e_{\alpha_1,\alpha_1+1}^{m_{\alpha_1}} \cdot e_{\alpha_2,\alpha_2+1}^{m_{\alpha_2}} \cdots e_{\alpha_k,\alpha_k+1}^{m_{\alpha_k}} = 1,$$

Для изучения автоморфизмов группы нам понадобится

ТЕОРЕМА 2. *Всякое соотношение*

$$e_{\alpha_1,\alpha_1+1}^{m_{\alpha_1}} \cdot e_{\alpha_2,\alpha_2+1}^{m_{\alpha_2}} \cdots e_{\alpha_s,\alpha_s+1}^{m_{\alpha_s}} = 1, \quad (2)$$

существующее между элементами группы, является следствием соотношений (В), *которые мы рассматриваем теперь как соотношения между основными образующими.*

Доказательство. Левую часть формулы (2), пользуясь соотношениями 1) и 2) из (B), будем представлять в желательной для нас форме.

Пусть β — наименьшее значение среди индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Каждый из множителей вида $\varepsilon_{\beta,\beta+1}^{m_\beta}$ при помощи соотношений 1) и 2) из (B) переносим на крайнее правое место в произведении. Тогда в произведении левее $\varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}}$, кроме степеней вида $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}^{m_\alpha}$, на некоторых местах могут оставаться множители вида $\varepsilon_{\beta l}$, где $l > \beta + 1$. Пусть l_1 будет наименьшим числом среди индексов $l_1 \leqslant l$. Теперь все степени множителя $\varepsilon_{\beta l_1}$ поместим правее всех остальных, но левее множителя $\varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}}$; тогда левее произведения $\varepsilon_{\beta,l_1}^{a_{\beta l_1}} \cdot \varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}}$ множителями будут степени вида $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}^{m_\alpha}$ $(\alpha > \beta)$ и степени $\varepsilon_{\beta l}^{\beta l}$ $(l > l_1)$. Пусть l_2 будет наименьшее число среди индексов l в последнем произведении левее $\varepsilon_{\beta,l_1}^{a_{\beta l_1}} \cdot \varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}}$.

Все степени множителя $\varepsilon_{\beta l_2}$ поместим правее всех остальных, но левее $\varepsilon_{\beta l_1}^{a_{\beta l_1}} \cdot \varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}}$. Тогда левее произведения $\varepsilon_{\beta,l_2}^{a_{\beta l_2}} \cdot \varepsilon_{\beta l_1}^{a_{\beta l_1}} \cdot \varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}}$ останутся множители вида $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}^{m_\alpha}$ $(\alpha > \beta)$ и степени $\varepsilon_{\beta,l}^{pl}$ $(l > l_2)$. Операция переноса степеней $\varepsilon_{\beta,l}^{pl}$ в указанном порядке после некоторого числа раз прекращается, так как числа l не превышают числа n. В результате мы получаем произведение вида

$$\varepsilon_{\alpha_1',\alpha_1'+1}^{m_{\alpha_1'}} \cdot \varepsilon_{\alpha_2',\alpha_2'+1}^{m_{\alpha_2'}} \cdots \varepsilon_{\alpha_s',\alpha_s'+1}^{m_{\alpha_s'}} \cdot \varepsilon_{\beta,l_t}^{a_{\beta,l_t}} \cdot \varepsilon_{\beta,l_{t-1}}^{a_{\beta,l_{t-1}}} \cdots \varepsilon_{\beta l_2}^{a_{\beta,l_2}} \varepsilon_{\beta l_1}^{a_{\beta l_1}} \cdot \varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}},$$

где $\alpha_i' > \beta$. Очевидно, число $s' < s$ и $l_t > l_{t-1} > \ldots > l_2 > l_1 > \beta + 1$. С произведением

$$\varepsilon_{\alpha_1',\alpha_1'+1}^{m_{\alpha_1'}} \cdot \varepsilon_{\alpha_2',\alpha_2'+1}^{m_{\alpha_2'}} \cdots \varepsilon_{\alpha_{s'}',\alpha_{s'}'+1}^{m_{\alpha_{s'}'}}$$

поступаем так же, как и с левой частью соотношения (2), получая в результате:

$$\varepsilon_{\alpha_1'',\alpha_1''+1}^{m_{\alpha_1''}} \cdot \varepsilon_{\alpha_2'',\alpha_2''+1}^{m_{\alpha_2''}} \cdots \varepsilon_{\alpha_{s''}'',\alpha_{s''}''+1}^{m_{\alpha_{s''}''}} \cdot \varepsilon_{\beta' l_{t'}'}^{a_{\beta' l_{t'}'}} \cdot \varepsilon_{\beta' l_{t'-1}'}^{a_{\beta' l_{t'-1}'}} \cdots \varepsilon_{\beta' l_2}^{a_{\beta' l_2}} \varepsilon_{\beta' l_1}^{a_{\beta' l_1}} \varepsilon_{\beta' \beta'+1}^{a_{\beta',\beta'+1}},$$

где $s'' < s'$, $l_{t'}' > l_{t'-1}' > \ldots > l_2' > l_1'$ и $\beta' > \beta$.

То же самое проделаем теперь с произведением

$$\varepsilon_{\alpha_1'',\alpha_1''+1}^{m_{\alpha_1''}} \cdot \varepsilon_{\alpha_2'',\alpha_2''+1}^{m_{\alpha_2''}} \cdots \varepsilon_{\alpha_{s''}'',\alpha_{s''}''+1}^{m_{\alpha_{s''}''}}.$$

Тогда получаем:

$$\varepsilon_{\alpha_1''',\alpha_1'''+1}^{m_{\alpha_1'''}} \cdots \varepsilon_{\alpha_{s'''}''',\alpha_{s'''}'''+1}^{m_{\alpha_{s'''}'''}} \varepsilon_{\beta'',l_{t''}''}^{a_{\beta'' l_{t''}''}} \cdot \varepsilon_{\beta'' l_{t''-1}''}^{a_{\beta'',l_{t''-1}''}} \cdots \varepsilon_{\beta'',l_2''}^{a_{\beta'',l_2''}} \cdot \varepsilon_{\beta'' l_1''}^{a_{\beta'',l_1''}} \cdot \varepsilon_{\beta'',\beta''+1}^{a_{\beta'',\beta''+1}},$$

где $s''' < s''$, $\beta'' > \beta' > \beta$ и $l_{t''}'' > l_{t''-1}'' > \ldots > l_2'' > l_1'' > \beta'' + 1$.

Этот процесс упорядочения множителей в произведении после конечного числа раз прекращается, так как левее упорядоченных множителей каждый раз остается все меньше и меньше множителей. Таким путем мы левую часть (2) приводим к нормальному виду (1′). Но тогда, в силу того, что правая часть (2) есть единица и показатели в (1′) совпадают

с коэффициентами в (1), показатели $a_{i,k}$ в нормальной форме должны быть числами, делящимися на простое число p, что в сочетании с переносами при упорядочении показывает, что соотношение (2) есть результат соотношений (В).

§ 3. Убывающий центральный ряд и центр группы

Убывающим центральным рядом группы $\mathfrak{G}$ называют последовательность подгрупп, где первым членом является коммутант группы $\mathfrak{G}_1 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ и каждый другой член есть коммутант группы $\mathfrak{G}$ и предшествующего ему члена, т. е. $\mathfrak{G}_k = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{k-1})$.

Для групп из треугольных матриц известна следующая теорема [см. ([3]), стр. 774].

ТЕОРЕМА 3. *Группа всех матриц $1 + v_i$, где v_i в первых i побочных диагоналях, примыкающих сверху к главной диагонали, содержит исключительно нули, является i-м членом $\mathfrak{G}_i$ убывающего центрального ряда группы треугольных матриц, а $(n-2)$-й член $\mathfrak{G}_{n-2}$ состоит из элементов вида $1 + a_{1,n} e_{1,n}$, являясь, таким образом, центром группы. Следовательно,*

$$\mathfrak{G}_{n-1} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{n-2}) = 1.$$

Для групп матриц n-го порядка убывающий центральный ряд для треугольной группы обрывается единицей на члене с индексом $n-1$, и предшествующий ему член состоит из элементов центра группы, т. е. из элементов $s_{1,n}^{a_{1,n}}$.

Члены центрального убывающего ряда суть характеристические группы.

§ 4. Теоремы о некоторых классах сопряженных элементов

Большую роль в дальнейшем будет играть одно свойство элементов $1 + a_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$, заключающееся в том, что элементы вида $1 + a_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$ и их произведения на элемент центра при $\alpha \neq 1$, $\beta \neq n$ обладают минимальными порядками классов сопряженных элементов среди всех элементов, у которых $a_{\alpha,\beta} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 4. *Класс элементов, сопряженных с $1 + a_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}$, состоит из $p^{n+\alpha-\beta-1}$ элементов, имеющих вид*

$$1 + a_{\alpha,\beta} \sum_{i=1,\, j=\beta}^{\alpha,\, n} \eta_i \delta_j e_{ij},$$

где $\eta_\alpha = \delta_\beta = 1$, а остальные η_i и δ_j — произвольные числа

Доказательство. При доказательстве пользуемся теоремой о том, что порядок класса элементов, сопряженных данному элементу, равен индексу централизатора этого элемента во всей группе [см. ([1]), стр. 63]. Пусть элемент $1 + \sum_{i<k} c_{i,k} e_{i,k}$ принадлежит централизатору элемента $1 + a_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}$. Тогда

$$\left(1 + \sum_{i<k} c_{i,k} e_{i,k}\right)(1 + a_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}) = (1 + a_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}) \left(1 + \sum_{\lambda<\mu} c_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu}\right).$$

Отсюда

$$\left(\sum_{i<k} c_{i,k} e_{i,k}\right) e_{\alpha,\beta} = e_{\alpha,\beta} \sum_{\lambda<\mu} c_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu},$$

или же

$$\sum_{i<\alpha} c_{i,\alpha} e_{i,\beta} = \sum_{\beta<\mu} c_{\beta,\mu} e_{\alpha,\mu}.$$

Тогда должно быть

$$c_{i,\alpha}=0 \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,\alpha-1), \qquad c_{\beta,\mu}=0 \quad (\mu=\beta+1,\,\beta+2,\,\ldots,\,n). \tag{3}$$

В централизаторе элемента $1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$ коэффициенты $c_{i,\alpha}\,(i=1,\,2,\ldots,\alpha-1)$, $c_{\beta,\mu}\,(\mu=\beta+1,\,\ldots,\,n)$ одновременно равны нулю, а другие коэффициенты c_{pl} остаются произвольными. Следовательно, порядок централизатора элемента $1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$ равен $p^{\frac{n(n-1)}{2}-[n+\alpha-\beta-1]}$ и его индекс будет $p^{n+\alpha-\beta-1}$.

Общий вид элементов класса, сопряженных элементу $1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$, будет

$$A = 1 + a_{\alpha\beta} \sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,n} \eta_i \delta_j e_{ij},$$

где $\eta_\alpha=\delta_\beta=1$, а остальные η_i и δ_j — произвольные числа. Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно показать, что элемент A при преобразовании образующими группы переходит в элемент той же формы, так как число этих элементов совпадает с порядком класса элемента A.

Сначала преобразуем элемент A при помощи элемента $1+xe_{\lambda,\lambda+1}$, где $\lambda\geqslant\beta$. Тогда

$$(1-xe_{\lambda,\lambda+1})\left(1+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,n}\eta_i\delta_je_{ij}\right)(1+xe_{\lambda,\lambda+1}) =$$

$$=\left(1-xe_{\lambda,\lambda+1}+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,n}\eta_i\delta_je_{ij}\right)\times(1+xe_{\lambda,\lambda+1}) =$$

$$=1-xe_{\lambda,\lambda+1}+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,n}\eta_i\delta_je_{ij}+xe_{\lambda,\lambda+1}+a_{\alpha,\beta}\sum_{i=1}^{\beta}\eta_i x\delta_\lambda e_{i,\lambda+1} =$$

$$=1+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,\lambda}\eta_i\delta_je_{ij}+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{\alpha}\eta_i(\delta_{\lambda+1}+x\delta_\lambda)e_{i,\lambda+1}+$$

$$+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\lambda+2}^{\alpha,\,n}\eta_i\delta_je_{ij}=1+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,n}\eta_i\delta'_je_{ij},$$

где $\delta'_j=\delta_j$ $(j=\beta,\,\beta+1,\,\ldots,\,\lambda,\,\lambda+2,\,\ldots,\,n)$ и $\delta'_{\lambda+1}=\delta_{\lambda+1}+x\delta_\lambda$.

Если затем преобразовать A посредством элемента $1+ye_{\mu-1,\mu}$, где $\mu\leqslant\alpha$, то получаем:

$$(1-ye_{\mu-1,\mu})\left(1+a_{\alpha,\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,n}\eta_i\,\delta_j\,e_{ij}\right)(1+ye_{\mu-1,\mu})=$$

$$=\left(1-ye_{\mu-1,\mu}+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,\,n}\eta_i\,\delta_j\,e_{ij}-a_{\alpha\beta}\sum_{j=\beta}^{n}\eta_\mu\,y\delta_j\,e_{\mu-1,\,j}\right)(1+ye_{\mu-1,\mu})=$$

$$=1-ye_{\mu-1,\mu}+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,n}\eta_i\delta_je_{ij}-a_{\alpha\beta}\sum_{j=\beta}^{n}y\eta_\mu\delta_je_{\mu-1,\,j}+ye_{\mu-1,\mu}=$$

$$=1+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\mu-2,\,n}\eta_i\,\delta_je_{ij}+a_{\alpha\beta}\sum_{j=\beta}^{n}(\eta_\mu-y\eta_\mu)\,e_{\mu-1,\,j}+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,j=\beta}^{\alpha,n}\eta_i'\delta_je_{ij},$$

где $\eta_i'=\eta_i$ при $i=1,2,3,\ldots,\mu-2,\mu,\mu+1,\ldots,\alpha-1$, $\eta_{\mu-2}'=\eta_{\mu-1}-y\eta_\mu$.

Таким образом, утверждение, что класс элементов, сопряженных элементу $1+a_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}$ состоит из элементов вида

$$1+a_{\alpha\beta}\sum_{i=1,\,j=\beta}^{\alpha,n}\eta_i\delta_je_{ij},$$

где $\eta_\alpha=\delta_\beta=1$ и остальные η_i и δ_j — произвольные наперед заданные числа из поля вычетов по модулю p, доказано полностью.

Особого рассмотрения требуют элементы вида $1+xe_{1,\beta}+ye_{2,n}$, потому что их классы имеют тот же порядок, что и элемент $1+xe_{1,\beta}$.

ТЕОРЕМА 5. *Элемент вида* $1+xe_{1,\beta}+ye_{2,n}$ *принадлежит классу порядка* $p^{n-\beta}$, *и общий вид элементов, сопряженных элементу* $1+xe_{1,\beta}+$ $+ye_{2,n}$, *будет*

$$1+x\sum_{j=\beta}^{n}\delta_je_{1,j}+ye_{2,n},$$

где $\delta_\beta=1$, *а другие* δ_j — *произвольные числа из поля* $\mathfrak{G}F[p]$.

Доказательство. Вычислим индекс централизатора элемента $1+xe_{1,2}+ye_{2,n}$. Пусть элемент $1+\sum_{i<j}c_{ij}e_{ij}$ принадлежит нашему централизатору. Тогда

$$\left(\sum_{i<j}c_{ij}e_{ij}\right)(xe_{1,\beta}+ye_{2,n})=(xe_{1,\beta}+ye_{2,n})\sum_{\lambda<\mu}c_{\lambda,\mu}e_{\lambda,\mu}$$

или же

$$c_{1,2}ye_{1,n}=x\sum_{\mu=\beta+1}^{n}c_{\beta,\mu}e_{1,\mu},$$

откуда получаем:

$$c_{1,2}y-c_{\beta,n}x=0,$$

$$c_{\beta,\mu}=0\quad(\mu=\beta+1,\ldots,n-1).$$

Число независимых соотношений, которым подчинены коэффициенты централизатора, равно

$$n-1-\beta+1=n-\beta.$$

Но тогда число произвольных коэффициентов в централизаторе равно

$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-\beta),$$

порядок централизатора будет $p^{\frac{n(n-1)}{2}-(n-\beta)}$ и его индекс равен $p^{n-\beta}$.

Это и доказывает, что порядок класса, которому принадлежит элемент $1+xe_{1,\beta}+ye_{2,n}$, в точности равен $p^{n-\beta}$.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 6. *Элемент вида* $1+xe_{\alpha n}+ye_{1,n-1}$ *принадлежит классу порядка* $p^{\alpha-1}$, *и общий вид элементов, сопряженных с ним, будет*

$$1+x\sum_{i=1}^{\alpha}\eta_i e_{i,n}+ye_{1,n},$$

где $\eta_\alpha=1$, *а остальные* η_i — *произвольные числа из поля* $\mathfrak{G}F[p]$.

ТЕОРЕМА 7. *Если у элемента* A *треугольной группы показатель* $a_{\alpha,\beta}\neq 0$, *то порядок его класса не меньше, чем* $p^{n+\alpha-\beta-1}$.

Если порядок класса в точности равен $p^{n+\alpha-\beta-1}$ *и* $a_{\alpha,\beta}\neq 0$, *то* A *сопряжено с* $\varepsilon_{\alpha,\beta}^{a_{\alpha,\beta}}\cdot\varepsilon_{1,n}^{a_{1,n}}$ *при* $\alpha\neq 1$, $\beta\neq n$;

если порядок класса равен $p^{n-\beta}$ *и* $a_{1,\beta}\neq 0$, *то* A *сопряжено с* $\varepsilon_{1,\beta}^{a_{1,\beta}}\cdot\varepsilon_{2,n}^{a_{2,n}}$;

если порядок класса равен $p^{\alpha-1}$ *и* $a_{\alpha,n}\neq 0$, *то* A *сопряжено с* $\varepsilon_{\alpha,n}^{a_{\alpha,n}}\cdot\varepsilon_{1,n-1}^{a_{1,n-1}}$.

Доказательство. Исследуем, как изменяется матрица

$$A=1+\sum_{i<j}a_{ij}e_{ij}$$

при трансформировании посредством $\varepsilon_{\xi,\eta}^{x_{\xi,\eta}}$. Матрицу A представим в виде

$$A=\varepsilon_{n-1,n}^{a_{n-1,n}}\times$$

$$\varepsilon_{n-2,n}^{a_{n-2,n}}\cdot\varepsilon_{n-2,n-1}^{a_{n-2,n-1}}\times$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_{1,n}^{a_{1,n}}\cdot\varepsilon_{1,n-1}^{a_{1,n-1}}\cdots\varepsilon_{1,2}^{a_{1,2}}.$$

Согласно формулам преобразования (A), при трансформировании каждого множителя изменяются только множители вида

$$\varepsilon_{i,\xi}^{a_{i,\xi}}\quad(i<\xi),\qquad\varepsilon_{\eta j}^{a_{\eta,j}}\quad(\eta<j),$$

причем первые становятся равными $\varepsilon_{i,\xi}^{a_{i,\xi}}\cdot\varepsilon_{i\eta}^{a_{i\xi}x_{\xi\eta}}$, а вторые — $\varepsilon_{\eta j}^{a_{\eta j}}\varepsilon_{\xi j}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta j}}$.

Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{\xi\eta}^{-x_{\xi\eta}} A \varepsilon_{\xi\eta}^{x_{\xi\eta}} = \\
&= \varepsilon_{n-1,n}^{a_{n-1,n}} \times \\
&\quad \varepsilon_{n-2,n}^{a_{n-2,n}} \cdot \varepsilon_{n-2,n-1}^{a_{n-2,n-1}} \times \\
&\quad \cdots\cdots\cdots \\
&\quad \varepsilon_{\eta n}^{a_{\eta n}} \cdot \varepsilon_{\xi n}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta n}} \cdot \varepsilon_{\eta,n-1}^{a_{\eta,n-1}} \cdot \varepsilon_{\xi,n-1}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta,n-1}} \cdots \varepsilon_{\eta,\eta+1}^{a_{\eta,\eta+1}} \cdot \varepsilon_{\xi,\eta+1}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta,\eta+1}} \times \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; \varepsilon_{\xi-1,\xi}^{a_{\xi-1,\xi}} \varepsilon_{\xi-1,\eta}^{a_{\xi-1,\xi}x_{\xi\eta}} \times \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; \varepsilon_{\xi-2,\xi}^{a_{\xi-2,\xi}} \varepsilon_{\xi-2,\eta}^{a_{\xi-2,\xi}x_{\xi\eta}} \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\varepsilon_{1,n}^{a_{1,n}} \varepsilon_{1,n-1}^{a_{1,n-1}} \cdots\cdots\cdots \varepsilon_{1,\xi+1}^{a_{1,\xi+1}} \varepsilon_{1,\xi}^{a_{1\xi}} \cdot \varepsilon_{1,\eta}^{a_{1,\xi}x_{\xi\eta}} \cdots \varepsilon_{1,2}^{a_{1,2}}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что η-я строка и ξ-й столбец не пересекаются, так как $\eta > \xi$.

Начнем теперь переставлять множители $\varepsilon_{\xi j}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta j}}$ так, чтобы они стали рядом с множителями $\varepsilon_{\xi j}$, стоящими в ξ-й строке, т. е., ввиду $\xi < \eta$, ниже их. При этом будем придерживаться следующего порядка: сначала переставляем $\varepsilon_{\xi n}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta n}}$ с множителями η-й строки $\varepsilon_{\eta,n-1}^{a_{\eta,n-1}}$, $\varepsilon_{\xi,n-1}^{-x_{\xi,\eta}a_{\eta,n-1}}$, ..., $\varepsilon_{\eta,\eta+1}^{a_{\eta,\eta+1}} \cdot \varepsilon_{\xi,\eta+1}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta,\eta+1}}$, потом с элементами $\eta-1$-й строки, потом $\eta-2$-й строки и т. д. Затем в этом же порядке переставляем $\varepsilon_{\xi,n-1}^{-x_{\xi,\eta}a_{\eta,n-1}}$ и т. д. Чрезвычайно важно для нас следующее обстоятельство: при всех этих перестановках $\varepsilon_{\xi j}^{-x_{\xi\eta}a_{\eta j}}$ коммутирует со всеми множителями, с которыми мы его переставляем. Это следует из формулы 1) соотношений (A). Действительно, когда мы переставляем $\varepsilon_{\xi j}$ по «η», «$\eta-1$», ..., «ξ» строкам, то встречаемся с множителями $\varepsilon_{\mu,\nu}^{c_{\mu\nu}}$ ($\xi \leqslant \mu < \nu$). Ясно, что не может быть ни $\xi = \nu$, ни $\mu = j$ (так как $j > \eta$).

Те же операции произведем с множителями $\varepsilon_{i,\eta}^{a_{i\xi}x_{\xi\eta}}$ в «ξ» столбце, проводя для них те же рассуждения.

В результате мы получаем для матрицы $\varepsilon_{\xi\eta}^{-x_{\xi\eta}} A \varepsilon_{\xi\eta}^{x_{\xi\eta}}$ следующую запись:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varepsilon_{\xi\eta}^{-x_{\xi\eta}} A \varepsilon_{\xi\eta}^{x_{\xi\eta}} = \\
&\quad = * \times \\
&\qquad * \; * \times \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots \\
&\qquad \varepsilon_{\xi n}^{a_{\xi n} - x_{\xi\eta}a_{\eta n}} \cdot \varepsilon_{\xi,n-1}^{a_{\xi,n-1} - x_{\xi\eta}a_{\eta,n-1}} \cdots \varepsilon_{\xi,\eta+1}^{a_{\xi,\eta+1} - x_{\xi\eta}} \varepsilon_{\xi,\eta}^{a_{\xi,\eta}} \; * \; * \ldots * \times \\
&\quad * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * \; \varepsilon_{\xi-1,\eta}^{a_{\xi-1,\eta} + a_{\xi-1,\xi}x_{\xi,\eta}} \; * \ldots * \times \\
&\quad * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * \; \varepsilon_{\xi-2,\eta}^{a_{\xi-2,\eta} + a_{\xi-2,\xi}x_{\xi,\eta}} \; * \ldots * \times \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad * \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots * \; \varepsilon_{1,\eta}^{a_{1,\eta} + a_{1,\xi}x_{\xi,\eta}} \; * \ldots *,
\end{aligned}
\right\} \quad (C)
$$

где через $*$ обозначены множители, имеющие те же значения, что и множители, стоящие на тех же местах в (A).

Применяя формулу (C) к различным $\varepsilon_{\xi,\eta}^{x_{\xi,\eta}}$, докажем, что если в A $a_{\alpha,\beta} \neq 0$, то существует сопряженная с A матрица такая, что в ней $a'_{\alpha,n}$, $a'_{\alpha,n-1}, \ldots, a'_{\alpha,\beta-1}, a'_{\alpha-1,\beta}, \ldots, a'_{1,\beta}$ имеют произвольные наперед заданные значения.

Действительно, будем последовательно преобразовывать A при помощи матриц $\varepsilon_{\beta i}^{\left(a'_{\alpha i}-a_{\alpha i}\right)a_{\alpha\beta}^{-1}}$ при $i = n, n-1, \ldots, \beta+1$. Согласно формуле (C), показатель при $\varepsilon_{\alpha i}$ сделается тогда равным

$$a_{\alpha i} + (a'_{\alpha i} - a_{\alpha i})\, a_{\alpha\beta}^{-1} \cdot a_{\alpha\beta} = a'_{\alpha i},$$

причем показатели при $\varepsilon_{\alpha j}$ с другими $j > i$ не изменяются, так как изменяются только множители в β-й строке и в i-м столбце.

После этого мы преобразуем A последовательно при помощи элементов $\varepsilon_{j,\alpha}^{\left(a_{j\beta}-a'_{j\beta}\right)a_{\alpha\beta}^{-1}}$, $j = \alpha-1, \alpha-2, \ldots, 1$. Для них верен тот же ход рассуждений. Дополнительно надо только установить, что показатели в множителях $\varepsilon_{\alpha i}$ остаются прежними $a'_{\alpha i}$. Это ясно из того, что, по формуле (6), при трансформировании элементом $\varepsilon_{j\alpha}$ изменяются только множители, стоящие в j-й строке или в α-м столбце. Но ни в j-й строке, ни в α-м столбце $\varepsilon_{\alpha i}$ не стоит, так как $j < \alpha < i$.

Так как общее число коэффициентов $a'_{\alpha,n}, \ldots, a'_{\alpha,\beta+1}, a'_{\alpha-1,\beta}, \ldots, a'_{1,\beta}$ равно $n+\alpha-\beta-1$, то этим доказано, что при $a_{\alpha\beta} \neq 0$ порядок класса A не меньше $p^{n+\alpha-\beta-1}$.

Пусть порядок класса, содержащего элемент A с $a_{\alpha,\beta} \neq 0$, в точности равен $p^{n+\alpha-\beta-1}$.

Рассмотрим элемент A', сопряженный с A, у которого показатели при

$$\varepsilon_{\alpha,n}, \varepsilon_{\alpha,n-1}, \ldots, \varepsilon_{\alpha,\beta+1}\ \varepsilon_{\alpha-1,\beta}, \varepsilon_{\alpha-2,\beta}, \ldots, \varepsilon_{1,\beta} \qquad \text{(I)}$$

— нули. Существование такого элемента следует из только что доказанного.

Прежде всего отметим, что в A и A' на α-строке правее $\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}$ и в β-столбце выше $\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}$ не может быть множителей с отличными от нуля показателями. Действительно, в противном случае, по предыдущему, элемент A принадлежал бы классу порядка выше, чем $p^{n+\alpha-\beta-1}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\beta \neq n$. Допустим в A', что $a'_{i,k} \neq 0$ при $k = n$. Тогда элемент A' можно преобразовать в A'' посредством $\varepsilon_{kn}^{\left(a''_{i,n}-a'_{i,n}\right)a'^{-1}_{i,k}}$. При преобразовании будут изменяться только показатели n-го столбца, а именно, a'_{jn} будет переходить в

$$a'_{jn} + \left(a''_{i,n} - a'_{i,n}\right) a'^{-1}_{i,k} a'_{j,k}$$

в $1, 2, \ldots, k-1$ строках. Показатель $a'_{\alpha,n}$, переходящий в

$$a'_{\alpha,n} + \left(a''_{i,n} - a'_{i,n}\right) a'^{-1}_{i,k} a'_{\alpha,k},$$

численно остается равным нулю, потому что

$$a'_{\alpha,n} = a'_{\alpha,k} = 0.$$

В итоге показатели при множителях (I) в A' также остаются нулями, но показатель при $\varepsilon_{i,n}$ будет произвольным наперед заданным числом.

Применяя результат первой части доказательства к самому множителю $\varepsilon_{\alpha\beta}^{a_{\alpha\beta}}$, мы можем затем показатели при множителях (I) сделать произвольными наперед заданными числами:

$$a'''_{\alpha,n}, a'''_{\alpha,n-1}, \ldots, a'''_{\alpha,\beta+1}, a'''_{\alpha-1,\beta}, a'''_{\alpha-2,\beta}, \ldots, a'''_{1,\beta}.$$

Тогда в A''' показатель при $\varepsilon_{i,n}$ будет иметь вид:

$$a''_{i,n} + F\left(a'''_{ij}, a''_{l,m}\right),$$

где $a''_{i,n}$ есть произвольное число, а F — вполне определенная рациональная функция от показателей преобразующих и преобразуемых элементов.

Ясно, что показатель при $\varepsilon_{i,n}$ остается и после преобразований также произвольным числом $a'''_{i,n}$, потому что он имеет вид суммы, где одно слагаемое принимает произвольное значение.

Если бы $a'_{i,k}$ было не равно нулю при $k \neq n$, то в результате исходный элемент A имел бы больше, чем $p^{n+\alpha-\beta-1}$ сопряженных с ним элементов.

Таким образом, в A' все $a'_{i,k} = 0$, где $k \neq n$ и $a'_{i,k}$ не есть $a'_{\alpha,\beta}$. Пусть $\alpha \neq 1$ и в A' $a'_{i,n} \neq 0$. Тогда элемент A' преобразуем посредством $\varepsilon_{1i}^{\left(-a''_{1,n}+a'_{i,n}\right) a'^{-1}_{i,n}}$ в элемент A'' так, чтобы показатель при $\varepsilon_{1,n}$ стал произвольным наперед заданным числом $a''_{1,n}$. Это привело бы к увеличению порядка класса элемента A за пределы числа $p^{n+\alpha-\beta-1}$.

Таким образом, в A' все $a'_{i,n}$ также равны нулю, если $\alpha \neq 1$.

Если же $\alpha = 1$, то в A' можно обращать в нуль показатели множителей

$$\varepsilon_{1,n}, \varepsilon_{1,n-1}, \ldots, \varepsilon_{1,\beta+1}.$$

Если бы какое-нибудь $a'_{i,n}$, где $i \neq 2$, было отлично от нуля, то мы смогли бы A' преобразовать в элемент A'' посредством $\varepsilon_{2,i}^{\left(-a''_{2n}-a'_{2n}\right) a'^{-1}_{i,n}}$ и тогда в A'' показатель при $\varepsilon_{2,n}$ стал бы произвольным наперед заданным числом $a''_{2,n}$, что привело бы к увеличению порядка класса элемента A за пределы числа $p^{n-\beta}$.

Таким образом, в A' при $\alpha = 1$ все $a'_{i,n} = 0$, где $i \neq 2$. Очевидно, что отличный от нуля показатель a'_{2n} нельзя использовать для обращения в произвольное число какого-нибудь показателя, кроме показателя $a'_{1,n}$, который мы не имеем права обращать в произвольное число при $\alpha = 1$.

Следовательно, элемент A, принадлежащий классу порядка $p^{n-\beta}$ и в котором $a_{1,\beta} \neq 0$, сопряжен с элементом $\varepsilon_{1,\beta}^{a_{1,\beta}} \varepsilon_{2,n}^{a_{2,n}}$.

В силу симметрии треугольной матрицы, справедливо утверждение: элемент A, принадлежащий классу порядка $p^{\alpha-1}$ и в котором $a_{\beta,n} \neq 0$, сопряжен с элементом $\varepsilon_{\alpha,n}^{a_{\alpha,n}} \varepsilon_{1,n-1}^{a_{1,n-1}}$. Так как в общем случае нельзя доказать, что в A' показатель $a'_{1,n}$ должен быть нулем, то сказанное доказывает теорему 7.

Из теоремы 7, в силу теорем 4, 5 и 6, для $\beta = \alpha + 1$ выводим

Следствие. *Если у элемента A треугольной группы коэффициент $a_{\alpha,\alpha+1} \neq 0$ и порядок класса сопряженных ему элементов в точности равен p^{n-2}, то A сопряжено с $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}^{a_{\alpha,\alpha+1}} \cdot \varepsilon_{1,n}^{a_{1,n}}$ и имеет форму*

$$1 + a_{\alpha,\alpha+1} \sum_{i=1,\, j=\alpha+1}^{\alpha,\, n} \eta_i \delta_j e_{ij} + a_{1,n} e_{1,n},$$

где $\eta_\alpha = \delta_{\alpha+1} = 1$, если $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq n-1$.

При $a_{1,2} \neq 0$ A сопряжено с элементом $\varepsilon_{1,2}^{a_{1,2}} \varepsilon_{2,n}^{a_{2,n}}$ и имеет форму

$$1 + a_{1,2} \sum_{j=2}^{n} \delta_j e_{1,j} + a_{2,n} e_{2,n}.$$

При $a_{n-1,n} \neq 0$ A сопряжено с элементом $\varepsilon_{1,2}^{a_{1,2}} \varepsilon_{2,n}^{a_{2,n}}$ и имеет форму

$$1 + a_{n,n+1} \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i e_{i,n} + a_{1,n-1} e_{1,n-1},$$

где $\eta_{n-1} = 1$.

§ 5. Отображения основных образующих при автоморфизме

Элемент $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}$, не принадлежащий коммутанту треугольной группы, при автоморфизме переходит только в элементы A, содержащие по крайней мере один множитель типа $\varepsilon_{\beta,\beta+1}^{a_{\beta,\beta+1}}$. Но, с другой стороны, порядки классов при автоморфизме сохраняются, поэтому порядок класса элементов, сопряженных с A, также должен равняться p^{n-2}. Отсюда, в силу следствия из теоремы 7, элемент $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}$ при автоморфизме переходит лишь в элементы вида:

$$1 + a_{\beta,\beta+1} \sum_{i=1,\, j=\beta+1}^{\beta,\, n} \eta_i \delta_j e_{ij} + a_{1,n} e_{1,n},$$

где $\eta_\beta = \delta_{\beta+1} = 1$.

Будем рассматривать действие автоморфизма группы на фактор-группу по второму члену убывающего центрального ряда. Для элементов этой фактор-группы верно утверждение:

Два элемента фактор-группы всегда коммутируют между собой, если они имеют форму:

$$1 + a_1 e_{i,i+1} + b_1 e_{i,i-2} + c_1 e_{i-1,i+1},$$
$$1 + a_2 e_{j,j+1} + b_2 e_{j,j+2} + c_2 e_{j-1,j+1},$$

и индексы i и j удовлетворяют неравенству:

$$|i-j| \geqslant 2.$$

Это является следствием того, что произведения двух членов вида $e_{i,k}$ и e_{jl}, не равные нулю, имеют индексы, разности которых по абсолютному значению будут не меньше числа 3.

Из последнего замечания следует, что все соседние образующие $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}$ и $\varepsilon_{\alpha+1,\alpha+2}$ при автоморфизме могут испытывать только такие отображения:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon^{\sigma}_{\alpha,\alpha+1} = 1 + a_{\beta,\beta+1}\sum_{i=1,\ j=\beta+1}^{\beta,\ n}\eta_i^{(\beta)}\delta_j^{(\beta)}e_{ij} + a^{(\beta)}e_{1,n},\\
&\varepsilon^{\sigma}_{\alpha+1,\alpha+2} = 1 + a_{\beta+1,\beta+2}\sum_{i=1,\ j=\beta+2}^{\beta+1,\ n}\eta_i^{(\beta+1)}\delta_j^{(\beta+1)}e_{ij} + a^{(\beta+1)}e_{1,n},\\
&\text{или же}\\
&\varepsilon^{\sigma}_{\alpha,\alpha+1} = 1 + a_{\beta+1,\beta+2}\sum_{i=1,\ j=\beta+1}^{\beta+1,\ n}\eta_i^{(\beta+1)}\delta_j^{(\beta+1)}e_{ij} + a^{(\beta+1)}e_{1,n},\\
&\varepsilon^{\sigma}_{\alpha+1,\alpha+2} = 1 + a_{\beta,\beta+1}\sum_{i=1,\ j=\beta+1}^{\beta,\ n}\eta_i^{(\beta)}\delta_j^{(\beta)}e_{ij} + a^{(\beta)}e_{1,n}.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(II)}$$

Действительно, в противном случае элемент $\bar{\varepsilon}_{\alpha,\alpha+2} = (\bar{\varepsilon}_{\alpha,\alpha+1}, \bar{\varepsilon}_{\alpha+1,\alpha+2})$ фактор-группы по второму члену убывающего центрального ряда, отличный от единицы, при автоморфизме в фактор-группе, порожденном автоморфизмом σ всей группы, переходил бы в единичный элемент той же фактор-группы.

Полученное противоречие доказывает сохранение соседства образующих $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}$ при автоморфизме, понимаемое в смысле, указываемом в отображении (II).

Если бы единица перешла в $\beta \neq 1$, $\beta \neq n-1$, то могли бы иметь место только такие подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \beta-1 & \beta & \beta+1 & \dots \\ \beta & \beta-1 & \dots & 2 & 1 & * & \dots \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-\beta & n-\beta+1 & \dots \\ \beta & \beta+1 & \dots & n-1 & * & \dots \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что, каким бы числом ни заменялось $\beta+1$ в первом случае и $n-\beta+1$ — во втором случае, соседство чисел β, $\beta+1$ и, соответственно, $n-\beta$ и $n-\beta+1$ нарушается.

Таким образом, без нарушения соседства индексов возможны только такие подстановки первых индексов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат наших рассуждений сформулируем в виде теоремы:

ТЕОРЕМА 8. *Треугольная группа может иметь автоморфизмы только двух видов:*

$$1)\ \varepsilon^{\sigma}_{\alpha,\alpha+1} = 1 + a_{\alpha,\alpha+1} \sum_{i=1,\, j=\alpha+1}^{\alpha,\, n} \eta_i \delta_j e_{ij} + A \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$2)\ \varepsilon^{\tau}_{\alpha,\alpha+1} = 1 + a_{n-\alpha,\, n-\alpha+1} \sum_{i=1,\, j=n-\alpha+1}^{n-\alpha,\, n} \eta_i \delta_j e_{ij} + B \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где вид слагаемых A и B определяется следствием из теоремы 7.

§ 6. Сведéние автоморфизмов

Пусть дан некоторый автоморфизм σ вида

$$(1 + e_{1,2})^{\sigma} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \delta_j^{(1)} e_{1,j} + y e_{2,n},$$

$$(1 + e_{\alpha,\alpha+1})^{\sigma} = 1 + \sum_{i=1,\, j=\alpha+1}^{\alpha,\, n} \xi_i^{(\alpha)} \delta_j^{(\alpha)} e_{ij} + a^{(\alpha)} e_{1,n} \quad (\alpha = 2, 3, \ldots n-2).$$

Здесь каждый раз $\xi_\alpha^{(\alpha)} = 1$, $\delta_{\alpha+1}^{(\alpha)} = 0$. Имеем:

$$(1 + e_{n-1,n})^{\sigma} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{(n-1)} e_{i,n} + x e_{1,n-1},$$

где $\xi_{n-1}^{(n-1)}$ — некоторое отличное от нуля число из поля $\mathfrak{G}F[p]$.

Умножим автоморфизм σ слева на внутренний автоморфизм τ_1, состоящий из последовательного преобразования элементов треугольной группы при помощи элементов

$$1 - \delta_j^{(1)} \delta_2^{(1)-1} e_{2,j} \quad (j = 3, 4, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда коэффициенты $\delta_3^{(1)}, \delta_4^{(1)}, \ldots, \delta_n^{(1)}$ в $\varepsilon^{\sigma}_{1,2}$ обратятся в нули, а коэффициенты $\xi_i^{(\alpha)}$ в других $\varepsilon^{\sigma}_{\alpha,\alpha+1}$ как-то изменятся. В результате получаем автоморфизм:

$$(1 = e_{1,2})^{\tau_1\sigma} = 1 + \delta_2^{(1)} e_{1,2} + y e_{2,n},$$

$$(1 + e_{\alpha,\alpha+1})^{\tau_1\sigma} = 1 + \sum_{i=1,\, j=\alpha+1}^{\alpha,\, n} \xi_j^{\prime(\alpha)} e_{ij} + a^{(\alpha)} e_{1,n} \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, n-2),$$

$$(1 + e_{n-1,n})^{\tau_1\sigma} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{\prime(n-1)} e_{i,n} + x e_{1,n-1}.$$

Умножим автоморфизм $\tau_1\sigma$ слева на внутренний автоморфизм τ_2, состоящий из последовательного преобразования элементов треугольной группы посредством элементов

$$1 - \delta_j^{(2)} \delta_3^{(2)-1} e_{3,j} \quad (j = 4, 5, \ldots, n). \tag{5}$$

Тогда элемент $\varepsilon^{\tau_1\sigma}_{1,2}$ не изменится, так как $\varepsilon^{\tau_1\sigma}_{1,2}$ коммутирует со всеми элементами из (5), у элемента $\varepsilon^{\tau_1\sigma}_{2,3}$ коэффициенты $\delta_4^{(2)}, \delta_5^{(2)}, \ldots, \delta_n^{(2)}$ обратятся в нули, а коэффициенты $\xi_i^{(\alpha)}$ в других $\varepsilon^{\tau_1\sigma}_{\alpha,\alpha+1}$ как-то изменяется.

В результате получаем автоморфизм:

$$(1+e_{1,2})^{\tau_2\tau_1\sigma}=1+\delta_2^{(1)}\cdot e_{1,2}+y\,e_{2,n},$$

$$(1+e_{2,3})^{\tau_2\tau_1\sigma}=1+\delta_3^{(2)}e_{2,3}+\xi_1^{(2)}\delta_3^{(2)}e_{1,3}+a^2e_{1,n},$$

$$(1+e_{\alpha,\alpha+1})^{\tau_2\tau_1\sigma}=1+\sum_{i=1,\ j=\alpha+1}^{\alpha,\ n}\xi_1^{''(\alpha)}\delta_j^{(\alpha)}e_{ij}+a^{(\alpha)}e_{1,n}\quad(\alpha=3,4,\ldots,n-2),$$

$$(1+e_{n-1,n})^{\tau_2\tau_1\sigma}=1+\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^{''(n-1)}e_{i,n}+xe_{1,n-1}.$$

Затем умножим автоморфизм $\tau_2\tau_1\sigma$ слева на внутренний автоморфизм, состоящий из последовательного преобразования элементов треугольной группы посредством элементов

$$1-\delta_j^{(3)}\delta_4^{(3)-1}e_{4,j}\quad(j=5,6,\ldots,n).\tag{6}$$

Тогда элементы $\varepsilon_{1,2}^{\tau_2\tau_1\sigma}$, $\varepsilon_{2,3}^{\tau_2\sigma_1\sigma}$ не изменяются, так как они коммутируют со всеми элементами из (6), у элемента $\varepsilon_{3,4}^{\tau_3\tau_1\sigma}$ коэффициенты $\delta_5^{(3)},\delta_6^{(3)},\ldots,\delta_n^{(3)}$ обратятся в нули, а коэффициенты $\xi_i^{(\alpha)}$ в других образующих как-то изменятся.

В результате получаем автоморфизм $\tau_3\tau_2\tau_1\sigma$:

$$(1+e_{1,2})^{\tau_3\tau_2\tau_1\sigma}=1+\delta_2^{(1)}e_{1,2}+y_{2,n},$$

$$(1+e_{2,3})^{\tau_3\tau_2\tau_1\sigma}=1+\delta_3^{(2)}e_{2,3}+\tilde{\xi}_1^{(2)}\delta_3^{(2)}e_{1,3}+a^{(2)}e_{1,n},$$

$$(1+e_{3,4})^{\tau_3\tau_2\tau_1\sigma}=1+\delta_4^{(3)}e_{3,4}+\xi_1^{(3)}\delta_4^{(3)}e_{1,4}+\xi_2^{(3)}\delta_4^{(3)}e_{2,4}+a^{(3)}e_{1,n},$$

$$(1+e_{\alpha,\alpha+1})^{\tau_3\tau_2\tau_1\sigma}=1+\sum_{i=1,\ j=\alpha+1}^{\alpha,\ n}\xi_i^{'''(\alpha)}\delta_j^{(\alpha)}e_{ij}+a^{(\alpha)}e_{1,n}\quad(\alpha=4,5,\ldots,n-2),$$

$$(1+e_{n-1,n})^{\tau_3\tau_2\tau_1\sigma}=1+\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^{'''(n-1)}e_{1,n}+xe_{1,n-1}.$$

Продолжая эту операцию далее, мы в результате придем к автоморфизму вида:

$$(1+e_{1,2})^{\sigma'}=1+\delta_2^{(1)}e_{1,2}+y\,e_{2,n},$$

$$(1+e_{\alpha,\alpha+1})^{\sigma'}=1+\delta_{\alpha+1}^{(\alpha)}\sum_{i=1}^{\alpha}\xi_i^{(\alpha)}e_{i,\alpha+1}+a^{(\alpha)}e_{1,n}\quad(\alpha=2,3,\ldots,n-2),$$

$$(1+e_{n-1,n})^{\sigma'}=1+\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^{(n-1)}e_{1,n}+xe_{1,n-1}.$$

Уточним коэффициенты $\xi_i^{(\alpha)}$ при помощи соотношения

$$(\varepsilon_{\alpha,\alpha+1},\varepsilon_{\beta,\beta+1})=1\quad(\alpha+1\neq\beta,\ \beta+1\neq\alpha),$$

которое при автоморфизме не должно нарушаться. Получим:

$$(\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}^{\sigma},\ \varepsilon_{\beta,\beta+1}^{\sigma})=1.\tag{7}$$

Из (7) следует;

$$\delta^{(\alpha)}_{\alpha+1}\sum_{i=1}^{\alpha}\xi^{(\alpha)}_i e_{i,\,\alpha+1}\,\delta^{\beta}_{\beta+1}\sum_{j=1}^{\beta}\xi^{(\beta)}_j e_{j,\,\beta+1}=\delta^{(\beta)}_{\beta+1}\sum_{j=1}^{\beta}\xi^{(\beta)}_j e_{j,\,\beta+1}\cdot\delta^{(\alpha)}_{\alpha+1}\sum_{i=1}^{\alpha}\xi^{(\alpha)}_i e_{i,\,\alpha+1},$$

Если $\alpha<\beta$, то

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\xi^{(\alpha)}_i e_{i,\,\alpha+1}\cdot\sum_{j=1}^{\beta}\xi^{(\beta)}_j e_{j,\,\beta+1}=0$$

или же

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\xi^{(\alpha)}_i\xi^{(\beta)}_{\alpha+1}e_{i,\,\beta+1}=0.$$

Отсюда $\xi^{(\alpha)}_{\alpha}\cdot\xi^{(\beta)}_{\alpha+1}=0$. Так как $\xi^{(\alpha)}_{\alpha}=1$, то $\xi^{\beta}_{\alpha+1}=0$.

Заставляя α пробегать значения $1, 2, \ldots, \beta-1$, получаем, что всякий автоморфизм при помощи последовательных внутренних автоморфизмов можно свести к автоморфизму вида:

$$(1+e_{1,2})^{\sigma'}=1+\delta^{(1)}_2 e_{1,2}+ye_{2,n},$$

$$(1+e_{\alpha,\alpha+1})^{\sigma'}=1+\delta^{(\alpha)}_{\alpha+1}e_{\alpha,\alpha+1}+\delta^{(\alpha)}_{\alpha+1}\xi^{(\alpha)}_1 e_{1,\alpha+1}+a^{(\alpha)}e_{1,n}$$
$$(\alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ n-2),$$

$$(1+e_{n-1,n})^{\sigma'}=1+\xi^{(n-1)}_{n-1}e_{n-1,n}+\xi^{(n-1)}_1 e_{1,n}+xe_{1,n-1}.$$

Умножим автоморфизм σ' слева на автоморфизм τ, состоящий из последовательного преобразования элементов группы при помощи элементов

$$1+\xi^{(2)}_1 e_{1,2},\ 1+\xi^{(3)}_1 e_{1,3},\ \ldots,\ 1+\xi^{(n-1)}_1\xi^{(n-1)-1}_{n-1}e_{1,n-1};$$

в результате получаем автоморфизм $\sigma''=\tau\sigma'$ вида:

$$(1+e_{1,2})^{\sigma''}=1+\delta^{(1)}_2 e_{1,2}+ye_{2,n}-y\xi^{(2)}_1 e_{1,n},$$

$$(1+e_{\alpha,\alpha+1})^{\sigma''}=1+\delta^{(\alpha)}_{\alpha+1}e_{\alpha,\alpha+1}+a^{(\alpha)}e_{1,n}\quad(\alpha=2,\ 3,\ \ldots,\ n-2),$$

$$(1=e_{n-1,n})^{\sigma''}=1+\xi^{(n-1)}_{n-1}e_{n-1,n}+xe_{1,n-1}.$$

Эти автоморфизмы можно упростить еще более, если ввести в рассмотрение автоморфизмы, вызываемые элементами нормализатора треугольной группы во всей полной линейной группе.

Нетрудно показать, что нормализатор нашей треугольной группы состоит из треугольных матриц с любыми отличными от нуля коэффициентами также и на главной диагонали.

Мы получим систему образующих этого нормализатора, если к образующим $1+e_{\alpha,\alpha+1}$ $(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1)$ присоединим еще элементы:

$$1+(\delta_i-1)e_{ii},$$

где i пробегает все значения $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$.

Полученный автоморфизм σ'' подвергаем дальнейшему упрощению, умножая его слева на так называемый диагональный автоморфизм, полу-

чающийся в результате преобразования всех элементов нашей исходной треугольной группы при помощи элементов нормализатора:

$$1 + (\delta_{\alpha+1}^{(\alpha)} - 1)\, e_{\alpha+1,\, \alpha+1}.$$

Ради большего уяснения выкладок, посмотрим, как при помощи элемента нормализатора $1 + (y-1)\, e_{\alpha\alpha}$ преобразуется элемент

$$1 + xe_{\alpha,\, \beta}.$$

Мы имеем:

$$[1 + (y^{-1} - 1)\, e_{\alpha\alpha}]\, [1 + xe_{\alpha\beta}]\, [1 + (y-1)\, e_{\alpha\alpha}] =$$

$$= [1 + (y^{-1} - 1)\, e_{\alpha\alpha} + xe_{\alpha\beta} + xy^{-1}e_{\alpha,\, \beta} - xe_{\alpha,\, \beta}]\, [1 + (y-1)\, e_{\alpha\alpha}] =$$

$$= [1 + (y^{-1} - 1)\, e_{\alpha\alpha} + xy^{-1}e_{\alpha,\, \beta}]\, [1 + (y-1)\, e_{\alpha\alpha}] = 1 + (y^{-1} - 1)\, e_{\alpha\alpha} +$$

$$+ xy^{-1}e_{\alpha\beta} + (y-1)\, e_{\alpha\alpha} + 2e_{\alpha\alpha} - ye_{\alpha\alpha} - y^{-1}e_{\alpha\alpha} = 1 + xy^{-1}e_{\alpha\beta}.$$

Точно так же имеем:

$$[1 + (y^{-1} - 1)\, e_{\beta\beta}]\, [1 + xe_{\alpha,\, \beta}]\, [1 + (y-1)\, e_{\beta,\, \beta}] =$$

$$= [1 + (y^{-1} - 1)\, e_{\beta\beta} + xe_{\alpha,\, \beta}]\, [1 + (y-1)\, e_{\beta\beta}] = 1 + (y^{-1} - 1)\, e_{\beta\beta} + xe_{\alpha\beta} +$$

$$+ (y-1)\, e_{\beta\beta} + 2e_{\beta\beta} - y^{-1}e_{\beta\beta} - ye_{\beta\beta} + xye_{\alpha\beta} - xe_{\alpha\beta} = 1 + xye_{\alpha,\, \beta}.$$

Пусть первый диагональный автоморфизм τ_1, на который умножается слева σ'', будет определяться посредством элемента

$$1 + (\delta_2^{(1)} - 1)\, e_{22}.$$

Тогда получим автоморфизм $\tau_1\sigma''$:

$$(1 + e_{1,\, 2})^{\tau_1\sigma''} = 1 + e_{1,\, 2} + y\delta_2^{(1)}\, e_{2,n} - y\xi_1^{(2)} e_{1,\, n}\,,$$

$$(1 + e_{2,\, 3})^{\tau_1\sigma''} = 1 + \delta_3^{(2)}\delta_2^{(1)} e_{2,\, 3} + a_{1,\, n}^{(2)}\,,$$

$$(1 + e_{\alpha,\, \alpha+1})^{\tau_1\sigma''} = 1 + \delta_{\alpha+1}^{(\alpha)} e_{\alpha,\, \alpha+1} + a^{(\alpha)}\, e_{1,\, n} \quad (\alpha = 3, 4, \ldots, n-2),$$

$$(1 + e_{n-1,n})^{\tau_1\sigma''} = 1 + \xi_{n-1}^{(n-1)} e_{n-1,\, n} + x_{1,\, n-1}\,.$$

Затем автоморфизм $\tau_1\sigma''$ умножим слева на диагональный автоморфизм τ_2, происходящий от элемента

$$1 + (\delta_3^{(2)-1} \cdot \delta_2^{(1)-1} - 1)\, e_{33}.$$

В результате получаем автоморфизм:

$$(1 + e_{1,\, 2})^{\tau_2\tau_1\sigma''} = 1 + e_{1,\, 2} + y\delta_2^{(1)} e_{2,\, n} - y\xi_1^{(2)} e_{1,\, n},$$

$$(1 + e_{2,\, 3})^{\tau_2\tau_1\sigma''} = 1 + e_{2,\, 3} + a^{(2)} e_{1,\, n},$$

$$(1 + e_{3,\, 4})^{\tau_2\tau_1\sigma''} = 1 + \delta_4^{(3)}\delta_3^{(2)}\delta_2^{(1)} e_{3,\, 4} + a^{(3)} e_{1,\, n},$$

$$(1 + e_{\alpha,\, \alpha+1})^{\tau_2\tau_1\sigma''} = 1 + \delta_{\alpha+1}^{(\alpha)} e_{\alpha,\, \alpha+1} + a^{(\alpha)} e_{1,\, n} \quad (\alpha = 4,\ 5,\ \ldots,\ n-2),$$

$$(1 + e_{n-1,\, n})^{\tau_2\tau_1\sigma''} = 1 + \xi_{n-1}^{(n-1)} e_{n-1,\, n} + xe_{1,\, n-1}\,.$$

Произведя это сведéние автоморфизмов над всеми образующими группы, в результате получим упрощенный автоморфизм:

$$(1+e_{1,2})^{\sigma'''} = 1 + e_{1,2} + ye_{2,n} + a^{(1)}e_{1,n},$$
$$(1+e_{\alpha,\alpha+1})^{\sigma''} = 1 + e_{\alpha,\alpha+1} + a^{(\alpha)}e_{1,n} \quad (\alpha = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-2),$$
$$(1+e_{n-1,n})^{\sigma'''} = 1 + e_{n-1,n} + xe_{1,n-1} + a^{(n-1)}e_{1,n},$$

Автоморфизм σ''' упростим еще больше, умножая его слева на внутренние автоморфизмы, вызываемые преобразованием посредством элементов

$$\varepsilon_{2,n}^{-a^{(1)}+y} \text{ и } \varepsilon_{1,n-1}^{a^{(n-1)}}.$$

В результате получим автоморфизм σ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}^{\sigma} &= \varepsilon_{1,2}\cdot\varepsilon_{2,n}^{y}, \\ \varepsilon_{\alpha,\alpha+1}^{\sigma} &= \varepsilon_{\alpha,\alpha+1}\cdot\varepsilon_{1,n}^{y_\alpha} \quad (\alpha = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-2), \\ \varepsilon_{n-1,n}^{\sigma} &= \varepsilon_{n-1,n}\cdot\varepsilon_{1,n-1}^{x}. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом мы показали, что всякий автоморфизм, сохраняющий индекс образующих $\varepsilon_{\alpha,\alpha+1}$, может быть переведен в автоморфизмы простого вида (8) при помощи автоморфизмов, вызываемых преобразованием элементов группы посредством элементов нормализатора.

Покажем справедливость обратного положения, а именно, что отображения вида (8) сами по себе являются автоморфизмами при любых значениях α, y_α и x.

Для этого достаточно показать, что они не нарушают тех соотношений между элементами группы, из которых, по теореме 2, следуют все такие соотношения. С этой целью рассмотрим соотношения вида

$$(\varepsilon_{\alpha\beta}^{\sigma},\ \varepsilon_{\gamma\delta}^{\sigma}) = 1.$$

Нам достаточно проверить справедливость равенств

$$(\varepsilon_{1,2}^{\sigma},\ \varepsilon_{\gamma\delta}^{\sigma}) = 1, \quad \gamma \neq 2,$$

и

$$(\varepsilon_{n-1,n}^{\sigma}\varepsilon_{\gamma\delta}^{\sigma}) = 1, \quad \delta \neq n-1.$$

Действительно, для левых частей этих равенств получаем:

$$\varepsilon_{1,2}\cdot\varepsilon_{2,n}^{y}\cdot\varepsilon_{\gamma\delta}\cdot\varepsilon_{2,n}^{-y}\cdot\varepsilon_{1,2}^{-1}\cdot\varepsilon_{\gamma\delta}^{-1} = 1,$$
$$\varepsilon_{n-1,n}\cdot\varepsilon_{1,n-1}^{x}\,\varepsilon_{\gamma\delta}\cdot\varepsilon_{1,n-1}^{-x}\cdot\varepsilon_{n-1,n}^{-1}\cdot\varepsilon_{\gamma\delta}^{-1} = 1.$$

Таким образом, отображение (8) оказывается гомоморфным отображением группы в самое себя. С другой стороны, по известной теореме Бернсайда [см. ([5]), стр. 131], правые части равенств (8) образуют всю треугольную группу. Итак, показано, что отображения (8) являются автоморфизмами.

Автоморфизмы (8) образуют подгруппу $\mathfrak{P}$ порядка p^{n-1} во всей группе автоморфизмов с образующими

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}^{\sigma_1} &= \varepsilon_{1,2}\cdot\varepsilon_{2,n}, \\ \varepsilon_{n-1,n}^{\sigma_2} &= \varepsilon_{n-1,n}\cdot\varepsilon_{1,n-1}, \\ \varepsilon_{\alpha,\alpha+1}^{\tau_\alpha} &= \varepsilon_{\alpha,\alpha+1}\cdot\varepsilon_{1,n}. \end{aligned}$$

(остальные образующие остаются на месте).

Внешние автоморфизмы σ_1 и σ_2 назовем *концевыми автоморфизмами*, внешние автоморфизмы τ_α $(\alpha = 2, 3, \ldots, n-2)$ — *центральными автоморфизмами*.

Из хода наших рассуждений следует, что всякий автоморфизм, сохраняющий индекс образующих $\varepsilon_{\alpha, \alpha+1}$, получается из автоморфизмов подгруппы $\mathfrak{P}$ умножением их слева на автоморфизмы, вызываемые в группе преобразованием при помощи элементов нормализатора группы во всей полной линейной группе.

Покажем, что отображение τ вида

$$\varepsilon^{\tau}_{\alpha, \alpha+1} = \varepsilon_{n-\alpha, n-\alpha+1} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n-1)$$

является автоморфизмом. Посредством τ элементы $\varepsilon_{\alpha\beta}$ преобразуются следующим образом:

$$\varepsilon^{\tau}_{\alpha\beta} = (-1)^{\beta-\alpha-1} \varepsilon_{n-\beta+1, n-\alpha+1}.$$

Независимые соотношения типа

$$(\varepsilon_{\alpha, \beta}, \quad \varepsilon_{\gamma, \delta}) = 1,$$

где $\alpha \neq \delta$, $\beta \neq \gamma$, между элементами при отображении τ не нарушаются, откуда следует, что отображение является гомоморфным. Так как $\varepsilon_{n-\alpha, n-\alpha+1}$ пробегает все основные образующие

$$\varepsilon_{1, 2}, \varepsilon_{2, 3}, \ldots, \varepsilon_{n-1, n},$$

то этот гомоморфизм оказывается и автоморфизмом.

Автоморфизм τ назовем зеркальным автоморфизмом. При таком автоморфизме происходит зеркальное отображение основных образующих вокруг второй главной диагонали.

Установив наличие зеркального автоморфизма и принимая во внимание уже достигнутые результаты о строении автоморфизма, мы заключаем, что образующими группы автоморфизмов нашей треугольной группы будут такие элементы:

1) образующие группы внутренних автоморфизмов;
2) образующие группы центральных автоморфизмов;
3) образующие группы концевых автоморфизмов;
4) образующие группы диагональных автоморфизмов;
5) один зеркальный автоморфизм второго порядка.

§ 7. Структура группы автоморфизмов

Для лучшего уяснения структуры всей группы автоморфизмов изучим взаимоотношения между разными видами автоморфизмов. Прежде всего отметим тот известный в теории групп факт, что группа внутренних автоморфизмов является нормальным делителем в группе всех автоморфизмов. Далее, при помощи простых рассуждений можно убедиться в том, что группа внешних автоморфизмов, обозначенная у нас через $\mathfrak{P}$, является абелевой группой порядка p^{n-1}. $\mathfrak{P}$ есть прямое произведение групп центральных автоморфизмов $\mathfrak{Z}$ и концевых автоморфизмов V:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Z} \cdot V.$$

Легко образовать подгруппу автоморфизмов $I\cdot\mathfrak{Z}\cdot V$, являющуюся полупрямым произведением группы внутренних автоморфизмов и подгруппы внешних автоморфизмов $\mathfrak{P}$. Порядок $I\cdot\mathfrak{Z}\cdot V$ равен $p^{\frac{n^2+n-4}{2}}$.

Для выяснения связи диагональных автоморфизмов с другими видами автоморфизмов рассмотрим, как преобразуются концевые и центральные автоморфизмы посредством диагональных автоморфизмов.

Пусть даны диагональный автоморфизм σ и концевой автоморфизм σ_1:

$$\varepsilon^{\sigma}_{\beta,\beta+1} = \varepsilon^{z_\beta}_{\beta,\beta+1} \quad (\beta = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\varepsilon^{\sigma_1}_{1,2} = \varepsilon_{1,2}\cdot\varepsilon^{x}_{2,n},$$

$$\varepsilon^{\sigma_1}_{\alpha,\alpha+1} = \varepsilon_{\alpha,\alpha+1} \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, n-3),$$

$$\varepsilon^{\sigma_1}_{n-1,n} = \varepsilon_{n-1,n}\,\varepsilon^{y}_{1,n-1}.$$

Тогда при автоморфизме $\sigma^{-1}\sigma_1\sigma$ получаем отображения:

$$\varepsilon^{\sigma^{-1}\sigma_1\sigma}_{1,2} = \varepsilon_{1,2}\cdot\varepsilon^{a}_{2,n}\cdot\varepsilon^{b}_{1,n},$$

$$\varepsilon^{\sigma^{-1}\sigma_1\sigma}_{\alpha,\alpha+1} = \varepsilon_{\alpha,\alpha+1} \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots, n-2),$$

$$\varepsilon^{\sigma^{-1}\sigma_1\sigma}_{n-1,n} = \varepsilon_{n-1,n}\,\varepsilon^{c}_{1,n-1}\,\varepsilon^{d}_{1,n},$$

где a, b, c, d — вполне определенные рациональные функции от z_β, x и y. Правая часть последнего равенства показывает, что автоморфизм $\sigma^{-1}\sigma_1\sigma$ содержится в группе $I\cdot V\cdot\mathfrak{Z}$.

Для центрального автоморфизма σ_2 найдем, что автоморфизм $\sigma^{-1}\sigma_2\sigma$ содержится в группе $I\cdot V\cdot\mathfrak{Z}$.

Теперь мы можем сказать, что группа $(I\cdot V\cdot\mathfrak{Z})\,\mathfrak{D}$ есть полупрямое произведение групп $I\cdot V\cdot\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{D}$, потому что элементы группы $I\cdot V\cdot\mathfrak{Z}$ посредством диагональных элементов преобразуются в элементы той же группы $I\cdot V\cdot\mathfrak{Z}$. Порядок группы $(I\cdot V\cdot\mathfrak{Z})\cdot\mathfrak{D}$ равен $(p-1)^{n-1}\,p^{\frac{n^2+n-4}{2}}$.

Для получения всей группы автоморфизмов $\mathfrak{A}$ нам достаточно образовать полупрямое произведение

$$((I\cdot V\cdot\mathfrak{Z})\cdot\mathfrak{D})\cdot\{\tau\},$$

где $\{\tau\}$ — группа зеркальных автоморфизмов. Таким образом, порядок группы автоморфизмов $\mathfrak{A}$ равен $2\,(p-1)^{n-1}\,p^{\frac{n^2+n-4}{2}}$.

Окончательный вывод о структуре группы автоморфизмов треугольной группы дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 9. *Группа автоморфизмов $\mathfrak{A}$ треугольных матриц с единицами на главной диагонали есть полупрямое произведение группы внутренних автоморфизмов и четырех видов подгрупп внешних автоморфизмов, взятых в определенном порядке:*

$$\mathfrak{A} = ((I\cdot V\cdot\mathfrak{Z})\cdot\mathfrak{D})\cdot\{\tau\},$$

где $\{\tau\}$ — *группа зеркальных автоморфизмов второго порядка,*

$\mathfrak{D}$ — *группа диагональных автоморфизмов порядка* $(p-1)^{n-1}$,

$\mathfrak{Z}$ — *группа центральных автоморфизмов порядка* p^{n-3},

V — *группа концевых автоморфизмов порядка* p^2,

I — *группа внутренних автоморфизмов порядка* $p^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$.

Порядок группы $\mathfrak{A}$ *равен* $2(p-1)^{n-1}p^{\frac{n^2+n-4}{2}}$.

Вышеприведенные результаты можно перенести на случай треугольной группы над любым конечным полем из p^f элементов, только тогда в качестве образующих надо рассмотреть элементы $1+\omega_i e_{\alpha,\alpha+1}$, где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_f$ — базис конечного поля над своим простым полем, и, соответственно, в порядках всех встречающихся групп заменить p на p^f.

Поступило
18. I. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Курош А. Г., Теория групп, М.— Л., 1944.

[2] Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, М.— Л., ГТИ, 1933.

[3] Grün O., Über eine Faktorgruppe freier Gruppen, Deutsche Mathematik, Bd. I (1936), 772—782.

[4] Kaloujnine L., La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (3) 65 (1948), 239—276.

[5] Speiser A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berl., 1937.

[6] Dubisch R. and Perlis S., On total nilpotent algebras, Amer. J. of math., 73 (1951), 439—452.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 459—468

Н. И. АХИЕЗЕР

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ И ОДНОЙ ЧЕБЫШЕВСКОЙ ЗАДАЧЕ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Для решения некоторых экстремальных задач в классе целых функций необходимы целые функции конечной степени, график которых имеет вид, схематически представленный на рис. 2. В первой части настоящей статьи строится и исследуется семейство таких функций, а затем дается одно применение.

1. Положим

$$z = \frac{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{cn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \tag{1}$$

$$w = \cos\left\{\frac{\pi u}{K} + K'\left[\frac{H'(a+u)}{H(a+u)} - \frac{H'(a-u)}{H(a-u)}\right]\right\}. \tag{2}$$

В первой формуле sn, cn означают эллиптические синус и косинус, а во второй формуле H есть тэта-функция Якоби; u — переменная, областью изменения которой является прямоугольник периодов $2K$, $2iK'$. При этом модуль $k\,(0 \leqslant k \leqslant 1)$ и величина $a\,(0 < a < K)$ играют роль параметров.

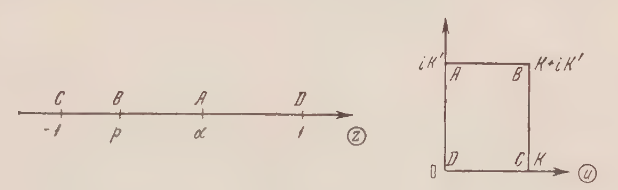


Рис. 1

Так как w есть четная функция и, подобно z, имеет периоды $2K$, $2iK'$, а при помощи (1) прямоугольник R плоскости u с вершинами O, K, $K+iK'$, iK' конформно отображается на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ (см. рис. 1), то w есть однозначная функция от z во всей плоскости. При этом единственной особой точкой этой функции является образ точек $u = \pm a$, т. е. бесконечно далекая точка. Следовательно, w есть целая и, очевидно, трансцендентная функция от z. Мы обозначим ее через

$$w = G(z;\, a,\, k).$$

Величины z, отвечающие точкам $u = K + iK'$, iK', мы обозначили на рис. 1 через β и α. Эти величины связаны с параметрами a, k следующими формулами:

$$\alpha = 2\,\mathrm{sn}^2 a - 1, \quad \beta = 1 - 2\frac{\mathrm{cn}^2 a}{\mathrm{dn}^2 a},$$

откуда

$$k^2 = \frac{2(\alpha - \beta)}{(1+\alpha)(1-\beta)}, \quad a = \int_0^{\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Так как формулу (1) можно переписать в виде

$$z = 1 - 2\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\left\{\frac{H'(u+a)}{H(u+a)} - \frac{H'(u-a)}{H(u-a)}\right\},$$

то

$$w = G(z;\, a,\, k) = \cos\left\{\frac{K'\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a} z + \varepsilon(u)\right\}, \tag{2bis}$$

где $\varepsilon(u)$ есть величина, ограниченная в R. Отсюда вытекает, что $G(z;\, a,\, k)$ есть целая трансцендентная функция степени

$$p = \frac{K'\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}. \tag{3}$$

Применяя преобразование Ландена, перепишем формулу (3) в виде

$$p = \frac{L'}{\mathrm{sn}\left(\frac{2a}{1+\lambda};\,\lambda\right)}, \tag{3bis}$$

где

$$\lambda = \frac{1-k'}{1+k'} \quad (k' = \sqrt{1-k^2}),$$

а L' есть полный эллиптический интеграл первого рода для дополнительного модуля $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$; при этом

$$K = \frac{2L}{1+k'} = (1+\lambda)\,L.$$

Из формулы (3 bis) вытекает, что при фиксированном k величина p монотонно убывает от ∞ до L', когда a растет от 0 до $\frac{K}{2}$. При дальнейшем увеличении a от $\frac{K}{2}$ до K величина p монотонно растет* от L' до ∞. Таким образом, при любом $p \geqslant \frac{\pi}{2}$ формула (3) определяет величину a как двузначную функцию от k. Областью определения этой функции является интервал $[k_p, 1]$, а область значений принадлежит интервалу $0, K)$, причем, если одно из значений есть $\tilde{a}$, то другое равно $K - \tilde{a}$.

Далее, отметим, что

$$G(z;\; K-a,\, k) = -G(-z;\; a,\, k)$$

и, следовательно, $G\left(z;\; \frac{K}{2},\, k\right)$ есть нечетная функция от z.

* Это вытекает также из того, что величина p, определяемая формулой (3), не меняется при замене a на $K - a$.

Если положить

$$G(z;\, a,\, k) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots, \quad \frac{c_1}{c_0} = \sigma,$$

так что $c_i = c_i(a, k)$ и $\sigma = \sigma\,(a, k)$, то

$$\sigma\left(\frac{K}{2},\, k\right) = \pm\infty,$$

поскольку

$$c_1\left(\frac{K}{2},\, k\right) = \frac{1}{1-k'}\left\{\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k'^2 t^2}{1-t^2}}\, dt + k'^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-k'^2 t^2}}\, dt\right\} \neq 0.$$

Особого внимания заслуживают две функции $G(z;\, a,\, k)$, отвечающие значению $k = 1$. Первую из них обозначим через $G_1(z;\, p)$; для нее

$$\beta = -1, \quad a = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}}{1-\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}}, \quad \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{\pi}{2p} \quad \left(p \geqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Вторую обозначим через $G_2(z;\, p)$; для нее

$$\alpha = 1, \quad a = \infty, \quad \sqrt{\frac{1-\beta}{2}} = \frac{\pi}{2p} \quad \left(p \geqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

В этих частных случаях параметр u легко исключается, и мы получаем:

$$G_1(z;\, p) = \cos p\sqrt{(z-1)(z-\alpha)} = \cos p\sqrt{(z-1)\left(z+1-\frac{\pi^2}{2p^2}\right)} =$$

$$= \operatorname{ch} p\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2p^2}} + \frac{\pi^2}{4p}\,\frac{\operatorname{sh} p\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2p^2}}}{\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2p^2}}}\, z + \ldots,$$

$$G_2(z;\, p) = -\cos p\sqrt{(z+1)(z-\beta)} =$$

$$= -\cos p\sqrt{(z+1)\left(z-1+\frac{\pi^2}{2p^2}\right)} = -G_1(-z;\, p).$$

Написанные представления позволяют построить графики функций $G_1(x;\, p)$, $G_2(x;\, p)$ $(-\infty < x < \infty)$, а также установить, что производные $\frac{d}{dz}G_1(z;\, p)$, $\frac{d}{dz}G_2(z;\, p)$ имеют только простые и вещественные корни. Если учесть, что функция $\frac{d}{dz}G(z;\, a,\, k)$ при фиксированном p непрерывно зависит от модуля k, а также что ее вещественные корни всегда простые, то из сказанного уже нетрудно заключить, что функция $\frac{d}{dz}G(z\colon a,\, k)$ ни при каком k не имеет невещественных корней, а также, что график функции $G(x;\, a,\, k)$ имеет вид, схематически представленный на рис. 2. Отношение

$$\frac{\frac{dw}{du}}{\sqrt{1-w^2}}$$

есть эллиптическая функция от u. Применяя к ней общие теоремы о представлении эллиптических функций, находим, что функция $w = G(z; a, k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dw}{dz} = C\sqrt{1-w^2}\,\frac{(z-\gamma)(z-\delta)}{\sqrt{(z^2-1)(z-\alpha)(z-\beta)}},$$

где C, γ, δ — вещественные константы $(-1<\delta<\beta,\ \alpha<\gamma<1)$.

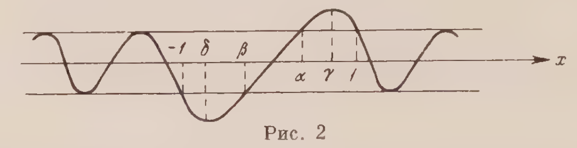


Рис. 2

Для дальнейшего полезно ввести целую функцию

$$\Omega(z; a, k) = \frac{z^2-1}{(z-\gamma)(z-\delta)}\frac{d}{dz}G(z; a, k) = C\sqrt{1-G^2(z; a, k)}\sqrt{\frac{z^2-1}{(z-\alpha)(z-\beta)}},$$

корнями которой являются точки уклонения функции $G(z; a, k)$ на точечном множестве, состоящем из интервалов

$$(-\infty, -1], \quad [1, \infty), \tag{E}$$

т. е. последовательные точки множества (E), в которых $G(z; a, k)$ принимает с чередующимися знаками свое максимальное на (E) численное значение — единицу.

2. Рассмотрение точек уклонения оказывается необходимым для установления экстремальных свойств целых трансцендентных функций *, как и многочленов. При этом в трансцендентном случае, в отличие от алгебраического, число точек уклонения бесконечно, с чем связаны дополнительные трудности. Для преодоления этих трудностей полезна следующая

ЛЕММА. *Пусть* $\omega(z)$ *есть целая (трансцендентная) функция конечной степени, имеющая лишь вещественные и притом простые корни*

$$\ldots<\lambda_i<\lambda_{i+1}<\ldots \quad (\pm i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть, далее, $f(z)$ *есть целая функция конечной степени, для которой:*

a) *справедливо неравенство*

$$\sum_k{}' \frac{|f(\lambda_k)|}{|\lambda_k|\,|\omega'(\lambda_k)|}<\infty,$$

b) *в некотором угле*

$$\left|\pm\frac{\pi}{2}-\arg z\right|<\delta \tag{4}$$

имеет место соотношение

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{f(z)}{\omega(z)} = 0. \tag{5}$$

---

* См. С. Н. Бернштейн ([1]), ([2]).

В таком случае

$$f(z) = \omega(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)\,\omega'(\lambda_k)}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$g(z) = \omega(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)\,\omega'(\lambda_k)}$$

есть, в силу а), целая функция конечной степени. При этом

$$g(\lambda_i) = f(\lambda_i) \quad (\pm i = 0, 1, 2, \ldots)$$

и для любого положительного $\delta < \frac{\pi}{2}$ в угле (4) имеет место предельное равенство

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{g(z)}{\omega(z)} = 0. \tag{6}$$

Отношение

$$\frac{f(z)-g(z)}{\omega(z)}, \tag{7}$$

очевидно, представляет целую функцию, и можно доказать, что это есть целая функция конечной степени. Учитывая, что в угле (4) имеют место соотношения (5), (6), заключаем, на основании теоремы Фрагмен-Линделёфа, что функция (7) есть тождественный нуль, что и доказывает наше утверждение.

При помощи доказанной леммы можно установить экстремальное свойство * функции $G(z; a, k)$.

ТЕОРЕМА. *Пусть при некоторых значениях параметров a и k и некоторой вещественной константе M целая функция степени p*

$$\varphi(z) = MG(z; a, k)$$

*в точках x_1, x_2 $(-1 < x_1 < x_2 < 1)$ принимает значения ξ_1, ξ_2. В таком случае для любой целой функции** $\psi(z)$ степени $\leqslant p$, удовлетворяющей условиям*

$$\psi(x_1) = \xi_1, \quad \psi(x_2) = \xi_2, \tag{8}$$

* Идея применения интерполяционной формулы для доказательства того, что данная целая функция наименее уклоняется от нуля, принадлежит С. Н. Бернштейну (2), а именно, таким путем было впервые дано доказательство того, что среди всех целых функций $f(z)$ степени $\leqslant p$, удовлетворяющих условию $f'(0)=1$, функция $\frac{\sin pz}{p}$ наименее уклоняется от нуля на всей вещественной оси. Затем аналогичным образом интерполяционная формула при

$$\omega(z) = \sqrt{p^2z^2+c^2}\,\sin\sqrt{p^2z^2+c^2}$$

использована С. Н. Бернштейном при решении проблемы 3 в статье (3).

** Достаточно рассмотреть вещественные функции.

имеет место неравенство

$$\sup_{x\in E} |\psi(x)| \geqslant |M|,$$

причем знак равенства достигается лишь при $\psi(z)=\varphi(z)$.

Доказательство. Допустим, что для некоторой вещественной целой функции $\psi(z)$ степени $\leqslant p$, удовлетворяющей условиям (8) и отличной от $\varphi(z)$, имеет место неравенство:

$$\sup_{x\in E} |\psi(x)| \leqslant |M|.$$

Примем для определенности, что $M>0$. Обозначим через

$$\ldots < \lambda_i < \lambda_{i+1} < \ldots \quad (\lambda_0 = 1)$$

последовательность всех точек уклонения функции $\varphi(z)$ на интервалах (E). Эти точки являются корнями функции $\Omega(z;\, a,\, k)$. Из наших предположений и неравенства $M>0$ следует, что функция

$$f(z) = \frac{\varphi(z)-\psi(z)}{z-x_1}$$

удовлетворяет неравенствам

$$(-1)^n f(\lambda_n) \geqslant 0 \quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$(-1)^m f(\lambda_m) \leqslant 0 \quad (m=-1,\,-2,\,\ldots).$$

Далее, легко видеть, что к функции $f(z)$ применима лемма, если в качестве $\omega(z)$ взять $\Omega(z;\, a,\, k)$. Действительно, условие b) выполняется в силу того, что*

$$|f(z)| < C_1 \frac{1}{|z|+1} e^{p|y|} \quad (z=x+iy),$$

тогда как из (2bis) следует, что

$$|\Omega(z;\, a,\, k)| > C_2 e^{p|y|} \quad (|y|\geqslant 1);$$

здесь C_1 и C_2 — некоторые положительные константы. С другой стороны, условие a) выполняется потому, что

$$\Omega'_z(\lambda_i;\, a,\, k) = -C^2 G(\lambda_i;\, a,\, k) \frac{(\lambda_i-\gamma)(\lambda_i-\delta)}{(\lambda_i-\alpha)(\lambda_i-\beta)} \quad (i \neq 0,\, 1),$$

и, значит, существует такая константа $N>0$, что

$$|\Omega'_z(\lambda_i;\, a,\, k)| > N \quad (\pm i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots).$$

Замечая, что

$$\operatorname{sign} \Omega'_z(\lambda_i;\, a,\, k) = -\operatorname{sign} G(\lambda_i;\, a,\, k) = (-1)^{i+1} \quad (\pm i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

находим:

$$f(z) = \Omega(z;\, a,\, k) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda_i)}{(z-\lambda_i)\,\Omega'_z(\lambda_i;\, a,\, k)} =$$

$$= \Omega(z;\, a,\, k) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(\lambda_n)|}{(\lambda_n - z)\,|\Omega'_z(\lambda_n;\, a,\, k)|} + \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{|f(\lambda_m)|}{(z-\lambda_m)\,|\Omega'_z(\lambda\ ;\, a,\, k)|} \right\}.$$

---

* Для доказательства можно воспользоваться теоремой Фрагмен-Линделёфа,

Отсюда, поскольку

$$\Omega(x_2; a, k) \neq 0,$$

получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(\lambda_n)|}{(\lambda_n - x_2)\left|\Omega_z'(\lambda_n; a, k)\right|} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{|f(\lambda_m)|}{(x_2 - \lambda_m)\left|\Omega_z'(\lambda_m; a, k)\right|} = 0.$$

Это возможно лишь при

$$f(\lambda_i) = 0 \quad (\pm i = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е. лишь при $f(z) = 0$ и, значит, $\psi(z) = \varphi(z)$, что противоречит допущению.

Легко видеть, что *теорема верна и в предельном случае, когда условия* (8) *заменяются на*

$$\psi(x_0) = \xi_1, \quad \psi'(x_0) = \xi_2.$$

Поэтому справедливо также такое

Следствие. *Пусть* $p \geqslant \frac{\pi}{2}$ *зафиксировано и пусть* a *есть та ветвь определенной выше функции от* k, *значения которой принадлежат интервалу* $\left(0, \frac{K}{2}\right]$. *В таком случае функция* $\sigma(a, k)$ *при изменении* k *от* k_p *до* 1 *изменяется монотонно от*

$$\frac{\pi^2}{4p} \frac{\operatorname{th} p\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{2p^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{2p^2}}}$$

до ∞.

3. Построенное семейство целых функций позволяет решить некоторые чебышевские задачи относительно трансцендентных функций. Мы рассмотрим одну из них, а именно аналог задачи Е. И. Золотарева для многочленов.

Задача. *Среди всех целых трансцендентных функций* $f(z)$ *степени* $\leqslant p$, *удовлетворяющих условиям*

$$f(0) = A, \quad f'(0) = B, \tag{9}$$

где A *и* B — *заданные вещественные числа, найти ту, которая на множестве* (E) *наименее уклоняется от нуля**.

---

* Рассматриваемая нами задача при $A = 0$ содержится как частный случай в проблеме 2 статьи ([3]) С. Н. Бернштейна. При помощи рассмотрений, основанных на предельном переходе от многочленов, С. Н. Бернштейн, не входя в детали, показал, что решение его проблемы должно выразиться либо в элементарных функциях, либо в функциях эллиптических в зависимости от значения некоторого параметра. Это обстоятельство и послужило толчком для написания настоящей работы.

Прежде всего заметим, что при $A \neq 0$ можно положить $A = 1$ и тогда условия (9) принимают вид:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \sigma. \tag{10}$$

Случай $A = 0$ содержится здесь как предельный ($\sigma = \infty$). Поэтому мы примем в дальнейшем условия (10). При этом можно предположить, что $\sigma \geqslant 0$. Действительно, случай $\sigma < 0$ сводится к случаю $\sigma > 0$ при помощи замены z на $-z$.

Решение нашей задачи зависит от того, какое из соотношений

$$p = \frac{\pi}{2}, \quad p < \frac{\pi}{2}, \quad p > \frac{\pi}{2}$$

имеет место.

Переходя к рассмотрению каждого из этих трех случаев в отдельности, введем функцию

$$F_p(z; \lambda) = \frac{\cos p \sqrt{(z-1)(z+\lambda)}}{\operatorname{ch} p \sqrt{\lambda}},$$

где λ — параметр.

Случай I: $p = \frac{\pi}{2}$. При любом $\sigma \geqslant 0$ решением нашей задачи является функция $F_{\frac{\pi}{2}}(z; \lambda)$, где параметр λ определяется из уравнения

$$\frac{\pi(1-\lambda)}{4\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} = \sigma$$

(левая часть последней формулы изменяется от 0 до ∞ при изменении λ от 1 до -1).

Случай II: $0 < p < \frac{\pi}{2}$.

a) При $0 \leqslant \sigma \leqslant p \operatorname{tg} p$ решением является функция $F_p(z; \lambda)$, где параметр λ определяется из уравнения

$$\frac{p(1-\lambda)}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} p\sqrt{\lambda} = \sigma \tag{11}$$

(левая часть этого уравнения изменяется от 0 до $p \operatorname{tg} p$ при изменении λ от 1 до -1).

b) При $\sigma \geqslant p \operatorname{tg} p$ решением является функция

$$\cos pz + \sigma \frac{\sin pz}{p}.$$

Случай III: $p > \frac{\pi}{2}$.

a) При

$$0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{\pi^2}{4p} \frac{\operatorname{th} p \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{2p^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{2p^2}}}$$

решением является функция $F_p(z; \lambda)$, где параметр λ определяется из уравнения (11) (левая часть изменяется от 0 до

$$\frac{\pi^2}{4p}\frac{\operatorname{th} p\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2p^2}}}{\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2p^2}}},$$

когда λ изменяется от 1 до $1-\frac{\pi^2}{2p^2}\Big)$.

b) При

$$\sigma \geqslant \frac{\pi^2}{4p}\frac{\operatorname{th} p\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2p^2}}}{\sqrt{1-\frac{\pi^2}{2p^2}}}$$

решением является функция

$$MG(z;\, a,\, k),$$

где параметры a, k, M определяются из условий:

$$MG(0;\, a,\, k)=1,\quad MG'_z(0;\, a,\, k)=\sigma,\quad p=\frac{K'\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a\operatorname{cn} a}.$$

Доказательство для случая III b) непосредственно вытекает из теоремы п. 2 и следствия. Другие случаи трактуются аналогично, на основе леммы п. 2. Поэтому достаточно рассмотреть один из случаев, скажем II b).

Итак, мы хотим доказать, что при $0<p<\frac{\pi}{2}$ и $\sigma\geqslant p\operatorname{tg} p$ решением нашей задачи является функция

$$g(z)=\cos pz+\sigma\frac{\sin pz}{p},$$

уклонение которой от нуля не только на интервалах (E), но и на вещественной оси равно

$$M=\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{p^2}}.$$

Так как в интервале $[-1,\, 1]$

$$g'(x)=-p\sin px+\sigma\cos px\geqslant\sigma\cos p-p\sin p\geqslant 0,$$

то функция $g(x)$ в интервале $[-1,\, 1]$ изменяется монотонно. Поэтому внутри интервала $(-1,\, 1)$

$$|g(x)|<M,$$

и, значит, все точки, в которых $g(x)=\pm M$, принадлежат (E). Чтобы доказать, что $g(z)$ есть решение нашей задачи в рассматриваемом случае, нужно построить интерполяционную формулу п. 2 при

$$\omega(z)=g'(z)=-p\sin pz+\sigma\cos pz,$$

а затем повторить рассуждение, которое мы применили при доказательстве теоремы п. 2.

Поступило
25. II. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. II, Доклады Ак. Наук СССР, т. 51, № 7 (1946), 485—488.

[2] Бернштейн С. Н., Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926.

[3] Бернштейн С. Н., Функции конечной степени и функции конечной полустепени, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 13 (1949), 111—124.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 469—480

Я. Л. ГЕРОНИМУС

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ В. А. СТЕКЛОВА

(*Представлено академиком* В. И. Смирновым)

В работе рассмотрено решение задачи, поставленной в 1926 г. В. А. Стекловым; найдено достаточное условие, которому должен удовлетворять вес системы ортогональных и нормальных полиномов для того, чтобы вся эта система была равномерно ограничена на всем интервале ортогональности.

Введение

Рассмотрим систему полиномов $\{\hat{\varphi}_k(x)\}$, ортогональную и нормальную на отрезке $[-1, +1]$ относительно веса $w(x)$, т. е. удовлетворяющую соотношениям:

$$\int_{-1}^{1} w(x)\,\hat{\varphi}_n(x)\,\hat{\varphi}_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m \quad (n, m = 0, 1, \ldots), \end{cases} \tag{1}$$

причем $w(x) \geqslant 0$ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

В своем мемуаре ([8]), посвященном столетию со дня рождения великого русского математика П. Л. Чебышева, основоположника общей теории ортогональных полиномов, В. А. Стеклов рассмотрел тот случай, когда в с я о р т о г о н а л ь н а я с и с т е м а $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$ р а в н о м е р н о о г р а н и ч е н а на всем отрезке $[-1, +1]$ или на его части, т. е. удовлетворяет при некоторых x неравенству

$$|\hat{\varphi}_n(x)| \leqslant M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где M не зависит ни от n, ни от x. Такие ортогональные полиномы, которые мы позволим себе назвать *ортогональными полиномами В. А. Стеклова*, обладают рядом интересных свойств; например, В. А. Стеклов показал, что *в каждой точке x отрезка $[-1, +1]$, в которой выполняется условие* (2), *ряд Фурье-Чебышева любой функции $F(x)$, удовлетворяющей условию Липшица*

$$|F(x') - F(x'')| \leqslant \lambda\,|x' - x''|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{3}$$

сходится к значению $F(x)$.

Возникает естественный вопрос об условиях, при которых выполняется условие (2). В. А. Стеклов говорит по этому поводу следующее:

«К сожалению, мы не имеем способа выразить совокупность общих и достаточных условий, которым должна удовлетворять характеристическая функция $w(x)$ для того, чтобы неравенство (2) имело место для всех

полиномов, соответствующих функции $w(x)$, удовлетворяющей указанным условиям.

Я думаю, что неравенство (2) является общим свойством всех полиномов Чебышева, характеристическая функция которых не обращается в нуль внутри данного интервала; однако в данный момент мне не удалось ни найти строгого доказательства этого утверждения, ни обнаружить примера, в котором это неравенство не выполнялось бы в каждой точке внутри данного интервала».

После В. А. Стеклова некоторые авторы рассмотрели случаи равномерно ограниченной ортонормированной системы полиномов; некоторые из этих случаев указаны в таблице, в которой через $\omega(f; \delta)$ обозначен модуль непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$, через $t(x)$ обозначен так называемый *тригонометрический вес*

$$t(x) = w(x)\sqrt{1-x^2}, \qquad (4)$$

через $\rho(x)$ в случаях 3 и 4 таблицы обозначен полином, положительный на отрезке $[-1, +1]$.

В последней графе таблицы указан интервал, в котором справедливо неравенство (2) *.

Таблица

№	Автор	Характер веса	Интервал
1	Г. Сеге (10)	$w(x) > 0, \quad \omega(w, \delta) \leqslant A\delta$	$-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$
2	Г. Сеге (10)	$t(x) > 0, \quad \omega(t, \delta) \leqslant A\delta$	$-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$
3	{Г. Сеге (10) {С. Н. Бернштейн (1)	$t(x) = \frac{1}{\rho(x)}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
4	Я. Шохат (9)	$t(x) = \rho(x)$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
5	С. Н. Бернштейн (1)	$\omega(t, \delta) \leqslant A \lg\delta^{-1-\lambda}, \quad \lambda > 0$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$

В. И. Смирнов (6), рассматривая ортогональные системы В. А. Стеклова, говорит:

«Мы знаем теперь, что если вес $w(x)$ положителен и удовлетворяет условию Липшица (3) с $\alpha = 1$, то

$$|\hat{\varphi}_n(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < +1,$$

т. е. условие (2) выполняется во всех точках внутри $[-1, +1]$».

Мы видим из таблицы, что вместо условия Липшица с $\alpha = 1$ (случай 1) мы можем наложить на вес менее обременительное ограничение С. Н. Бернштейна (случай 5); однако в обоих этих случаях вес предполагается непрерывным, что, как мы увидим, совсем не является необходимым; общее условие С. Н. Бернштейна (случай 5) введено им для вывода асимптотической формулы и поэтому является слишком ограничительным в вопросе, где речь идет лишь о выполнении неравенства (2).

* См. также (4).

Рассмотрим пространство $L_2(0, 2\pi)$ периодических функций $f(\theta)$ * с обычным определением нормы

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{5}$$

и введем *интегральный модуль непрерывности* функции $f(\theta)$:

$$\omega_2(f; \delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|f(\theta+h) - f(\theta)\|; \tag{6}$$

если $\omega_2(f; \delta) \leqslant M\delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то будем говорить, что *функция* $f(\theta)$ *принадлежит классу* $\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$.

Условие, достаточное для того, чтобы ортогональные полиномы $\{\hat\varphi_n(x)\}$ были полиномами В. А. Стеклова, дает следующая основная теорема:

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы неравенство*

$$|\hat\varphi_n(x)| \leqslant C \tag{7}$$

имело место на всем отрезке $[-1, +1]$ *для всех ортогональных нормальных полиномов, соответствующих весу* $w(x)$, *достаточно, чтобы функция*

$$p(\theta) = w(\cos\theta)\,|\sin\theta| \tag{8}$$

была ограничена сверху и снизу,

$$0 < m_1 \leqslant p(\theta) \leqslant m_2, \tag{9}$$

почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ *и принадлежала классу* $\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, *где* $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Последующие параграфы посвящены доказательству этой теоремы.

§ 1

ЛЕММА 1.1 *Если полиномы* $G_n(z)$ (*с любыми комплексными коэффициентами*) *степени не выше* n *удовлетворяют в замкнутой области* $|z| \leqslant 1$ *условию*

$$|G_n(z)| \leqslant M_n, \quad |G_n(e^{i\theta_0})| = M_n, \tag{1.1}$$

то справедливо неравенство

$$|G_n(re^{i\theta_0})| \geqslant \frac{M_n}{2}, \quad r = 1 - \frac{1}{2n}. \tag{1.2}$$

Для доказательства применим метод, принадлежащий Д. Джексону Мы имеем:

$$G_n(z) - G_n(z_0) = \int_{z_0}^{z} G_n'(z)\,dz.$$

Известно, что из (1.1) вытекает неравенство:

$$|G_n'(z)| \leqslant nM_n, \quad |z| \leqslant 1; \tag{1.3}$$

* Вообще комплекснозначных.

поэтому при $z_0 = re^{i\theta_0}$, $z = e^{i\theta_0}$ получим:

$$|G_n(e^{i\theta_0}) - G_n(re^{i\theta_0})| \leqslant (1-r)\, nM_n.$$

Полагая

$$1 - r = \frac{1}{2n}, \tag{1.4}$$

легко находим:

$$M_n - |G_n(re^{i\theta_0})| \leqslant |G_n(e^{i\theta_0}) - G_n(re^{i\theta_0})| \leqslant \frac{M_n}{2},$$

откуда вытекает (1.2).

ЛЕММА 1.2. *Если $\varphi(z)$ — аналитическая функция, регулярная в области $|z| < 1$ и принадлежащая классу H_2, и если $G_n(z)$ — полином степени n, удовлетворяющий условию* (1.1), *то*

$$M_n \leqslant 2\left[|\varphi(re^{i\theta_0})| + 2\delta_n\sqrt{n}\right], \quad r = 1 - \frac{1}{2n}, \tag{1.5}$$

где

$$\delta_n = \|\varphi - G_n\| \quad (r = 1). \tag{1.6}$$

Для доказательства представим функцию $\{\varphi(z) - G_n(z)\}^2$ класса H_1 интегралом Пуассона:

$$\{\varphi(re^{i\theta}) - G_n(re^{i\theta})\}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\varphi(Re^{i\psi}) - G_n(Re^{i\psi})\}^2 \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi,$$

где $r < R < 1$; отсюда вытекает, что

$$|\varphi(re^{i\theta}) - G_n(re^{i\theta})|^2 \leqslant \frac{1+r}{1-r}\cdot\delta_n^2; \tag{1.7}$$

полагая $1 - r = \frac{1}{2\pi}$, $\theta = \theta_0$, получим:

$$\big||\varphi(re^{i\theta_0})| - |G_n(re^{i\theta_0})|\big| \leqslant |\varphi(re^{i\theta_0}) - G_n(re^{i\theta_0})| \leqslant 2\delta_n\sqrt{n},$$

откуда, пользуясь (1.2), находим (1.5).

ЛЕММА 1.3. *Если функция $\varphi(z) \in H_2$ ограничена почти всюду на единичной окружности*

$$|\varphi(e^{i\theta})| \leqslant A \; * \tag{1.8}$$

и если полиномы $G_n(z)$ осуществляют приближение к ней (в метрике L_2) порядка $O(n^{-\alpha})$, где $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, то эти полиномы равномерно ограничены в замкнутой области $|z| \leqslant 1$.

Известно, что для функции $\varphi(z) \in H_2$ из неравенства (1.8) вытекает неравенство

$$|\varphi(z)| \leqslant A, \tag{1.8'}$$

справедливое во всей области $|z| < 1$; так как, кроме того, по условию

$$\sqrt{n}\,\delta_n \leqslant B,$$

---

* Под $\varphi(e^{i\theta})$ подразумевается радиальное граничное значение функции $\varphi(z) \in H_2$:

$$\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} \varphi(re^{i\theta}),$$

существующее почти всюду в $[0, 2\pi]$.

то из (1.5) находим:

$$M_n \leqslant 2(A+2B).$$

Ввиду того что правая часть не зависит ни от n, ни от r, отсюда вытекает справедливость нашей леммы.

Таким образом, для доказательства равномерной ограниченности любой системы полиномов $\{G_n(z)\}$ достаточно показать существование аналитической функции $\varphi(z) \in H_2$, ограниченной почти всюду на $|z|=1$, для которой полиномы $\{G_n(z)\}$ осуществляют приближение (в метрике L_2) порядка $O(n^{-\alpha})$, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

§ 2

Рассмотрим систему полиномов $\{P_n(z)\}$, ортогональных на единичной окружности $|z|=1$ относительно обложения $d\sigma(\theta)$, где $\sigma(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста в $[0, 2\pi]$; мы имеем, таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(e^{i\theta})\overline{P_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ h_n > 0, & n = m \quad (n, m = 0, 1, \ldots), \end{cases} \qquad (2.1)$$

причем

$$P_n(z) = z^n + \ldots, \qquad \hat{P}_n(z) = \frac{P_n(z)}{\sqrt{h_n}}.$$

Укажем некоторые свойства этих полиномов, необходимые для дальнейшего [см. ([2])]:

1) полиномы связаны соотношением

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) - \overline{a}_n P_n^*(z), \qquad P_n^*(z) = z^n \overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (2.2)$$

где

$$a_n = -\overline{P}_{n+1}(0), \qquad |a_n| < 1, \qquad h_n = h_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1 - |a_k|^2); \qquad (2.3)$$

2) так как $0 < h_{n+1} \leqslant h_n$, то существует предел

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n = h_0 \prod_{k=0}^{\infty}(1 - |a_k|^2) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log p(\theta)\,d\theta\right\} \geqslant 0, \qquad (2.4)$$

причем вес $p(\theta) \geqslant 0$ почти всюду в $[0, 2\pi]$ равен $\sigma'(\theta)$;

3) при выполнении условия

$$\int_0^{2\pi} \log p(\theta)\,d\theta > -\infty, \qquad (2.5)$$

эквивалентного, по (2.3), условию $h > 0$ или условию $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, можно построить аналитическую функцию $\pi(z)$ класса D *

* См. ([5]), § 6.5.

$$\pi(z) = \sqrt{h}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log p(\theta)\,d\theta\right\}, \quad |z|<1, \tag{2.6}$$

регулярную и не равную нулю в области $|z|<1$; почти всюду в $[0, 2\pi]$ существуют радиальные граничные значения

$$\pi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0}\pi(re^{i\theta}),$$

причем почти всюду в $[0, 2\pi]$ имеем

$$p(\theta) = \frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2}; \tag{2.7}$$

4) имеет место формула:

$$K_n(z, y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(z)\overline{P_k(y)}}{h_k} = \frac{P_n^*(z)\overline{P_n^*(y)} - z\bar{y}P_n(z)\overline{P_n(y)}}{h_n(1-z\bar{y})} \quad (n=0,1,\ldots). \tag{2.8}$$

§ 3

ЛЕММА 3.1. *Если почти всюду* в $[0, 2\pi]$ *имеет место неравенство*

$$p(\theta) \geqslant m_1 > 0 \tag{3.1}$$

и если $p(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, *то и* $\pi(e^{i\theta}) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, $0<\alpha\leqslant 1$.

Из формулы (2.6) находим граничные значения функции $\pi(z)$:

$$\frac{\pi(e^{i\varphi})}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{p(\varphi)}}\exp\left\{-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\theta}{2}\log p(\theta)\,d\theta\right\}; \tag{3.2}$$

интеграл понимается в смысле главного значения Коши и существует почти всюду в $[0, 2\pi]$, ибо $\log p(\theta)$, в силу (3.1), — суммируемая функция.

Таким образом, пользуясь периодическим продолжением $p(\theta)$, имеем:

$$\arg\pi(e^{i\varphi}) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\theta}{2}\log p(\theta)\,d\theta, \tag{3.3}$$

$$\arg\pi[e^{i(\varphi+\gamma)}] = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi+\gamma-\theta}{2}\log p(\theta)\,d\theta = $$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\theta}{2}\log p(\theta+\gamma)\,d\theta,$$

где $\gamma>0$ — произвольная малая величина; отсюда

$$\Delta(\varphi,\gamma) = \arg\pi[e^{i(\varphi+\gamma)}] - \arg\pi(e^{i\varphi}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\log p(\theta) - \log p(\theta+\gamma)]\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi-\theta}{2}\,d\theta; \tag{3.4}$$

поэтому легко находим:

$$\frac{1}{h}\left|\pi[e^{i(\varphi+\gamma)}] - \pi(e^{i\varphi})\right|^2 = \frac{1}{p(\varphi+\gamma)} + \frac{1}{p(\varphi)} - \frac{2\cos\Delta(\varphi,\gamma)}{\sqrt{p(\varphi)\,p(\varphi+\gamma)}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\sqrt{p(\varphi+\gamma)}} - \frac{1}{\sqrt{p(\varphi)}}\right\}^2 + \frac{2[1-\cos\Delta(\varphi,\gamma)]}{\sqrt{p(\varphi)\,p(\varphi+\gamma)}}; \tag{3.5}$$

так как $\sqrt{p(\varphi)} \geqslant \sqrt{m_1}$ почти всюду в $[0, 2\pi]$, то почти всюду в $[0, 2\pi]$ имеем:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{p(\varphi+\gamma)}} - \frac{1}{\sqrt{p(\varphi)}}\right\}^2 = \left\{\frac{p(\varphi+\gamma)-p(\varphi)}{\sqrt{p(\varphi+\gamma)\,p(\varphi)}\,[\sqrt{p(\varphi)}+\sqrt{p(\varphi+\gamma)}]}\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\{p(\varphi+\gamma)-p(\varphi)\}^2}{4m_1^3};$$
$$\frac{2[1-\cos\Delta(\varphi,\gamma)]}{\sqrt{p(\varphi+\gamma)\,p(\varphi)}} \leqslant \frac{[\Delta(\varphi,\gamma)]^2}{m_1}.$$

Таким образом, из (3.5) находим:

$$\|\pi[e^{i(\varphi+\gamma)}]-\pi(e^{i\varphi})\| \leqslant \frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}m_1^{-\frac{3}{2}}\|p(\varphi+\gamma)-p(\varphi)\| + h^{\frac{1}{2}}m_1^{-\frac{1}{2}}\|\Delta(\varphi,\gamma)\|. \tag{3.6}$$

Неравенство

$$|\log p(\varphi+\gamma) - \log p(\varphi)| \leqslant \frac{1}{m_1}|p(\varphi+\gamma)-p(\varphi)| \tag{3.7}$$

показывает, что условие $p(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$ влечет за собою условие $\log p(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$; вследствие этого функция $\arg\pi(e^{i\varphi})$, являющаяся, по (3.3), сопряженной по отношению к функции $\log\frac{1}{\sqrt{p(\varphi)}}$, также принадлежит классу Lip $(\alpha, 2)$; поэтому мы имеем:

$$\sup_{0<\gamma\leqslant\delta}\|p(\varphi+\gamma)-p(\varphi)\| \leqslant A\delta^\alpha, \qquad \sup_{0<\gamma\leqslant\infty}\|\Delta(\varphi,\gamma)\| \leqslant B\delta^\alpha,$$

и, таким образом, из (3.6) находим:

$$\sup_{0<\gamma\leqslant\delta}\|\pi[e^{i(\varphi+\gamma)}]-\pi(e^{i\varphi})\| \leqslant \delta^\alpha\left\{\frac{A}{2}h^{\frac{1}{2}}m_1^{-\frac{3}{2}} + Bh^{\frac{1}{2}}m_1^{-\frac{1}{2}}\right\} = C\delta^\alpha; \tag{3.8}$$

следовательно,

$$\pi(e^{i\varphi}) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2).$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Если функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна,*

$$d\sigma(\theta) = p(\theta)\,d\theta,$$

причем $p(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, и если почти всюду в $[0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$0 < m_1 \leqslant p(\theta) \leqslant m_2, \tag{3.9}$$

то соответствующие ортогональные нормированные полиномы $\{\hat{P}_n(z)\}$ равномерно ограничены в замкнутой области $|z| \leqslant 1$:

$$|\hat{P}_n(z)| \leqslant \frac{M_n}{\sqrt{h_n}} \leqslant A \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.10}$$

Обозначая через $u(\theta)$, $v(\theta)$ вещественную и мнимую части функции $\frac{1}{h}\pi(e^{i\theta})$, имеем:

$$\left.\begin{aligned}|u(\theta+\gamma)-u(\theta)| &\leqslant \frac{1}{h}|\pi[e^{i(\theta+\gamma)}]-\pi(e^{i\theta})|,\\ |v(\theta+\gamma)-v(\theta)| &\leqslant \frac{1}{h}|\pi[e^{i(\theta+\gamma)}]-\pi(e^{i\theta})|;\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

так как, по лемме 3.1, $\pi(e^{i\theta}) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, то отсюда вытекает, что $u(\theta)$, $v(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$. В таком случае, как известно, существует тригонометрическая сумма

$$s_n(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{3.12}$$

порядка n, для которой

$$\| u(\theta) - s_n(\theta) \| \leqslant \frac{B}{n^\alpha}. \tag{3.13}$$

Введем сопряженную сумму

$$\sigma_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin k\theta - b_k \cos k\theta) \tag{3.12'}$$

и построим полином

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - ib_k) z^k, \quad b_0 = 0, \quad G_n(e^{i\theta}) = s_n(\theta) + i\sigma_n(\theta). \tag{3.14}$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{\pi(z)}{h} - G_n(z), \quad RF(0) = \frac{1}{h} - a_0, \quad IF(0) = 0 \tag{3.15}$$

класса H_2; в таком случае мы имеем [см. (7), § 7.21]:

$$\| IF(e^{i\theta}) \| \leqslant C \| RF(e^{i\theta}) \|, \tag{3.16}$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от n; отсюда находим:

$$\| v(\theta) - \sigma_n(\theta) \| \leqslant C \| u(\theta) - s_n(\theta) \| \leqslant \frac{BC}{n^\alpha}. \tag{3.17}$$

Так как справедливо неравенство

$$\| F(e^{i\theta}) \| \leqslant \| RF(e^{i\theta}) \| + \| IF(e^{i\theta}) \|,$$

то мы имеем:

$$\left\| \frac{1}{h} \pi(e^{i\theta}) - G_n(e^{i\theta}) \right\| \leqslant \frac{B}{n^\alpha} + \frac{BC}{n^\alpha} = \frac{D}{n^\alpha}. \tag{3.18}$$

Благодаря тому что почти всюду в $[0, 2\pi]$ выполняется неравенство $p(\theta) \leqslant m_2$, мы находим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\pi(e^{i\theta})}{h} - G_n(e^{i\theta}) \right|^2 p(\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant m_2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\pi(e^{i\theta})}{h} - G_n(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta \leqslant \frac{m_2 D^2}{n^{2\alpha}}. \tag{3.19}$$

Покажем, что для полиномов $\{P_n^*(z)\}$ будем иметь неравенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\pi(e^{i\theta})}{h}-\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{h_n}\right|^2 p(\theta)\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\pi(e^{i\theta})}{h}-G_n(e^{i\theta})\right|^2 p(\theta)\,d\theta \leqslant \frac{m_2 D^2}{n^{2\alpha}}. \tag{3.20}$$

Найдем коэффициенты $\{\lambda_n\}$ Фурье-Чебышева функции $\frac{\pi(z)}{h}$. По (2.7), имеем:

$$h_n\lambda_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi(e^{i\theta})}{h}\cdot\overline{P_n(e^{i\theta})}\,p(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi(e^{i\theta})}{h}\cdot\overline{P_n(e^{i\theta})}\,\frac{h}{|\pi(e^{i\theta})|^2}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{P_n(e^{i\theta})}}{\overline{\pi(e^{i\theta})}}\cdot d\theta,$$

откуда, по (2.4) и (2.6), находим:

$$h_n\overline{\lambda}_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{P_n(z)}{\pi(z)}\cdot\frac{dz}{z} = P_n(0) \quad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

и, таким образом, имеем формальное разложение Фурье-Чебышева функции

$$\frac{\pi(z)}{h} \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(z)\,\overline{P_k(0)}}{h_k}. \tag{3.21}$$

Из формулы (2.8) находим, полагая $y=0$:

$$\frac{1}{h_n}P_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(z)\,\overline{P_k(0)}}{h_k} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{3.22}$$

Из сопоставления (3.21) и (3.22) видно, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\pi(e^{i\theta})}{h}-R_n(e^{i\theta})\right|^2 p(\theta)\,d\theta,$$

где $R_n(z)$ — полином степени n, обращается в минимум при $R_n(z) \equiv \frac{P_n^*(z)}{h_n}$; отсюда вытекает (3.20), а также неравенство

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\pi(e^{i\theta})}{h}-\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{h_n}\right|^2 d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{m_1}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\pi(e^{i\theta})}{h}-\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{h_n}\right|^2 p(\theta)\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant D\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}};$$

так как функция $\frac{\pi(z)}{h}$ и полиномы $\left\{\frac{P_n^*(z)}{h_n}\right\}$ удовлетворяют всем условиям леммы 1.3, то эти последние равномерно ограничены в замкнутой области $|z|\leqslant 1$.

§ 4

Докажем теперь теорему, сформулированную во введении. Как известно, полиномы $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$, ортогональные и нормальные на отрезке $[-1, +1]$ относительно веса $w(x)$, связаны с полиномами $\{\hat{P}_n(z)\}$, ортогональными и нормальными на единичной окружности относительно веса

$$p(\theta) = w(\cos\theta)\,|\sin\theta|,$$

соотношением *:

$$\hat{\varphi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-a_{2n-1})}} \cdot \frac{\hat{P}_{2n}(z) + \hat{P}^*_{2n}(z)}{z^n}, \quad z = x + \sqrt{x^2-1}; \tag{4.1}$$

при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем $|z| = 1$ и поэтому

$$|\hat{\varphi}_n(x)| \leqslant \frac{2M_n}{\sqrt{2\pi(1-|a_{2n-1}|)}}, \quad |\hat{P}_{2n}(z)|, \quad |\hat{P}^*_{2n}(z)| \leqslant M_n; \tag{4.2}$$

так как, по (2.4), (2.5),

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

то *при условиях теоремы* 3.1 *полиномы* $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$ *равномерно ограничены на всем отрезке* $[-1, +1]$.

Отметим в заключение, что при выполнении условий теоремы, сформулированной во введении, функции

$$\psi_n(\theta) = \sqrt{p(\theta)}\,\hat{\varphi}_n(\cos\theta) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4.3}$$

образуют на отрезке $[0, \pi]$ ортогональную нормальную систему

$$\int_0^\pi \psi_n(\theta)\,\psi_m(\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, \ldots),$$

причем

$$|\psi_n(\theta)| \leqslant \sqrt{m_2}\,M \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Применяя к этой системе ряд теорем, выведенных для равномерно ограниченных ортогональных систем, мы получим ряд свойств полиномов В. А. Стеклова $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$, ортонормированных на отрезке $[-1, +1]$ относительно веса $w(x)$:

1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{\varphi}_n(x)$ сходится почти всюду на отрезке $[-1, +1]$, если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{3}} b_n^2 < \infty$ (Вейль);

2) если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{\varphi}_n(x)$ сходится почти всюду на отрезке $[-1, +1]$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (Планшерель);

---

* См. ([10]), ([2]).

3) если к тому же сходимость ряда абсолютная, то $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$ (Привалов);

4) если существует интеграл

$$\int_{-1}^{1} w(x) F^2(x)\,dx$$

и если

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{\varphi}_n(x),$$

то для любой возрастающей последовательности номеров $\{n_k\}$ имеем (Стечкин):

$$\sum_{k=1}^{\infty} | b_{n_k} \hat{\varphi}_{n_k}(x) \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} E_{n_k}^{(2)}(F),$$

где

$$E_m^{(2)}(F) = \left\{ \int_{-1}^{1} \left| F(x) - \sum_{k=0}^{m-1} b_k \hat{\varphi}_k(x) \right|^2 w(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}};$$

5) если функция $F(x)\,w(x)$ суммируема на отрезке $[-1, +1]$, то все коэффициенты Фурье-Чебышева функции $F(x)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$ (Мерсер);

6) сходимость разложения

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{\varphi}_n(x)$$

в точке x отрезка $[-1, +1]$, в которой выполняется условие (2), зависит только от поведения функции $f(x)$ в ε-окрестности этой точки; в частности, для сходимости в точке x достаточно, чтобы условие (3) выполнялось в ε-окрестности этой точки (Шохат).

Отметим также одно свойство полиномов В. А. Стеклова, ортогональных на единичной окружности относительно веса $p(\theta)$, удовлетворяющего условиям теоремы 3.1:

если $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ или если $\sum_{n=1}^{\infty} n b_n^2 < \infty$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(z)$ сходится в области $|z| < 1$ к некоторой функции $\varphi(z)$, причем существование радиального предельного значения

$$\varphi(e^{i\theta_0}) = \lim_{r \to 1-0} \varphi(re^{i\theta_0})$$

в точке $\theta = \theta_0$ эквивалентно сходимости ряда в этой точке [см. ([3])]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(e^{i\theta_0}) = \varphi(e^{i\theta_0}).$$

Поступило
18. III. 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н., О многочленах, ортогональных в конечном интервале, Харьков, 1937.
2. Геронимус Я. Л., Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения, Сообщ. Харьк. матем. Об-ва, т. 19 (1948), 35—120.
3. Геронимус Я. Л., Об асимптотических свойствах полиномов, ортогональных на единичном круге, и о некоторых свойствах положительных гармонических функций, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 123—144.
4. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Москва, 1949.
5. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, Москва, 1950.
6. Смирнов В. И., Работы В. А. Стеклова о разложениях по ортогональным функциям, Юбилейный сборник Ак. Наук СССР, ч. I (1947), 186—213.
7. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, Москва, 1939.
8. Stekloff W., Une méthode de la solution du problème de développement des fonctions en séries de polynômes de Tchébychef indépendante de la théorie de fermeture, Известия Российской Академии Наук, XV (1921), 281—326.
9. Shohat J., On development of continuous functions in series of Tchebycheff polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 27 (1925), 537—550.
10. Szegö G., Orthogonal polynomials, New York, 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 481—492

М. А. ЕВГРАФОВ

ПОВЕДЕНИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА H_δ НА ГРАНИЦЕ КРУГА СХОДИМОСТИ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

Конечной целью предлагаемой работы является получение оценок для коэффициентов функции класса H_δ $(\delta < 1)$ в случае, когда ее степенной ряд имеет бесконечное число адамаровских пропусков. Эти оценки получаются на основании одного неравенства для числовых рядов, связывающего частные суммы и чезаровские средние этого ряда. Поэтому пришлось выяснить вопрос о суммируемости степенного ряда для функции класса H_δ методами Чезаро на окружности круга сходимости,

§ 1. Суммируемость степенных рядов функций класса H_δ методами Чезаро

Из теории тригонометрических рядов известны результаты о суммируемости методами Чезаро рядов для функций, принадлежащих классу H_δ при $\delta \geqslant 1$. В настоящем параграфе эти результаты распространяются на случай $\delta < 1$.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями: если дан числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, то $S_n^{(k)}(u_n)$ определяются равенством

$$S_n^{(0)}(u_n) = S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)}(u_n)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, \tag{1.1}$$

а $\sigma_n^{(k)}(u_n)$ — равенством

$$\sigma_n^{(k)}(u_n) = \frac{S_n^{(k)}(u_n)}{\binom{n+k}{k}}, \quad \binom{n+k}{k} = \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(k+1)}. \tag{2.1}$$

Если же дан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

сходящийся внутри единичного круга, то мы будем употреблять обозначения:

$$S_n^{(k)}(z_0, f) = S_n^{(k)}(a_n z_0^n),$$

$$\sigma_n^{(k)}(z_0, f) = \sigma_n^{(k)}(a_n z_0^n).$$

Для доказательства первой из наших теорем нам понадобятся следующие результаты:

1°. Если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу H_1, то почти для всех θ

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(\varepsilon)}(e^{i\theta}, f) = f(e^{i\theta})$$

при любом $\varepsilon>0$ *.

2°. Если $f(z)$ принадлежит классу H_δ, то предел

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{z\to e^{i\theta}} f(z)$$

существует при стремлении z к $e^{i\theta}$ по любому пути, не касательному к окружности $|z|=1$ **.

3°. Если $f(z)$ принадлежат классу H_δ, то имеет место представление:

$$f(z)=b(z)\cdot f_1(z), \quad |b(e^{i\theta})|=1 \text{ почти для всех } \theta,$$
$$|f_1(z)|\neq 0 \quad \text{при} \quad |z|<1 \text{ ***}.$$

4°. Для того чтобы ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ был суммируем в точке $z=z_0$: ($|z_0|=1$) методом Чезаро порядка k к сумме s, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство:

$$\frac{f(z)}{(z_0-z)^{k+1}} = \frac{s}{(z_0-z)^{k+1}} + \varphi(z, z_0), \quad \varphi(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z_0) z^n, \quad b_n(z_0) = o(n^k).$$

Доказательство. По определению суммируемости методом (C, k) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} (s - \sigma_n^{(k)}(a_n z_0^n)) = 0$$

или, согласно (1) и (2),

$$s\binom{n+k}{k} - S_n^{(k)}(a_n z_0^n) = \beta_n(z_0), \quad \beta_n(z_0) = o\left(\binom{n+k}{k}\right).$$

Далее,

$$\frac{f(xz_0)}{(1-x)^{k+1}} = s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) x^n,$$

или, полагая $xz_0=z$,

$$\frac{f(z)}{(z^0-z)^{k+1}} = \frac{s}{(z_0-z)^{k+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n(z_0)}{z_0^{n+k+1}}\cdot z^n.$$

Но

$$\beta_n(z_0) = o\left(\binom{n+k}{k}\right),$$

---

* См. (1), стр. 54. Соответствующий результат сформулирован там для тригонометрических радов. Перенос на степенные ряды осуществляется при помощи рассмотрения отдельно действительной и мнимой частей.

** См. (2), стр. 82.

*** См. (2), стр. 111.

поэтому, в силу асимптотического равенства

$$\binom{n+k}{k} \sim \frac{n^k}{\Gamma(k+1)},$$

мы получаем наше утверждение.

Докажем теперь следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *принадлежит классу* $H_{\frac{1}{p}}$ (p — *целое число*), *то почти для всех* θ

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(p-1+\varepsilon)}(e^{i\theta}, f) = f(e^{i\theta})$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Согласно 3°,

$$f(z) = b(z)\cdot[f_1(z)]^p,$$

где $f_1(z)$ принадлежит классу H_1. В силу 1° и 4°, почти для всех θ и для любого $\varepsilon_1 > 0$ ($z_0 = e^{i\theta}$)

$$\begin{aligned} \frac{f_1(z)}{(z_0-z)^{1+\varepsilon_1}} &= \frac{f(z_0)}{(z_0-z)^{1+\varepsilon_1}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)}(z_0)\cdot z^n, \quad b_n^{(1)}(z_0) = o(n^{1+\varepsilon_1}), \\ \frac{b(z) f_1(z)}{(z_0-z)^{1+\varepsilon_1}} &= \frac{b(z_0) f_1(z_0)}{(z_0-z)^{1+\varepsilon_1}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)}(z_0)\cdot z^n, \quad b_n^{(2)}(z_0) = o(n^{1+\varepsilon_1}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Обозначим

$$f_2(z) = b(z) f_1(z),$$

$$\varphi_1(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)}(z_0)\cdot z^n,$$

$$\varphi_2(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)}(z_0)\cdot z^n$$

и рассмотрим выражение

$$\frac{f(z)}{(z_0-z)^{p+\varepsilon}} = \frac{f_2(z)}{(z_0-z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}}\cdot\left[\frac{f_1(z)}{(z_0-z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}}\right]^{p-1}.$$

Согласно 3°, почти для всех θ

$$\frac{f(z)}{(z_0-z)^{p+\varepsilon}} = \left[\frac{f_2(z_0)}{(z_0-z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}} + \varphi_2(z, z_0)\right]\left[\frac{f_1(z_0)}{(z_0-z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}} + \varphi_4(z, z_0)\right]^{p-1} =$$

$$= \frac{f(z_0)}{(z_0-z)^{p+\varepsilon}} + \varphi(z, z_0), \quad \varphi(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z_0)\, z^n. \tag{4.1}$$

Так как $\varphi(z, z_0)$ представляет собою сумму конечного числа произведений p сомножителей, каждый из которых имеет коэффициенты $O\left(n^{1+\frac{\varepsilon}{p}}\right)$ и хотя бы один $o\left(n^{1+\frac{\varepsilon}{p}}\right)$, то, очевидно, почти для всех θ

$$b_n(z_0) = o(n^{p+\varepsilon}).$$

В силу 4°, это эквивалентно утверждению теоремы.

Как показывает теорема 1, чезаровские средние порядка $p-1+\varepsilon$ сходятся почти всюду, если $f(z)$ принадлежат классу $H_{\frac{1}{p}}$. Следующая далее теорема 2 позволяет выяснить характер этой сходимости более точно. Для ее доказательства нам понадобится еще один вспомогательный результат.

5°. Если $f(z)$ принадлежит классу H_δ $(\delta \geqslant 1)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F(\theta) \geqslant 0$ такая, что

$$|\sigma_n^{(\varepsilon)}(e^{i\theta}, f)| \leqslant F(\theta),$$

$$\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^\delta \, d\theta < \infty \text{ *}.$$

Теорема 2 является перенесением этого результата на случай $\delta < 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *принадлежит классу* H_δ $\left(\delta \geqslant \frac{1}{p}, \ p \text{ — целое число}\right)$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $F(\theta) \geqslant 0$ *такая, что*

$$|\sigma_n^{(p-1+\varepsilon)}(e^{i\theta}, f)| \leqslant F(\theta)$$

и

$$\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^\delta \, d\theta < \infty.$$

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 1, представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = f_2(z) \cdot [f_1(z)]^{p-1},$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ принадлежат классу $H_{p\delta}$. Напишем равенство

$$\frac{f(z)}{(z_0 - z)^{p+\varepsilon}} = \frac{f_2(z)}{(z_0 - z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}} \cdot \left[\frac{f_1(z)}{(z_0 - z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}}\right]^{p-1}.$$

---

* См. (1). стр. 247.

Согласно 1° и 2°,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{z_0^{p+\varepsilon} f(z)}{(z_0-z)^{p+\varepsilon}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+p-1+\varepsilon}{p-1+\varepsilon}\sigma_n^{(p-1+\varepsilon)}(z_0, f)\cdot\left(\frac{z}{z_0}\right)^n,\\
\frac{z_0^{1+\frac{\varepsilon}{p}}\cdot f_1(z)}{(z_0-z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\frac{\varepsilon}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}\sigma_n^{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)}(z_0, f_1)\cdot\left(\frac{z_0}{z}\right)^n,\\
\frac{z_0^{1+\frac{\varepsilon}{p}}\cdot f_2(z)}{(z_0-z)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\frac{\varepsilon}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}\sigma_n^{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)}(z_0, f_2)\cdot\left(\frac{z_0}{z}\right)^n,
\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

откуда

$$\binom{n+p-1+\varepsilon}{p-1+\varepsilon}\sigma_n^{(p-1+\varepsilon)}(z_0, f) =$$

$$= \sum_{m_1+\cdots+m_p=n}\binom{m_1+\frac{\varepsilon}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}\cdots\binom{m_p+\frac{\varepsilon}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}\sigma_{m_1}^{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)}(z_0, f_2)\,\sigma_{m_2}^{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)}(z_0, f_1)\ldots\sigma_{m_p}^{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)}(z_0, f_1). \tag{6.1}$$

Но, в силу 5°, существуют $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ такие, что

$$\left|\sigma_n^{\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)}(z_0, f_i)\right| \leqslant F_i(\theta), \quad \int_0^{2\pi}|F_i(\theta)|^{p\delta}d\theta < \infty \quad (i=1, 2);$$

поэтому

$$|\sigma_n^{(p-1+\varepsilon)}(z_0, f)| \leqslant F_2(\theta)\cdot[F_1(\theta)]^{p+1}\frac{\displaystyle\sum_{m_1+\cdots+m_p=n}\binom{m_1+\frac{\varepsilon}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}\cdots\binom{m_p+\frac{\varepsilon}{p}}{\frac{\varepsilon}{p}}}{\binom{n+p-1+\varepsilon}{p-1+\varepsilon}} =$$

$$= F_2(\theta)\cdot[F_1(\theta)]^{p-1},$$

так как в числителе дроби стоит коэффициент при x^n в разложении

$$\left[\frac{1}{(1-x)^{1+\frac{\varepsilon}{p}}}\right]^p,$$

а в знаменателе — коэффициент при x^n в разложении

$$\frac{1}{(1-x)^{p+\varepsilon}}.$$

Таким образом, в качестве $F(\theta)$ можно взять $F_2(\theta)[F_1(\theta)]^{p-1}$, так как

$$\int_0^{2\pi}\{F_2(\theta)\cdot[F_1(\theta)]^{p-1}\}^{\delta}d\theta \leqslant \left\{\int_0^{2\pi}[F_1(\theta)]^{p\delta}d\theta\right\}^{\frac{p-1}{p}}\left\{\int_0^{2\pi}[F_2(\theta)]^{p\delta}d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Этим теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2'. *Если* $f(z)$ *принадлежит классу* H_δ $\left(\delta \geqslant \frac{1}{p}\right.$, *p—целое),* *то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - \sigma_n^{p-1+\varepsilon}(e^{i\theta}, f)|^\delta \, d\theta = 0.$$

Доказательство. Так как

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^\delta \, d\theta < \infty$$

и

$$\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^\delta \, d\theta < \infty,$$

то можно выбрать h так, чтобы

$$\int_E (|f(e^{i\theta})|^\delta + [F(\theta)]^\delta) \, d\theta < \frac{\varepsilon_1}{2} \text{ при } \operatorname{mes} E \leqslant h;$$

с другой стороны, по теореме Д. Ф. Егорова, можно выбрать множество E_1 так, чтобы $\operatorname{mes} E_1 \geqslant 2\pi - h$ и при $n > n_0$

$$|f(e^{i\theta}) - \sigma_n^{(p-1+\varepsilon)}(e^{i\theta}, f)|^\delta < \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \text{ для всех } \theta \in E_1.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - \sigma_n^{(p-1+\varepsilon)}(e^{i\theta}, f)|^\delta \, d\theta \leqslant \int_{E_1} + \int_{CE_1} < \int_{E_1} \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \, d\theta + \frac{\varepsilon_1}{2} \leqslant \varepsilon_1,$$

что и доказывает теорему.

§ 2. О коэффициентах функций класса H_δ

В этом параграфе мы для сокращения будем пользоваться обозначением:

$$H_\delta[f(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^\delta \, d\theta.$$

Нам понадобятся следующие результаты:

1. Если $f(z)$ принадлежит классу H_δ, то

$$\lim_{\rho\to 1-0} H_\delta[f(z) - f(\rho z)] = 0^{*}.$$

2. Если $f(z)$ принадлежит классу $H_\delta\,(\delta < 1)$, то

$$H_1[f(rz)] \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{\delta}-1} \{H_\delta[f(z)]\}^{\frac{1}{\delta}}. \;{**}$$

---

* См. (2), стр. 89.
** См. (2), стр. 85.

3. Если $f(z)$ регулярна в единичном круге, то $H_\delta[f(rz)]$ — возрастающая функция r $(0 \leqslant r < 1)$.

4. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу H_δ, то

$$|a_n| \leqslant \varepsilon_n \cdot n^{\frac{1}{\delta}-1},$$

где

$$\varepsilon_n = 2^{\frac{1}{\delta}} \cdot e \cdot \left\{ H_\delta \left[f(z) - f\left(z\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{\delta}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$f(z) - f(\rho z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho^n) a_n z^n;$$

отсюда следует:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i (1 - \rho^n)} \int_{|z|=r} \frac{f(z) - f(\rho z)}{z^{n+1}} dz.$$

Переходя к модулям, получим:

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{1-\rho^n} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot H_1[f(rz) - f(r\rho z)],$$

или, согласно 2,

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{1-\rho^n} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{\delta}-1} \{H_\delta[f(z) - f(\rho z)]\}^{\frac{1}{\delta}}.$$

Полагая $r = 1 - \frac{1}{n}$, $\rho = 1 - \frac{1}{n}$, получим:

$$|a_n| \leqslant 2 \cdot e \cdot 2^{\frac{1}{\delta}-1} \cdot n^{\frac{1}{\delta}-1} \left\{ H_\delta \left[f(z) - f\left(z\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{\delta}},$$

что и требовалось доказать.

Из этой оценки следует, в силу 1, результат Г. А. Фридмана:

5. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу H_δ, то

$$a_n = o\left(n^{\frac{1}{\delta}-1}\right).$$

Дадим еще одну оценку для случая, если $f(z)$ — многочлен.

6. Если $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, то

$$|a_k| \leqslant \begin{cases} Ck^{\frac{1}{\delta}-1} & \text{при } k \leqslant \frac{n}{2}, \\ C(n-k)^{\frac{1}{\delta}-1} & \text{при } k > \frac{n}{2}, \end{cases}$$

где

$$C = 2^{\frac{1}{\delta}-1} \cdot e \cdot \{H_\delta [P_n(z)]\}^{\frac{1}{\delta}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$|a_k| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{P_n(z)}{z^{k+1}}\, dz \right| \leqslant \frac{1}{r^k} \cdot H_1[P_n(rz)] \leqslant \frac{1}{r^k} \cdot \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\frac{1}{\delta}-1} \cdot \{H_\delta [P_n(z)]\}^{\frac{1}{\delta}}.$$

Полагая $r = 1 - \frac{1}{k}$, получаем первую оценку. Вторую оценку получаем, применяя тот же метод к многочлену

$$Q_n(z) = z^n \cdot P_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

Далее мы построим пример, показывающий, что оценка Г. А. Фридмана для коэффициентов функций класса H_δ не может быть улучшена, а именно:

ТЕОРЕМА 1. *Какова бы ни была функция $\varphi(n) > 0$, монотонно стремящаяся к нулю, существует функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ такая, что*

1) *$f(z)$ принадлежит классу H_δ;*

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|a_n|}{n^{\frac{1}{\delta}-1} \varphi(n)} = \infty.$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$P_{n,m}(z) = \left[\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot z^{n+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) z}\right]^m = \sum_{s=0}^{nm} \alpha_s^{(n,m)} \cdot z^s.$$

Оценим снизу $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant nm} \alpha_s^{(n,m)}$. Все $\alpha_s^{(n,m)} > 0$, поэтому имеем:

$$A_{n,m} = \max_{0 \leqslant s \leqslant nm} \alpha_s^{(n,m)} \geqslant \frac{1}{nm+1} P_{n,m}(1) \geqslant \frac{n^m}{nm+1} \cdot 2^{-m} \geqslant$$
$$\geqslant n^{m-1} \cdot \frac{2^{-m}}{m+1} = C(m)\, n^{m-1}. \qquad (1.2)$$

Оценим сверху $H_\delta [P_{n,m}(z)]$ при $\delta > \frac{1}{m}$. Имеем:

$$H_\delta [P_{n,m}(z)] \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{2^{m\delta}\, d\varphi}{\left|1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{i\varphi}\right|^{m\delta}} \leqslant \frac{2^{m\delta}}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{d\varphi}{\left[4\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{n^2}\right]^{\frac{m\delta}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{m\delta}}{\pi} \int\limits_0^{\frac{1}{n}} n^{m\delta}\, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{m\delta}{2}} \cdot \left[\sin \frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{m\delta}{2}}}.$$

При $n \geqslant 2$ получаем отсюда:

$$H_\delta[P_{n,m}(z)] \leqslant \frac{2^{m\delta}}{\pi} n^{m\delta-1} + \frac{\pi^{m\delta-1}}{2^{\frac{m\delta}{2}}} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\varphi^{m\delta}} \leqslant C_1(m, \delta) \cdot n^{m\delta-1}. \qquad (2.2)$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{k^{\frac{1}{\delta}} \cdot n_k^{m-\frac{1}{\delta}}} \cdot P_{n_k,m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где рост последовательности n_k выберем в дальнейшем. Покажем, что $f(z)$ принадлежит классу H_δ. В самом деле,

$$H_\delta[f(\rho z)] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 n_k^{m\delta-1}} H_\delta[P_{n_k}, {}^m(z)] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1(m,\delta)}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot C_1(m, \delta).$$

Таким образом, $f(z)$ удовлетворяет условию 1). Но, в силу (1.2),

$$\max_{n_k < n \leqslant (m+1) n_k} |a_n| \geqslant \frac{1}{k^{\frac{2}{\delta}} \cdot n_k^{m-\frac{1}{\delta}}} \cdot A_{n_k, m} \geqslant \frac{C(m) \cdot n_k^{m-1}}{k^{\frac{2}{\delta}} \cdot n_k^{m-\frac{1}{\delta}}} = \frac{C(m)}{k^{\frac{2}{\delta}}} \cdot n_k^{\frac{1}{\delta}-1}.$$

Если мы выберем теперь $\{n_k\}$ так, чтобы $k^{\frac{2}{\delta}} \varphi(n_k) \to 0$, то будет удовлетворено и условие 2).

§ 3. О функциях класса H_δ, имеющих ряды с пропусками

Нам понадобится одна важная оценка.

Если мы имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *и существуют последовательности* $\{n_k\}$ *и* $\{m_k\}$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $u_n = 0$ *при* $n_k < n \leqslant n_k + m_k$,
2) $m_k > \lambda(n_k + m_k) + 2p$,
3) $n_{k+1} > n_k + m_k$,

то

$$|S_{n_k} - A| \leqslant \max_{n_k \leqslant n \leqslant n_k + m_k} |\sigma_n^{(p)}(u_n) - A| \cdot \frac{(2p)^p}{\lambda^p \cdot p!}, \qquad (1.3)$$

где A — любое комплексное число.

Доказательство. Рассмотрим выражение $\left(h_k = \left[\frac{m_k}{p}\right]\right)$

$$A_k = \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} \binom{n_k + mh_k + p}{p} (\sigma_{n_k+mh_k}^{(p)} - A) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} \cdot S_{n_k+mh_k}^{(p)} - A \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} \binom{n_k + mh_k + p}{p} =$$

$$= \Delta_{h_k}^{(p)} S_{n_k+t}^{(p)}\Big|_{t=0} - A\Delta_{h_k}^{(p)} \binom{n_k + t + p}{p}\Big|_{t=0}.$$

Здесь $\Delta_h^{(p)}$ означает разность p-го порядка с шагом h. Вычислим написанные разности. $\binom{n_k+t+p}{p}$ — многочлен p-й степени со старшим коэффициентом $\frac{1}{p!}$, поэтому

$$\Delta_{h_k}^{(p)}\binom{n_k+t+p}{p}=h_k^p.$$

Далее, так как $u_n=0$ при $n_k<n\leqslant n_k+m_k$, то при $t\leqslant m_k$

$$S_{n_k+t}^{(p)}=S_{n_k}^{(p)}+\binom{t}{1}S_{n_k}^{(p-1)}+\cdots+\binom{t}{p}S_{n_k},$$

т. е. $S_{n_k+t}^{(p)}$ представляет собою многочлен p-й степени от t со старшим коэффициентом $\frac{1}{p!}S_{n_k}$ и поэтому

$$\Delta_{h_k}^{(p)}S_{n_k+t}^{(p)}=S_{n_k}\cdot h_k^p.$$

Следовательно,

$$A_k=(S_{n_k}-A)\cdot h_k^p.$$

Но

$$|A|\leqslant\max_{n_k\leqslant n\leqslant n_k+m_k}|\sigma_n^{(p)}-A|\cdot\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\binom{n_k+mh_k+p}{p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^p\cdot(n_k+m_k)^p}{p!}\max_{n_k\leqslant n\leqslant n_k+m_k}|\sigma_n^{(p)}-A|.$$

Отсюда, так как $h_k>\frac{\lambda}{p}(n_k+m_k)$, следует (1.3).

Непосредственным следствием (1.3) является следующее утверждение:

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}u^n$ *удовлетворяет условиям* 1), 2), 3) *и суммируем каким-либо методом Чезаро к сумме* s, *то*

$$\lim_{k\to\infty}S_{n_k}=s.\ *$$

Доказательство. Применим (1.3) для $A=s$.

В следующих теоремах мы будем рассматривать функции вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{n_k}P_{m_k}(z),$$

причем будем предполагать, что n_k и m_k (степень $P_{m_k}(z)$) удовлетворяют условию

$$n_{k+1}>(1+\lambda)(n_k+m_k).$$

Функции такого вида мы будем для краткости называть функциями вида (Ad). Докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $f(z)$ вида (Ad) принадлежит классу H_δ, то*

$$\lim_{k\to\infty}H_\delta[P_{m_k}(z)]=0.$$

* Для (C, 1) этот результат был указан А. Н. Колмогоровым. См. ([1]), стр. 240.

Доказательство. Применим (1.3) к ряду

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{k=0}^{\infty}z^{n_k}P_{m_k}(z),$$

положив $A=f(e^{i\theta})$. Имеем:

$$|S_{n_k+m_k}(e^{i\theta},f)-f(e^{i\theta})|\leqslant\frac{(2p)^p}{\lambda^p\cdot p!}\max_{n_k+m_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}}|\sigma_n^{(p)}(e^{i\theta},f)-f(e^{i\theta})|.$$

Но, в силу теорем 2 и 2′ § 1, при $p>\frac{1}{\delta}-1$

$$H_\delta\left[\max_{n_k+m_k\leqslant n\leqslant n_{k+1}}|\sigma_n^{(p)}(e^{i\theta},f)-f(e^{i\theta})|\right]\to 0,$$

следовательно,

$$H_\delta[S_{n_k+m_k}(e^{i\theta},f)-f(e^{i\theta})]\to 0.$$

Далее,

$$P_{m_k}(z)=S_{n_k+m_k}-S_{n_{k-1}+m_{k-1}},$$

отсюда

$$H_\delta[P_{m_k}(z)]\leqslant H_\delta[S_{n_k+m_k}(z,f)-f(z)]+H_\delta[S_{n_{k-1}+m_{k-1}}(z,f)-f(z)]\to 0,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Если функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{k=0}^{\infty}z^{n_k}\cdot P_{m_k}(z)$$

вида (*Ad*) *принадлежит классу* H_δ, *то*

$$|a_{n_k+q}|\leqslant\begin{cases}\varepsilon_k q^{\frac{1}{\delta}-1} & \text{при } q\leqslant\frac{m_k}{2}.\\ \varepsilon_k(m_k-q)^{\frac{1}{\delta}-1} & \text{при } q>\frac{m_k}{2},\quad \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0.\end{cases}$$

Доказательство. Применив оценку 6 § 2 к $P_{m_k}(z)$, получим требуемое неравенство, где

$$\varepsilon_k=2^{\frac{1}{\delta}-1}\cdot e\cdot\{H_\delta[P_{m_k}(z)]\}^{\frac{1}{\delta}};$$

по предыдущей теореме, ε_k стремится к нулю.

Результат теоремы 1 не может быть улучшен в том смысле, что если $\lim_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k+m_k}=1$ и $f(z)$ вида $\sum_{k=0}^{\infty}z^{n_k}P_{m_k}(z)$ принадлежит классу H_δ, то $H_\delta[P_{m_k}(z)]$ может и не стремиться к нулю.

Действительно, рассмотрим ряд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{\mu_k}}{k^4}\cdot P_{\nu_k,2}(z^{\mu_k}),$$

где $P_{n,m}(z)$ — многочлен, введенный в теореме 1 § 2. Рассуждая как и там, убеждаемся, что $f(z)$ принадлежит классу H_δ при $\delta < \frac{1}{2}$. Положим $n_s = \mu_k(\nu_k + 1)$, $n_{s+1} = \mu_k(\nu_k + 2)$, $m_s = 1$. При этом

$$P_{m_s}(z) = \frac{\nu_k}{k^4} \cdot z^{\mu_k(\nu_k+1)} \left(1 - \frac{1}{\nu_k}\right)^{\nu_k} \cdot \frac{n_{s+1}}{n_s + m_s} = 1 + \frac{1}{\nu_k + 1}$$

стремится к единице сколь угодно медленно, но если мы выберем μ_k так, чтобы $\frac{\nu_k}{k^4} \to \infty$, то, очевидно, $H_\delta[P_{m_s}(z)]$ не будет стремиться к нулю ни при каком δ.

В заключение укажем еще три теоремы, являющиеся непосредственным следствием результатов § 1 и неравенства (1.3).

ТЕОРЕМА 3. *Если $f(z)$ вида (Ad) принадлежит классу H_δ, то почти для всех θ*

$$\lim_{k \to \infty} S_{n_k+m_k}(e^{i\theta}, f) = f(e^{i\theta}).$$

ТЕОРЕМА 4. *Если $f(z)$ вида (Ad) принадлежит классу H_δ, то существует $F(\theta) \geqslant 0$ такая, что*

$$|S_{n_k+m_k}(e^{i\theta}, f)| \leqslant F(\theta), \quad \int_0^{2\pi} |F(\theta)|^\delta \, d\theta < \infty.$$

ТЕОРЕМА 5. *Если $f(z)$ вида (Ad) принадлежит классу H_δ, то*

$$\lim_{k \to \infty} H_\delta[S_{n_k+m_k}(e^{i\theta}, f) - f(e^{i\theta})] = 0.$$

Поступило
3. III. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, М.— Л., 1939.
[2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, ГТТИ, М.— Л., 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 493—495

ЗА ПЕРЕДОВУЮ СОВЕТСКУЮ НАУКУ

Исторические решения XIX Съезда партии Ленина — Сталина открывают величественные перспективы дальнейшего развития социалистической экономики и культуры в нашей стране. Для решения поставленных Съездом великих задач построения коммунистического общества путем постепенного перехода от социализма к коммунизму, непрерывного повышения материального и культурного уровня общества необходим новый мощный подъем советской науки. Коммунистическая партия, товарищ И. В. Сталин проявляют постоянную заботу о развитии передовой науки.

Мы, советские математики, можем гордиться такими предшественниками, как Н. И. Лобачевский, П. Л. Чебышев и другие великие русские математики. Однако до Великой Октябрьской социалистической революции наукой могли заниматься лишь одиночки, и применение открытий ученых встречало упорное противодействие. Лишь после свержения власти помещиков и капиталистов создались благоприятные условия для развития науки. Резко поднялся общий культурный уровень населения, вся страна покрылась густой сетью научно-исследовательских институтов и высших учебных заведений.

Мощный подъем науки и культуры наблюдается как в великом Советском Союзе, так и в странах народной демократии; здесь, в лагере мира и демократии, развитие науки идет широким фронтом и направлено на разрешение задач, выдвинутых мирным строительством. В то же время наука в капиталистических странах все больше направляется на решение задач, преследующих военные цели.

Вопросам дальнейшего подъема культурного уровня нашего народа уделено большое внимание в Директивах XIX Съезда партии по пятому пятилетнему плану развития СССР на 1951—1955 гг. Поставлена задача завершить к концу пятилетки переход от семилетнего образования к всеобщему среднему образованию (десятилетка) в столицах республик, городах республиканского подчинения, в областных, краевых и крупнейших промышленных центрах и подготовить условия для полного осуществления в следующей пятилетке всеобщего среднего образования (десятилетка) в остальных городах и сельских местностях. В соответствии с задачами дальнейшего развития народного хозяйства и культурного строительства Директивами Съезда предусматривается увеличение за пятилетие выпуска специалистов всех родов из высших и средних специальных учебных заведений примерно на 30—35 процентов при увеличении выпуска специалистов из высших учебных заведений для важнейших отраслей промышленности, строительства и сельского хозяйства в 1955 г. по сравнению с 1950 годом примерно в два раза.

Подготовка в пятой пятилетке научных и научно-педагогических кадров через аспирантуру высших учебных заведений и научно-исследовательских институтов должна быть расширена примерно в два раза по сравнению с предыдущей пятилеткой. Планируются большие капитальные вложения в строительство высших учебных заведений и научно-исследовательских институтов. Директивы Съезда указывают на необходимость всемерно содействовать ученым в разработке ими теоретических проблем во всех областях знания и укреплять связь науки с производством.

В отчетном докладе тов. Г. М. Маленкова о работе Центрального Комитета партии выдвинуто положение: «Развивать дальше передовую советскую науку с задачей занять первое место в мировой науке».

Советская наука развивается на основе революционной теории, освещающей путь продвижения нашего народа вперед, к полному торжеству коммунизма. Всемирно-историческое значение имеют теоретические труды товарища И. В. Сталина.

В классическом труде «Марксизм и вопросы языкознания» товарищ Сталин открыл новые перспективы для прогресса всех отраслей знания. Этот труд стал руководством к действию для всей передовой науки. В новом гениальном труде И. В. Сталина «Экономические проблемы социализма в СССР» раскрыт и научно обоснован основной экономический закон социализма, существенными чертами и требованиями которого является обеспечение максимального удовлетворения постоянно растущих материальных и культурных потребностей всего общества путем непрерывного роста и совершенствования социалистического производства на базе высшей техники. Товарищ Сталин всесторонне исследовал законы общественного производства и распределения материальных благ в социалистическом обществе, определил научные основы развития социалистической экономики, указал пути постепенного перехода от социализма к коммунизму. На основе труда И. В. Сталина «Экономические проблемы социализма в СССР» по решению XIX Съезда Коммунистической партии будет разработана новая программа Коммунистической партии Советского Союза.

Роль науки в строительстве коммунистического общества велика и ответственна. Укрепление связи науки и практики — одно из важнейших условий для решения стоящих перед наукой задач. Содружество ученых с новаторами производства обогащает науку опытом практики, а практическим работникам помогает быстрее решать стоящие перед ними задачи.

Необходимым условием развития и преуспевания науки является свобода критики, борьба мнений. Важную роль в деле развития советской науки сыграли дискуссии, проведенные по вопросам философии, биологии, физиологии, языкознания, политической экономии. Дискуссии вскрыли серьезные идеологические недостатки в различных областях науки и направили ученых на борьбу с этими недостатками. Разбиты различные вульгаризаторские извращения, проявления буржуазной идеологии; разгромлен аракчеевский режим, существовавший на многих участках научного фронта. Однако и сейчас еще в некоторых отраслях науки полностью не ликвидирована монополия отдельных групп ученых, оттирающих молодые силы, ограждающих себя от критики и пытающихся решать научные вопросы административным путем. Советские ученые должны решительно

бороться против этих извращений, развертывая критику и борьбу мнений в научной работе.

Усилия ученых должны быть направлены на более быстрое решение научных проблем использования громадных природных ресурсов нашей страны. Важные задачи при этом встают перед советской математикой. Математическая наука является необходимым инструментом в техническом развитии страны; нет ни одной отрасли техники, которая могла бы обойтись без математики, причем применение находят различные математические дисциплины. Так как разнообразные направления математической науки тесно связаны между собой, то подлинно крупный успех в одном из направлений обычно оказывает влияние на развитие других направлений. Важной задачей советских математиков является поэтому создание новых первоклассных научных работ во всех ее разделах. Большое значение для решения этой задачи должны иметь творческие дискуссии в области математики, начало которым положено недавно проводившимися Всесоюзными совещаниями по теории функций комплексного переменного, по алгебре и теории чисел и по теории дифференциальных уравнений.

Воодушевленные решениями XIX Съезда Коммунистической партии Советского Союза и речью товарища И. В. Сталина, советские математики будут еще настойчивее бороться за развитие передовой советской науки, за первое место в мировой науке.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

16 (1952), 497—502

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ОБ АНТИМАЙОРАНТАХ

Статья содержит доказательство и обобщения одной теоремы об антимайорантах, ранее формулированной автором.

1. В заметке ([1]) я назвал *антимайорантой* ($H(x) \in \mathfrak{A}$) всякую функцию $H(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$, обладающую свойством, что неравенство вида

$$|G_p(x)| \leqslant H(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{1}$$

где $G_p(x)$ — целая функция данной конечной степени $p > 0$, совместимо на любом отрезке $[a, b]$ действительной оси с неравенством

$$\sup_{a<x<b} |G'_p(x)| > N, \tag{2}$$

как бы ни было велико N.

Очевидно, что *антимайоранта не может быть майорантой конечного* (или квази-конечного) роста. Однако класс рассматриваемых вещественных функций нужно подчинить некоторым более или менее значительным ограничениям для того, чтобы можно было утверждать, что если функция $F(x)$ этого класса не является антимайорантой, то она непременно должна быть майорантой конечного (или квази-конечного) роста. В упомянутой заметке ([1]) я сформулировал без доказательства утверждение такого рода (теорема 4), вводя ограничение, что $F(x) > 0$ есть *почти возрастающая* функция, равная модулю целой функции конечной степени.* Основной целью настоящей статьи является доказательство этой теоремы с соответствующим ее обобщением и уточнением.

Введем еще одно определение, которое соответствует понятию, включенному в формулировку упомянутой теоремы. Назовем функцию $H(x) > 0$ *слабо весовой* ($H(x) \in V$, $V \supset W$), если всякая непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, стремящаяся к нулю при $x \to \pm\infty$, может быть равномерно на всей оси приближена с весом $H(x)$ при помощи целых функций $G_p(x)$ любой данной (произвольно малой) степени $p > 0$, т. е.

---

* Функция $H(x) > a > 0$ называется [см. ([1])] почти возрастающей (при $\pm x \to \infty$), когда существует такая постоянная (не зависящая от x и y) $c \geqslant 1$, что $H(y) \leqslant cH(x)$ при $0 < \frac{y}{x} < 1$ для всех достаточно больших $|y|$. В дальнейшем, не нарушая общности рассуждений, для упрощения письма положим $H(x) \geqslant 1$ и примем $c = 1$ (т. е. $H(x)$ будет просто монотонно возрастающей функцией в обоих направлениях).

если для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ *можно построить целую функцию* $G_p(x, \varepsilon)$ *степени* p, *удовлетворяющую условию*

$$|f(x) - G_p(x, \varepsilon)| < \varepsilon H(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3}$$

Легко видеть, что *слабо весовая функция* $H(x) \in V$ (так же как и всякая весовая функция) *является антимайорантой.*

Действительно, пусть функция $f(x)$ в неравенстве (3) с $\varepsilon \to 0$ при данном $p > 0$ имеет в данном промежутке (a, b)

$$\sup_{a<x<b} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| = \infty. \tag{4}$$

В таком случае все $G_p(x, \varepsilon)$ удовлетворяют на всей оси неравенству

$$|G_p(x, \varepsilon)| \leqslant cH(x), \tag{1 bis}$$

где $c > 0$ — фиксированная постоянная; а между тем, из условия (4) следует, что, как бы велико ни было $N > 0$, неравенство

$$|G'_p(x, \varepsilon)| \leqslant N$$

невозможно для всех x внутри (a, b).

2. ОБЩАЯ ЛЕММА. *Пусть почти возрастающая функция* $H(x) > 1$ *обладает свойством, что на некоторой последовательности отрезков* $[-\pi\mu_n, \pi\mu_n]$ *бесконечно возрастающей длины существуют многочлены* $R_n(x)$ *степени* $n \leqslant p\mu_n$, *корни которых* $\rho_k^{(n)} e^{i\theta_k^{(n)}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *для* $n \to \infty$ *удовлетворяют условию*:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin \theta_k^{(n)}|}{\rho_k^{(n)}} \to \infty \quad (\rho_{k+1}^{(n)} \geqslant \rho_k^{(n)} \geqslant 1), \tag{5}$$

причем, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$,

$$|H(t) - R_n(t)| < \varepsilon H(t) \quad (-\pi\mu_n \leqslant t \leqslant \pi\mu_n). \tag{6}$$

В таком случае $H(x)$ *есть слабо весовая функция* $(H(x) \in V)$.

Для доказательства замечаем, что, какова бы ни была данная непрерывная функция $\varphi(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0\right)$, вследствие теоремы II монографии (²) (стр. 156) можно при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворить неравенству

$$\left| \frac{\varphi(t)}{H(t)} - \frac{P_n(t)}{R_n(t)} \right| < \varepsilon \quad (-\infty < t < \infty), \tag{7}$$

где $P_n(t)$ — многочлен степени не выше n.

Положим

$$t = t_n(x) = 2\mu_n \int_0^{\frac{x}{2\mu_n}} \frac{\sin^2 z}{z^2} \, dz. \tag{8}$$

Нечетная функция $t_n(x)$, которая является целой функцией степени $\frac{1}{\mu_n}$, возрастает от $-\pi\mu_n$ до $\pi\mu_n$, когда x растет от $-\infty$ до $+\infty$, причем всегда $|t_n(x)| \leqslant |x|$. Поэтому, если $P_n(t)$ — многочлен степени n относительно t, то

$$S_{p, n}(x) = P_n(t_n(x)) \tag{9}$$

будет целой функцией степени $p = \frac{n}{\mu_n}$, и неравенство (7) можно записать в виде:

$$\left| \frac{\varphi(t_n(x))}{H(t_n(x))} - \frac{S_{p,n}(x)}{H(t_n(x))\,(1+\varepsilon')} \right| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $|\varepsilon'| < \varepsilon$, принимая во внимание (6). Следовательно,

$$|\varphi(t_n(x))\,(1+\varepsilon') - S_{p,n}(x)| < \varepsilon H(t_n(x))\,(1+\varepsilon),$$

и так как $\varphi(t_n(x)) \to 0$ при $|t_n(x)| \to \infty$, то имеем также:

$$|\varphi(t_n(x)) - S_{p,n}(x)| < 2\varepsilon H(t_n(x)) < 2\varepsilon H(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{10}$$

Остается доказать, что при n достаточно большом будем иметь:

$$|\varphi(t_n(x)) - \varphi(x)| < \varepsilon H(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{11}$$

Для этого фиксируем L настолько большим, что $\varphi(t) < \frac{\varepsilon}{2} H(t)$ для всех $|t| \geqslant \frac{L}{2}$. Как бы мало ни было данное $\alpha > 0$, будем рассматривать соответствующие n достаточно большими, чтобы иметь

$$\frac{L}{2\mu_n} < \alpha \leqslant 1.$$

Положим сначала, что

$$L \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} L; \tag{12}$$

тогда

$$\frac{t_n(x)}{x} = \frac{2\mu_n}{x} \int_0^{\frac{x}{2\mu_n}} \frac{\sin^2 z}{z^2}\,dz > 4\mu_n^2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2\mu_n}}{x^2} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{4\mu_n}{L\pi} \sin \frac{L\pi}{4\mu_n}\right)^2 > \left(\frac{2}{\pi\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если x удовлетворяет (12), то

$$|t_n(x)| > \frac{1}{2} L, \tag{13}$$

но, учитывая, что $|t_n(x)|$ растет вместе с $|x|$, заключаем, что неравенство (13) будет всегда вытекать из неравенства

$$|x| \geqslant L. \tag{14}$$

Поэтому при соблюдении (14) осуществляется и (11).

Предположим, напротив, что $|x| < L$; в таком случае имеем:

$$\frac{t_n(x)}{x} > \left[\frac{2\mu_n}{L} \sin \frac{L}{2\mu_n}\right]^2 > \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha\right]^2,$$

откуда (учитывая, что $|t_n(x)| < |x|$)

$$|x - t_n(x)| < |t_n(x)| \left(\frac{x}{t_n(x)} - 1\right) < L\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \alpha} - 1\right) = \beta.$$

Поэтому, взяв α достаточно малым, чтобы иметь

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon,$$

когда $|x_1 - x_2| < \beta$ и $|x_1| < L$, $|x_2| < L$, получим:

$$|\varphi(x) - \varphi(t_n(x))| < \varepsilon \leqslant \varepsilon H(0) < \varepsilon H(x).$$

Следовательно, неравенство (11) осуществляется при всех x, и мы получаем (складывая (10) и (11)):

$$|\varphi(x) - S_{p,n}(x)| < 3\varepsilon H(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3 bis}$$

3. ТЕОРЕМА*. *Если* $|H(x)|$ *есть почти возрастающий модуль целой функции* $H(x)$ *конечной степени* p_0, *корни которой* $\alpha_k + i\beta_k$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k|}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} = \infty, \tag{15}$$

то $|H(x)| \in V$ *есть слабо весовая функция и тем более* $H(x)$ *является антимайорантой* ($H(x) \in \mathfrak{A}$).

Пусть

$$H(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m.$$

Тогда из условия (15) следует, что корни многочлена

$$R_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

$\alpha_{k,n} + i\beta_{k,n}$ при n достаточно большом будут удовлетворять неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\beta_{k,n}|}{\alpha_{k,n}^2 + \beta_{k,n}^2} > M, \tag{5 bis}$$

как бы велико ни было данное число M, так что многочлены $R_n(x)$ удовлетворяют условию доказанной выше леммы на любых бесконечно возрастающих промежутках $(-\pi\mu_n, \pi\mu_n)$, где $\pi\mu_n < \frac{n}{p_0 e}$.

Особый интерес представляет применение нашей теоремы к сильно асимметричным функциям, когда условие

$$\int_1^{\infty} \frac{\log|H(x)H(-x)|}{x^2} dx = \infty, \tag{16}$$

равнозначное условию (15), имеет место, хотя не только

$$\int_1^{\infty} \frac{\log|H(x)|}{x^2} dx < \infty,$$

но и

$$\int_1^{\infty} \frac{\log|H(x)|}{x^{3/2}} dx < \infty.$$

---

* Эта теорема, по существу, эквивалентна теореме 4 заметки ([1]), так как *необходимость* условия (15) для того, чтобы $|H(x)|$ была *антимайорантой*, доказана мною в той же самой заметке.

Примером такой функции может служить функция

$$H(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-x)^k}{k!} + \frac{x^k}{4k!}\right] = e^{-x} + \frac{1}{2}\cos\sqrt[4]{x} + \frac{1}{4}\left(e^{\sqrt[4]{x}} + e^{-\sqrt[4]{x}}\right).$$

Эта функция будет, по вышедоказанному, слабо весовой функцией (т. е. антимайорантой), тем не менее, как показано в моей заметке ([3]), она обладает свойствами майоранты по отношению к многочленам и, вообще, по отношению ко всем функциям конечной полустепени.

Таким образом, в общем определении майоранты (как и антимайоранты) существенно, чтобы степень p рассматриваемых функций конечной степени была положительна $(p > 0)$ (эта оговорка отпадает в случае четных функций).

Примечание. Заметим, что условию леммы могут удовлетворять и целые функции выше 1-го рода (т. е. бесконечной степени). Пусть, например,

$$H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \rho_n(x),$$

где

$$\rho_n(x) = \frac{x^{n+1}}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{H(z)\,dz}{z^{n+1}(z-x)}.$$

Тогда, если

$$\varliminf_{R\to\infty}\max_{|z|=R}\frac{\log|H(z)|}{R} < p < \infty,$$

то $\rho_n(x)\to 0$, при $n = pR$ и $|x| < e^{-1}n$, для соответствующей бесконечно возрастающей последовательности значений R.

Таким образом, доказанная выше теорема распространяется также на такие целые функции бесконечной степени.

4. Следствие 1. *Если $H(x)$ — антимайоранта ($H(x) \in \mathfrak{A}$), а $G^*(x)$ — любая данная функция конечной степени, то произведение $|G^*(x)|\,H(x)$ также будет антимайорантой ($|G^*(x)|\,H(x) \in \mathfrak{A}$).*

Действительно, пусть при неравенстве

$$|G_{p,n}(x)| \leqslant H(x)$$

верхняя грань производной $G'_{p,n}(x)$ для некоторой последовательности функций $G_{p,n}(x)$ конечной (ограниченной) степени $p > 0$ бесконечна в промежутке (a, b). Тогда целые функции $G_{p,n}(x)$ и $G^*(x)$ конечной ограниченной) степени будут удовлетворять неравенствам:

$$|G_{p,n}(x)\,G^*(x)| \leqslant |G^*(x)|\,H(x),$$

причем в том же промежутке верхняя грань производной $[G_{p,n}(x)\,G^*(x)]'$ также бесконечна, так как $G^*(x)$ имеет лишь конечное число нулей на отрезке $[a, b]$ и производная $G^*(x)$ ограничена на $[a, b]$.

Следствие 2. *Пусть целая функция конечной степени $H(x) > 0$ не является функцией конечного роста (т. е. удовлетворяет условию* (16)).

В таком случае, какова бы ни была функция $p(x) > c > 0$ и действительная постоянная a, функция

$$F(x) = \left| \int_a^x p(x) H(x)\, dx \right| \tag{17}$$

будет антимайорантой.

Достаточно рассмотреть случай, когда $p(x) = 1$, $a = 0$. Замечаем тогда, что функция $F(x) = \left| \int_0^x H(x)\, dx \right|$ возрастает при $x \to \pm\infty$, причем $\int_0^x H(x)\, dx$ есть функция конечной степени. Таким образом, если мы подчиним непрерывную функцию $\varphi(x)$, фигурирующую в доказательстве общей леммы, дополнительному требованию, чтобы отношение $\frac{\varphi(x)}{x}$ было ограничено на всей оси, то для таких функций будет осуществимо неравенство (3 bis) (т. е. (3)), если в его правой части стоит функция

$$F(x) = \left| \int_0^x H(x)\, dx \right| \tag{17 bis}$$

(которая удовлетворяет условиям определения почти возрастающей функции, кроме требования $F(x) > b > 0$). Можно сказать, что $F(x)$ является слабо весовой функцией с точностью до множителя x и, очевидно, что при помощи того же рассуждения, посредством которого мы убедились, что класс $V \subset \mathfrak{A}$, заключаем также, что $F(x)$ — антимайоранта ($F(x) \in \mathfrak{A}$).

Поступило
22.VIII.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., О майорантах конечного или квази-конечного роста, Доклады Ак. Наук СССР, т. 65 (1949), 117—120.

[2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, М.—Л., 1937.

[3] Бернштейн С. Н., О нормально возрастающих весовых функциях и майорантах конечного роста, Доклады Ак. Наук СССР, т. 65 (1952), 257—260.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 503—520

Ю. В. ЛИННИК

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ, КАСАЮЩИЕСЯ БИНАРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ГОЛЬДБАХА

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

Работа имеет условный характер. В ней рассматриваются выводы, которые можно сделать из римановой гипотезы и различных плотностных гипотез в направлении бинарной задачи Гольдбаха.

§ 1

В настоящей работе подробно развиваются соображения, кратко сформулированные в заметке (1) и частично в работе (2). Именно, ставится вопрос о том, что можно получить из гипотезы Римана и более слабых «плотностных» теорем и гипотез в направлении бинарной проблемы Гольдбаха о представлении четных чисел суммою двух простых.

Условность этих исследований может вызвать вопрос о том, стоит ли их воспроизводить. Но история известной «тернарной» проблемы Гольдбаха, решенной И. М. Виноградовым в 1937 г., показывает, что условные исследования, касавшиеся ее и смежных проблем, все же принесли пользу и выделили ряд узловых вопросов теории простых чисел.

Кроме того, в этих исследованиях выясняется роль «плотностных» оценок, достигаемых значительно легче, чем гипотеза Римана. Они дают возможность получать и «безусловные» теоремы, касающиеся бинарных задач.

Наконец, появляется возможность вникнуть в некоторые трудности и особенности бинарных задач.

§ 2

Для рассмотрения бинарной проблемы Гольдбаха об уравнении

$$p + p' = N \quad (N \text{ четно; } p, p' \text{ — простые}) \tag{2.1}$$

вводим сумму

$$S(\vartheta, N) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i\vartheta n} \Lambda(n). \tag{2.2}$$

Если мы обозначим

$$Q(N) = \sum_{p+p'=N} \ln p \ln p', \tag{2.3}$$

то, очевидно, будем иметь:

$$Q(N) = e\int_0^1 (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i\vartheta N}\, d\vartheta + O(N^{\frac{3}{4}} \ln^2 N). \tag{2.4}$$

Мы видим, что для решения бинарных задач нужно уметь вычислять интеграл (2.4) по всему сегменту $[0, 1]$. Ожидаемый порядок должен мало отличаться от порядка N.

Кроме того, из асимптотического закона простых чисел известно, что

$$\int_0^1 |S(\vartheta, N)|^2\, d\vartheta = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda^2(n)\, e^{-\frac{2n}{N}} \sim \frac{N}{2}\ln N. \tag{2.5}$$

Принятие тех или иных римановых гипотез или «плотностных» гипотез о нулях $L(s, \chi)$, как оказывается, дает возможность вычислять интеграл типа (2.4) по некоторым «достаточно длинным» кускам сегмента $[0,1]$ и получать теоремы, имеющие определенный арифметический смысл.

§ 3

Мы рассмотрим сперва, что дает для бинарных задач гипотеза Римана для одной только ζ-функции $\zeta(s)$, которую мы обозначим через $R[\zeta(s)]$, и плотностная гипотеза или теорема, обозначаемая через $D[\zeta(s), N(T, \nu)]$, которая состоит в следующем:

Для любого числа ν из сегмента $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ число нулей $\zeta(s)$ $(s = \sigma + it)$ в прямоугольнике $\frac{1}{2} + \nu \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ не превосходит $N(T, \nu)$.

Такая функция $N(T, \nu)$ будет обычно аппроксимироваться выражениями вида $T^{1-\varphi(\nu)} \ln^2 T$ при ν не очень близких к $\frac{1}{2}$, а вблизи $\nu = \frac{1}{2}$ $(\sigma = 1)$ будет равна нулю в силу известных теорем об отсутствии там нулей $\zeta(s)$ [см. ([3])].

Имеют место следующие условные теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Из римановой гипотезы* $R[\zeta(s)]$ *следует, что при* $\varkappa_N = \frac{1}{(\ln N)^{3+\varepsilon}}$, *где* $\varepsilon > 0$ *— любое малое фиксированное число и* $N > N_0(\varepsilon)$, *имеем*:

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} (S(\vartheta, N)^2\, e^{2\pi i N\vartheta}\, d\vartheta = \frac{N}{e} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^{\frac{\varepsilon}{3}}}\right). \tag{3.1}$$

Из этого соотношения следует

ТЕОРЕМА 2. *При тех же условиях, при любом* $\varepsilon_0 > 0$ *и любом* $N > N_0(\varepsilon_0)$, *уравнение в простых числах*

$$|p + p' - N| \leqslant H \tag{3.2}$$

разрешимо при $H = (\ln N)^{3+\varepsilon_0}$.

Имеет место также асимптотическая формула для числа решений неравенства (3.2). При этом существенной оказывается не сама по себе гипотеза Римана $R[\zeta(s)]$, а «плотностные» факты. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Из плотностной гипотезы* $D[\zeta(s), N(T,\nu)]$, *где* $N(T,\nu)=T^{1-2\nu}\ln^2 T$ *и* $r\geqslant 1$ — *константа, следует разрешимость уравнения в простых числах:*

$$|p+p'-N|\leqslant H_1, \quad H_1=\ln^{r+6}N. \tag{3.3}$$

ТЕОРЕМА 4. *Из гипотезы Римана для всех рядов* $L(s,\chi_q)$ *по данному модулю* $g\leqslant\frac{N}{\ln^6 N}$ *следует разрешимость уравнения*

$$p+p'=N+qh, \tag{3.4}$$

где $0\leqslant h\leqslant\ln^6 N$, *если только* N *четно при четном* q.

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 5. *Из расширенной гипотезы Римана следует разрешимость сравнений*

$$p+p'\equiv N\,(\mathrm{mod}\,Q) \tag{3.5}$$

для любого $Q\leqslant\frac{N}{\ln^6 N}$, *если только* N *четно при четном* Q.

§ 4

Рассмотрим доказательство теоремы 1.

Примем гипотезу $R[\zeta(s)]$ и обозначим через $\rho_k=\frac{1}{2}+it_k$ нули $\zeta(s)$, нумеруемые, считая кратность, положительными числами k при $t_k>0$ и отрицательными при $t_k<0$. Для вычисления интеграла

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N}(S(\vartheta,N))^2 e^{2\pi i\vartheta N}\,d\vartheta$$

надо выразить $S(\vartheta,N)$ через нули $\zeta(s)$.

Полагая $x=\frac{1}{N}+2\pi i\vartheta$, имеем [см. ([1]), ([2])]:

$$S(\vartheta,N)=\frac{1}{x}-\sum_{\rho_k}x^{-\rho_k}+O(\ln^3 N). \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\sum_{\rho_k}x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)=S_1(\vartheta,N). \tag{4.2}$$

Тогда

$$x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)=|x|^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\,e^{\frac{\pi}{2}t_k}\,e^{-t_k\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\vartheta}}\,e^{-i\beta_k\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\vartheta}\right)}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_1=\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N}[S(\vartheta,N)]^2 e^{2\pi i\vartheta N_1}\,d\vartheta.$$

Имеем:

$$J_1 = \int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} \frac{1}{x^2} e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta + R,$$

где

$$|R| \leqslant 2 \int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta + 2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + O(\ln^6 N),$$

$$U_1 = \sqrt{\int_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{|x|^2} \int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta},$$

$$U_2 = \sqrt{\int_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{|x|^2} \ln^6 N},$$

$$U_3 = \sqrt{\int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ln^6 N}.$$

§ 5

Разобьем

$$S_1(\vartheta, N) = -\sum_{\rho_k} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k)$$

на сумму

$$S_1(\vartheta, N) = S_2(\vartheta, N) + S_3(\vartheta, N),$$

где $S_2(\vartheta, N)$ содержит сумму по таким корням ρ_k, у которых $t_k \geqslant 0$, а $S_3(\vartheta, N)$ — по таким, у которых $t_k < 0$. Далее, разбивая интеграл $\int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta$ на сумму интегралов

$$\int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta = \int_0^{\frac{4}{N}} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta + \int_{\frac{4}{N}}^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta,$$

получим:

$$J = \int_{\frac{4}{N}}^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \leqslant \frac{1}{2} \int_{\frac{4}{N}}^{\varkappa_N} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta + \frac{1}{2} \int_{\frac{4}{N}}^{\varkappa_N} |S_3(\vartheta, N)|^2 d\vartheta. \tag{5.1}$$

Последние два интеграла будем оценивать порознь, разбив их на части вида:

$$\int_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}}, \quad \text{где} \quad \frac{\varkappa_N}{2^r} \geqslant \frac{4}{N}.$$

Рассмотрим один из таких интегралов:

$$\int\limits_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\frac{\varkappa N}{2^{r-1}}} |S_2(\vartheta, N)|^2 \, d\vartheta. \tag{5.2}$$

Пусть

$$\rho_{k_1} = \beta_{k_1} + it_{k_1} \text{ и } \rho_{k_2} = \beta_{k_2} + it_{k_2}$$

— два входящих в сумму члена. Так как

$$x = \frac{1}{N} + 2\pi i\vartheta,$$

то получаем:

$$\int\limits_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\frac{\varkappa N}{2^{r-1}}} x^{-\rho_{k_1}} \overline{x^{-\rho_{k_2}}} \, \Gamma(\rho_{k_1}) \Gamma(\overline{\rho}_{k_2}) \, d\vartheta =$$

$$= \Gamma(\rho_{k_1}) \Gamma(\overline{\rho}_{k_2}) \, e^{-\frac{\pi}{2}(t_{k_1}+t_{k_2})} e^{-i\frac{\pi}{2}(\beta_{k_1}-\beta_{k_2})} \int\limits_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\frac{\varkappa N}{2^{r-1}}} \varphi_1(\vartheta) \varphi_2(\vartheta) \, d\vartheta,$$

где

$$\varphi_1(\vartheta) = e^{-(t_{k_1}+t_{k_2}) \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\vartheta}} e^{i(\beta_{k_1}-\beta_{k_2}) \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\vartheta}},$$

$$\varphi_2(\vartheta) = |x|^{-\rho_{k_1} - \overline{\rho}_{k_2}},$$

или, полагая

$$\int\limits_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\vartheta} \varphi_2(\vartheta) \, d\vartheta = \Phi(\vartheta),$$

находим:

$$\int\limits_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\frac{\varkappa N}{2^{r-1}}} \varphi_1(\vartheta) \varphi_2(\vartheta) \, d\vartheta = \int\limits_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\frac{\varkappa N}{2^{r-1}}} \varphi_1(\vartheta) \, d\Phi(\vartheta) =$$

$$= \varphi_1(\vartheta) \Phi(\vartheta) \Bigg|_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\frac{\varkappa N}{2^{r-1}}} - \int\limits_{\frac{\varkappa N}{2^r}}^{\frac{\varkappa N}{2^{r-1}}} \Phi(\vartheta) \varphi_1'(\vartheta) \, d\vartheta.$$

Положим $\Phi = \sup|\Phi(\vartheta)|$ в указанных пределах; тогда, ввиду того, что t_{k_1} и $t_{k_2} > 0$, наш интеграл не будет превосходить выражения:

$$\Phi\cdot\left[2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}\frac{2^r}{2\pi N\varkappa_N}}+\int\limits_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\vartheta}}\cdot\frac{t_{k_1}+t_{k_2}+1}{1+\frac{1}{(2\pi N\vartheta)^2}}\cdot\frac{d\vartheta}{2\pi N\vartheta^2}\right].$$

Если $t_{k_1}+t_{k_2}\leqslant 1$, то это выражение не превосходит

$$\Phi\left(2+\frac{2\cdot 2^r}{2\pi N\varkappa_N}\right)\leqslant c_1\Phi.$$

Если же $t_{k_1}+t_{k_2}>1$, то ввиду того что

$$\int\limits_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\vartheta}}\frac{t_{k_1}+t_{k_2}+1}{1+\frac{1}{(2\pi N\vartheta)^2}}\frac{d\vartheta}{2\pi N\vartheta^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\vartheta}}\cdot\frac{t_{k_1}+t_{k_2}}{1+\frac{1}{(2\pi N\vartheta)^2}}\frac{d\vartheta}{2\pi N\vartheta^2}=$$

$$=2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\vartheta}}\Bigg|_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}}\leqslant 2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}\frac{2^{r-1}}{2\pi N\varkappa_N}},$$

найдем, что наш интеграл не будет превосходить

$$\Phi\cdot 2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}\frac{2^r}{2\pi N\varkappa_N}}.$$

Далее, имеем:

$$\Phi(\vartheta)=\int\limits_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\vartheta}|x|^{-\rho_{k_1}-\bar\rho_{k_2}}d\vartheta=\int\limits_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\vartheta}\left(\sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\vartheta^2}\right)^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-i(t_{k_1}-t_{k_2})}d\vartheta.$$

Положим

$$u=\sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\vartheta^2},\quad \vartheta=\frac{1}{2\pi}\sqrt{u^2-\frac{1}{N^2}};$$

тогда найдем, что интеграл (по второй теореме о среднем значении) будет равен:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\vartheta}u^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-i(t_{k_1}-t_{k_2})}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{N^2u^2}}}.$$

Здесь

$$u=\sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\vartheta^2}>\sqrt{\frac{1}{N^2}+\frac{4\pi^2\cdot 16}{N^2}}>\frac{4}{N}.$$

Ввиду этого, по второй теореме о среднем значении,

$$\Phi = \sup_{\frac{\varkappa_N}{2^r} \leqslant \vartheta < \frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}} |\Phi(\vartheta)| \leqslant 2 \sup \left| \int_{\vartheta = \frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\vartheta} u^{-\beta_{k_1} - \beta_{k_2} - i(t_{k_1} - t_{k_2})} du \right|.$$

При ϑ, меняющемся в пределах от $\frac{\varkappa_N}{2^r}$ до $\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}$, u не выходит из пределов $\frac{\varkappa_N}{2^{r+1}}$, $\frac{\varkappa_N}{2^r}$, поэтому искомый supremum не превосходит

$$\min \left\{ \frac{\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{-\beta_{k_1} - \beta_{k_2} + 1}}{|1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}| + |t_{k_1} - t_{k_2}|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}} \right\}.$$

Далее, учитывая, что при $t_{k_1} \geqslant 0$

$$\Gamma(\rho_{k_1}) e^{\frac{\pi}{2} t_{k_1}} = O\left(|t_{k_1} + 1|^{\beta_{k_1} - \frac{1}{2}}\right),$$

а при $t_{k_1} < 0$

$$\Gamma(\rho_{k_1}) e^{\frac{\pi}{2} t_{k_1}} = O(|t_{k_1}| + 1)^{\beta_{k_1} - \frac{1}{2}} e^{-\pi |t_{k_1}|},$$

получаем:

$$\int_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \leqslant \sum_{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}} |t_{k_1} + 1|^{\beta_{k_1} - \frac{1}{2}} \cdot |t_{k_2} + 1|^{\beta_{k_2} - \frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \min \left\{ \frac{\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{-\beta_{k_1} - \beta_{k_2} + 1}}{|1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}| + |t_{k_1} - t_{k_2}|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}} \right\} \cdot e^{-(t_{k_1} + t_{k_2}) \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N \frac{\varkappa_N}{2^r}}}. \tag{5.3}$$

Для $S_3(\vartheta, N)$, где t_{k_1} и $t_{k_2} < 0$, получим совершенно аналогично:

$$\int_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}} |S_3(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \leqslant \sum_{\substack{\rho_{k_1}, \rho_{k_2} \\ t_{k_1}, t_{k_2} < 0}} (|t_{k_1}| + 1)^{\beta_{k_1} - \frac{1}{2}} (|t_{k_2}| + 1)^{\beta_{k_2} - \frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot e^{-\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N \frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}}\right)(|t_{k_1}| + |t_{k_2}|)} \cdot \min \left\{ \frac{\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}}}{|1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}| + |t_{k_1} - t_{k_2}|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1 - \beta_{k_1} - k_2} \right\}. \tag{5.4}$$

Окончательно находим:

$$\int\limits_{\frac{4}{N}}^{\varkappa N} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll \sum_r \sum_{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}} (t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}} (t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \min\left\{\frac{\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\} \cdot e^{-(t_{k_1}+t_{k_2}) \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N \frac{\varkappa_N}{2^r}}}, \quad (5.5)$$

$$\int\limits_{\frac{4}{N}}^{\varkappa N} |S_3(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll \sum_r \sum_{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}} (|t_{k_1}|+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}} \cdot (|t_{k_2}|+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \min\left\{\frac{\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N \frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}}\right)(|t_{k_1}|+|t_{k_2}|)} \quad (5.6)$$

§ 6

Введем теперь риманову гипотезу $R[\zeta(s)]$ и посмотрим, к чему она приводит в отношении J_1 и J_2. В этом случае $\beta_k = \frac{1}{2}$ и, таким образом,

$$|S_2(\vartheta, N)| \ll \sum_{\rho_k} \left|\frac{1}{N} + 2\pi i\vartheta\right|^{-1/2} |\Gamma(\rho_k)| \, e^{\frac{\pi}{2} t_k} \cdot e^{-t_k \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\vartheta}}. \quad (6.1)$$

Ввиду того что между T и $T+1$ в критической полосе лежит $O(\ln(|T|+1))$ нулей $\zeta(s)$, легко находим из (6.1):

$$S_1(\vartheta, N) \ll \left(\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\vartheta^2\right)^{-\frac{1}{4}} (N\vartheta+1) \ln(N\vartheta+2).$$

Иначе: при $\vartheta > \frac{4}{N}$ $\quad S_1(\vartheta, N) \ll N\vartheta^{\frac{1}{2}} \ln N,$ $\quad$ а при $0 < \vartheta < \frac{4}{N}$

$$S_1(\vartheta, N) \ll N^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда выводим:

$$\int\limits_0^{\frac{4}{N}} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll 1.$$

Далее, оценка (5.5) дает:

$$\int\limits_{\frac{4}{N}}^{\varkappa N} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll$$

$$\ll \sum_r \sum_{\substack{\rho_{k_1}, \rho_{k_2} \\ t_{k_1}>0,\, t_{k_2}>0}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2}) \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N \frac{\varkappa_N}{2^r}}} \cdot \min\left\{\frac{1}{|t_{k_1}-t_{k_2}|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}. \quad (6.2)$$

Ввиду указанной выше оценки для числа нулей $\zeta(s)$, получаем:

$$\int\limits_{\frac{4}{N}}^{\varkappa_N} |S_2(\vartheta, N)|^2 \, d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_r \sum_{k_1, k_2 = 2}^{\infty} \ln k_1 \cdot \ln k_2 \cdot e^{-(k_1+k_2)\operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N \frac{\varkappa_N}{2^r}}} \cdot \min\left\{\frac{1}{|k_1 - k_2|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_r \ln^2 N \cdot \ln N \cdot N \frac{\varkappa_N}{2^r} \leqslant N\varkappa_N \ln^3 N. \tag{6.3}$$

§ 7

Для $S_3(\vartheta, N)$ без труда находим такую же оценку, и, соединяя оценки типа (6.2) и (6.3), получаем основную оценку:

$$\int\limits_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 \, d\vartheta \leqslant N\varkappa_N \ln^3 N + 1. \tag{7.1}$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{|x|^2} = \int\limits_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\vartheta^2}.$$

Легко подсчитать, что при всех $\varkappa_N$ этот интеграл $\leqslant N$ равномерно по $\varkappa_N$. Отсюда имеем при $\varkappa_N > \frac{4}{N}$:

$$U_1 \leqslant \sqrt{N.N\varkappa_N \ln^3 N} = N\varkappa_N^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{3}{2}} N,$$

$$U_2 \leqslant \sqrt{N} \ln^3 N,$$

$$U_3 \leqslant \sqrt{N\varkappa_N \ln^3 N.\ \ln^6 N} \leqslant \sqrt{N}.$$

Окончательно это дает:

$$J_1 = \int\limits_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} \frac{1}{x^2} e^{2\pi i\vartheta N_1} \, d\vartheta + R_1,$$

$$|R_1| \leqslant N\varkappa_N \ln^3 N.$$

§ 8

Найдем асимптотическое выражение интеграла J_1:

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{N} + 2\pi i\vartheta\right)^2} e^{2\pi i\vartheta N_1} \, d\vartheta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{N} + 2\pi i\vartheta\right)^2} e^{2\pi i\vartheta N_1} \, d\vartheta + O\left(\frac{1}{\varkappa_N}\right).$$

Написанный интеграл легко вычисляется при помощи теории вычетов и оказывается равным $N_1 e^{-\frac{N_1}{N}}$, так что

$$J_1 = N_1 e^{-\frac{N_1}{N}} + O\left(\frac{1}{\varkappa_N}\right). \quad (8.1)$$

§ 9

Рассмотрим уравнение $|p + p' - N| \leqslant H$, где $H = (\ln N)^{3+\varepsilon_0}$, ε_0 — любое фиксированное число. Число решений такого уравнения совпадает с числом решений уравнения $p + p' = N + x$, где x пробегает целые числа: $-H \leqslant x \leqslant H$. Полагая, как и раньше,

$$Q(N_1) = \sum_{p+p'=N_1} \ln p \ln p',$$

имеем:

$$Q(N_1) = e \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta + O\left(N^{\frac{3}{4}} \ln^4 N\right).$$

Пусть $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{H}{2} = H_1$, где $r = 2\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1$. Обозначим

$$T(\vartheta) = \sum_{0 \leqslant x_j \leqslant H_1} e^{2\pi i \vartheta x_j}$$

и рассмотрим при числах N_1, пробегающих выражения $N + x$:

$$\sum_{N_1} Q(N_1) = e \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\vartheta, N))^2 (T(\vartheta))^r e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta =$$

$$= e \int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} (S(\vartheta, N))^2 \cdot (T(\vartheta))^r e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta +$$

$$+ e\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\varkappa_N} + \int_{\varkappa_N}^{\frac{1}{2}} ((S(\vartheta, N))^2 \cdot (T(\vartheta))^r e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta\right).$$

Заметим, что $T(\vartheta) \leqslant \frac{1}{\vartheta}$ и что при $\vartheta \in \left[\varkappa_\nu, \frac{1}{2}\right]$

$$T(\vartheta) \leqslant \frac{1}{\varkappa_N}.$$

Положим $\varkappa_N = (\ln N)^{-3-\frac{\varepsilon_0}{2}}$; тогда для нашего сегмента получим:

$$|T(\vartheta)| \leqslant \frac{1}{\varkappa_N} \leqslant \frac{H}{(\ln N)^{\varepsilon_0/2}},$$

$$|T(\vartheta)|^r \leqslant \frac{H^r}{(\ln N)^{\varepsilon_0 \cdot \frac{r}{2}}} \leqslant \frac{H^r}{\ln^2 N}.$$

Отсюда следует:

$$\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{-\varkappa_N} + \int\limits_{\varkappa_N}^{\frac{1}{2}} |S(\vartheta)|^2 \cdot |T(\vartheta)|^r \, d\vartheta\right) \leqslant \frac{H^r}{\ln^2 N} \cdot \int\limits_0^1 |S(\vartheta)|^2 \, d\vartheta.$$

Ввиду тривиальной оценки

$$\int\limits_0^1 |S(\vartheta)|^2 \, d\vartheta \leqslant N \ln N,$$

находим для наших интегралов оценку $\frac{H^r N}{\ln N}$. Отсюда следует:

$$\sum_{N_1} Q(N_1) = e \sum_{N_1} \int\limits_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} (S(\vartheta))^2 e^{2\pi i \vartheta N_1} \, d\vartheta + B \frac{H^r N}{\ln N},$$

где B — ограниченная величина, не всегда одна и та же. Согласно предыдущему,

$$\sum_{N_1} Q(N_1) = eN \sum_{N_1} e^{-\frac{N_1}{N}} + BN \sum_{N_1} \varkappa_N \ln^3 N + B \cdot \frac{H^r N}{\ln N},$$

$$N_1 = N + x_1 + \cdots + x_r, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{H}{r}.$$

Имеем:

$$\sum_{N_1} \varkappa_N \ln^3 N = \sum_{N_1} \frac{1}{(\ln N)^{\frac{\varepsilon_0}{2}}} \leqslant \frac{H^r}{(\ln N)^{\frac{\varepsilon_0}{2}}},$$

$$cN \sum_{N_1} e^{-\frac{N_1}{N}} > c_0 H^r N \quad (c_0 > 0 \text{ — константа}).$$

Таким образом,

$$\sum Q(N_1) > \frac{c_0}{2} H^r N$$

при достаточно большом N, что и доказывает разрешимость уравнения

$$|p + p' - N| \leqslant H \qquad \text{при } H = (\ln N)^{3+\varepsilon_0}.$$

Несколько усложнив доказательство, можно было бы вывести асимптотическую формулу для совокупного числа решений уравнений $|p + p' - N| \leqslant H$, но мы этот вывод опускаем.

§ 10

Посмотрим, что дает замена римановой гипотезы $R[\zeta(s)]$ на плотностную теорему или гипотезу о числе нулей $\zeta(s)$: $D[\zeta(s),\ N(T,\nu)]$.

Число нулей $\zeta(s)$ при $|t|\leqslant T$, $\frac{1}{2}+\nu\leqslant\sigma\leqslant 1$ не превосходит

$$N(T,\nu)\leqslant T^{1-\varphi(\nu)}\ln^2 T, \tag{10.1}$$

где $r\geqslant 1$ — константа. Желая дать оценку для интеграла

$$\int_0^{\varkappa_N}|S_1(\vartheta,N)|^2\,d\vartheta,$$

обратимся к выражению:

$$\int_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}}|S_2(\vartheta,N)|^2\,d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\rho_{k_1},\rho_{k_2}}(t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}}e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\pi N\frac{\varkappa_N}{2^r}}}\cdot$$

$$\cdot\min\left\{\frac{\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\ \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}.$$

Разобьем полосу $\left[\frac{1}{2},1\right]$ на вертикальные полосы толщиной $\frac{1}{\ln^2 N}$ в количестве $\leqslant\ln^2 N$; обозначим их через $S_1,\ldots,S_R$, где $R\leqslant\ln^2 N$. Тогда

$$\int_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}}|S_2(\vartheta,N)|^2\,d\vartheta\leqslant\ln^2 N\sum_{k=1}^{R}\sum_{\rho_{k_1},\rho_{k_2}\in S_k}(t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\pi N\frac{\varkappa_N}{2^r}}}\cdot\min\left\{\frac{\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta'_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\ \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}, \tag{10.2}$$

где суммирование идет по ρ_{k_1} и ρ_{k_2} в полосе S_u. Пусть в полосе S_u имеем

$$\frac{1}{2}+\nu\leqslant\beta\leqslant\frac{1}{2}+\nu+\frac{1}{\ln^2 N}.$$

Число нулей ρ_{k_1} или ρ_{k_2} в этой полосе при $|t|\leqslant T$ будет

$$N(T,\nu)\ll T^{1-\varphi(\nu)}\ln^2 T,$$

поэтому часть суммы (10.2), относящаяся к полосе S_u, будет

$$\leqslant \left(N\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{2\nu}\cdot\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{-2\nu}\cdot N(T,\nu)\ln^2 T\leqslant$$
$$\leqslant N^{2\nu}\cdot\left(N\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\varphi(\nu)}\ln^{r+2}N.$$

Эта оценка действует при $\nu\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{(\ln N)^{\frac{10}{11}}}$, а при $\nu>\frac{1}{2}-\frac{1}{(\ln N)^{\frac{10}{11}}}$ соответствующая сумма пуста [см. (3)]. Мы видим, что если для всех полос

$$N^{2\nu}\cdot\left(N\cdot\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\varphi(\nu)}\leqslant\frac{N}{\ln^{r+6}N},$$

то

$$\int\limits_{\frac{\varkappa_N}{2^r}}^{\frac{\varkappa_N}{2^{r-1}}}|S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \text{ будет } \leqslant\frac{N}{\ln^2 N}.$$

Таким образом, нам достаточно неравенства

$$N^{1+2\nu-\varphi(\nu)}\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\varphi(\nu)}\leqslant\frac{N}{\ln^{r+6}N}$$

или

$$\varkappa_N\leqslant\frac{1}{(\ln N)^{\frac{r+6}{1-\varphi(\nu)}}}\cdot\frac{1}{N^{\frac{2\nu-\varphi(\nu)}{1-\varphi(\nu)}}}$$

для $0\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{(\ln N)^{\frac{10}{11}}}$. Если $\varphi(\nu)<2\nu$, то минимальное $\varkappa_N$ получается при максимуме выражения $\frac{1-2\nu}{1-\varphi(\nu)}$. Если же $\varphi(\nu)\geqslant 2\nu$, то минимальное $\varkappa_N$ получается при $\nu=0$. В частности, если $\varphi(\nu)=2\nu$, то достаточно взять

$$\varkappa_N=\frac{1}{(\ln N)^{r+6}}.$$

Для $S_3(\vartheta, N)$ получается аналогичная оценка; используя ее так же как при доказательстве теоремы 2, мы докажем теорему 3.

§ 11

Пусть при заданном N q — целое число, $1\leqslant q\leqslant N$, M — возрастающая функция N, для которой $qM\leqslant\frac{N}{\ln N}$, N_1 — целое число, $N_1\leqslant 2N$. Примем риманову гипотезу $R[L(s,\chi_q)]$ относительно всех рядов $L(s,\chi_q)$ по модулю q и посмотрим, что она дает в отношении вычисления интеграла

$$J_q(N_1)=\sum_{(a,q)=1}\int\limits_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}}\left(S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right)^2 e^{2\pi i N_1\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)}d\alpha. \tag{11.1}$$

Полагая

$$A_\chi(\alpha) = \sum_n \chi(n)\,\Lambda(n)\,e^{-\frac{n}{N}}\,e^{-2\pi i \alpha n},$$

где χ — какой-либо характер $(\mathrm{mod}\,q)$ (который может быть и непримитивным), найдем [см. (2)] при $\vartheta = \frac{a}{q} + \alpha$:

$$S(\vartheta) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \chi(a)\,\overline{\tau}_\chi\,A_\chi(\alpha) + B \ln q,$$

где

$$\tau_\chi = \sum_{l \bmod q} \chi(l)\,e^{\frac{2\pi i l}{q}}.$$

Отсюда:

$$J_q(N_1) = \frac{1}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,\,q)=1} \sum_{\chi,\,\chi_1} \chi(a)\,\chi_1(a)\,\overline{\tau}_\chi\,\overline{\tau}_{\chi_1}\,e^{\frac{2\pi i N_1 l}{q}} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} A_\chi(\alpha)\,A_{\chi_1}(\alpha)\,e^{2\pi i N_1 \alpha}\,d\alpha + B \ln^2 q \sqrt{N}. \qquad (11.2)$$

Далее, имеем [см. (2)]:

$$|\overline{\tau}_\chi| = \begin{cases} \mu^2\left(\frac{q}{Q}\right)\sqrt{Q}, & \text{если } \left(Q,\ \frac{q}{Q}\right) = 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Выделяя главный характер χ_0, для которого $\overline{\tau}_\chi = \mu(q)$, приходим к формуле:

$$J_q(N_1) = J_q^{(0)}(N_1) + J_q^{(1)}(N_1) + J_q^{(2)}(N_1) + B \ln^2 q \cdot \sqrt{N},$$

где

$$J_q^{(0)}(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{(\varphi(q))^2} \int_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} (A_{\chi_0}(\alpha))^2 e^{2\pi i N_1 \alpha}\,d\alpha,$$

$$J_q^{(1)}(N_1) = 2\,\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,\,q)=1} e^{\frac{2\pi i N_1 a}{q}} \cdot {\sum_\chi}' \chi(a)\,\overline{\tau}_\chi \cdot$$

$$\cdot \int_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} A_{\chi_0}(\alpha)\,A_\chi(\alpha)\,e^{2\pi i N_1 \alpha}\,d\alpha,$$

$$J_q^{(2)}(N_1) = \frac{1}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,\,q)=1} e^{\frac{2\pi i N_1 a}{q}} \cdot$$

$$\cdot {\sum_{\chi,\,\chi_1}}' \chi(a)\,\chi_1(a)\,\overline{\tau}_\chi\,\overline{\tau}_{\chi_1} \cdot \int_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} A_\chi(\alpha)\,A_{\chi_1}(\alpha)\,e^{2\pi i N_1 \alpha}\,d\alpha.$$

Здесь штрихи при суммах означают выпуск главного характера. При этом имеем [см. ([2])]:

$$J_q^{(1)}(N_1) \leqslant \frac{1}{(\varphi(q))^2} \int\limits_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} d\alpha \sum_{(a,\,q)=1} \left| \sum_{\chi,\,\chi_1}' \chi(a)\,\chi_1(a)\,\bar{\tau}_\chi\,\bar{\tau}_{\chi_1} \cdot A_\chi(\alpha)\,A_{\chi_1}(\alpha) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\varphi(q))^2} \int\limits_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} d\alpha \sum_{(a,\,q)=1} \left| \sum_{\chi}' \chi(a)\,\bar{\tau}_\chi\,A_\chi(\alpha) \right|^2 \leqslant \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}' \int\limits_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} |A_\chi(\alpha)|\,|A_\chi(\alpha)|\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}' \int\limits_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} |A_\chi(\alpha)|^2\,d\alpha.$$

Обозначая через $\rho_\chi = \frac{1}{2} + it_k$ нули $L(s, \chi)$ (мы приняли гипотезу $R[L(s, \chi_q)]$) и полагая $x = \frac{1}{N} + 2\pi i\alpha$, получим, как раньше:

$$A_\chi(\alpha) = \frac{E(\chi)}{x} - \sum_{\rho_\chi} \chi^{-\rho_\chi}\,\Gamma(\rho_\chi) + O(\ln^3 N).$$

Вычисления, совершенно аналогичные проведенным в § 5—7 [см. также ([2])], приведут нас к оценкам:

$$\left| J_q^{(1)}(N_1) + J_q^{(2)}(N_1) \right| \leqslant \frac{N}{M} \ln^4 N, \tag{11.3}$$

$$J_q^{(0)}(N_1) = \frac{N_1}{e} \frac{\mu^2(q)}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,\,q)=1} e^{\frac{2\pi i N_1 a}{q}} (1 + o(1)). \tag{11.4}$$

§ 12

Мы можем теперь доказать теорему о том, что в условиях гипотезы $R[L(s, \chi_q)]$ уравнение $p + p' = N + qh$ разрешимо при $1 \leqslant q \leqslant \frac{N}{\ln^6 N}$ и $0 \leqslant h \leqslant H$, где $H = \ln^6 N$. Для доказательства заметим, что число решений нашего уравнения равно:

$$J_0 = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (S(\vartheta, N))^2\,T(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}\,d\vartheta,$$

где

$$T(\vartheta) = \sum_{h \leqslant H} e^{2\pi i q h \vartheta}.$$

При $\left| \vartheta - \frac{a}{q} \right| \geqslant \frac{1}{qM}$, где $M = (\ln N)^{4,5}$, имеем:

$$|T(\vartheta)| < \frac{1}{((q\vartheta))} < M = \frac{H}{(\ln N)^{1,5}},$$

поэтому

$$J_0=\sum_{a=0}^{q-1}\int\limits_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}}\left(S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right)^2 T\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)e^{2\pi iN\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)}d\alpha=$$

$$=\sum_{q_1|q}\sum_{(a,q_1)=1}\int\limits_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}}\left(S\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)\right)^2 T\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)e^{2\pi iN\left(\frac{a}{q_1}+\alpha\right)}d\alpha+O\left(\frac{NH}{\ln^{1,5}N}\right).$$

При этом для $q_1=1$ допускается значение $a=0$. Полагая $N_1=N+qh$, получим:

$$J_0=\sum_{q_1|q}\sum_{N_1}\frac{N_1}{e}\frac{\mu^2(q_1)}{(\varphi(q_1))^2}\sum_{(a,q_1)=1}e^{\frac{2\pi iN_1a}{q_1}}+B\sum_{N_1}\frac{N_1\ln^4 N}{M}+B\frac{NH}{\ln^{1,5}N}=$$

$$=\frac{1}{e}\sum_{N_1}N_1\sum_{q_1|q}\frac{\mu^2(q_1)}{(\varphi(q_1))^2}\sum_{(a,q_1)=1}e^{\frac{2\pi iNa}{q_1}}+B\frac{NH}{\ln N}.$$

Далее, имеем:

$$\sum_{q_1|q}\frac{\mu^2(q_1)}{(\varphi(q_1))^2}\sum_{(a,q_1)=1}e^{\frac{2\pi iNa}{q_1}}=S(N)=\prod_{p|q}(1+\Psi_N(p)),$$

где $\Psi_N(p)=\frac{1}{p-1}$, если p/N, и $\Psi_N(p)=-\frac{1}{(p-1)^2}$, если p не делит N. Будем считать, что N четно, если q четно. Тогда наша сумма будет равна

$$\sum_{N_1}\frac{N_1}{e}S(N)+B\frac{NH}{\ln N},$$

где

$$S(N)>c_0\prod_{p/N}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

Ввиду этого, наша сумма больше cN_1H, и уравнение имеет решения

Итак, если $Q\leqslant\frac{N}{\ln^6 N}$, то, принимая гипотезу $R[L(s,\chi Q)]$, можно утверждать разрешимость сравнения $p+p'-N\equiv 0\pmod Q$, если только N четно при четном Q. В частности, если верна расширенная гипотеза Римана, то такие сравнения разрешимы для любого $Q\leqslant\frac{N}{\ln^6 N}$. Это доказывают теоремы 4 и 5.

§ 13

Примем расширенную гипотезу Римана и посмотрим, к чему она приводит.

Если каждое $\alpha\in[0,1]$ мы изобразим в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q\tau},\quad q\leqslant\tau,\quad \ln^6 N\leqslant\tau\leqslant\sqrt{N},$$

то получим, согласно предыдущему,

$$J_q(N) = \sum_{(a, q)=1} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left(S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right)^2 e^{2\pi i N\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)}\, d\alpha =$$

$$= \frac{N}{e} \frac{\mu^2(q)}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a, q)=1} e^{\frac{2\pi i N a}{q}} + B\frac{N \ln^4 N}{\tau}. \tag{13.1}$$

Этих выражений, однако, недостаточно для подсчета интеграла

$$\int_0^1 (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i N\vartheta}\, d\vartheta,$$

так как остаточный член (13.1) $\frac{BN\ln^4 N}{\tau}$ не выдерживает суммирования по $q \leqslant \tau$.

(Заметим, что затруднения, связанные с тем, что интервалы интегрирования могут перекрываться при $q \geqslant \frac{\tau}{4}$, можно обойти и можно ставить вопрос о сложении наших интегралов при $q \leqslant \tau$.)

В противоположность аддитивным задачам типа «не бинарного», может оказаться, что основное значение будут иметь слагаемые с большими q, а слагаемые с малыми q не будут существенны.

Для примера рассмотрим ту же бинарную проблему Гольдбаха:

$$p + p' = 2N.$$

Пусть N — простое число, $X_N(n)$ — какой-либо неглавный характер по модулю N и $\overline{X}_N(n)$ — сопряженный характер. Мы получим:

$$Q(2N) = \sum_{n+n'=2N} \Lambda(n)\Lambda(n') = X_N(-1) \sum_{n+n'=2N} X_N(n)\Lambda(n)\overline{X}_N(n')\Lambda(n').$$

Введем сумму

$$S(\vartheta, N, X_N) = \sum_{n\geqslant 2} X_N(n)\Lambda(n) e^{-2\pi i\vartheta n} e^{-\frac{n}{N}}.$$

Тогда интересующее нас количество будет равно:

$$Q(2N) = e^2 X_N(-1)\cdot \int_0^1 S(\vartheta, N, X_N)\cdot S(\vartheta, N, \overline{X}_N) e^{2\pi i N\vartheta}\, d\vartheta.$$

Положим $\tau = \sqrt{N}$ и произведем разбиение $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$, $q \leqslant \tau$. Если мы примем расширенную гипотезу Римана и учтем, что все ряды $L(s, \chi_q X_N)$ и $L(s, \chi_q \overline{X}_N)$ суть ряды с характерами неглавными, то, согласно предыдущему, найдем:

$$\sum_{(a, q)=1} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S\left(\frac{a}{q}+\alpha, N, X_N\right)\cdot S\left(\frac{a}{q}+\alpha, N, \overline{X}_N\right) e^{2\pi i N\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)}\, d\alpha = B\frac{N\ln^4 N}{\tau} \tag{13.2}$$

для всех $q \leqslant \tau$ (включая $q = 1$). Это показывает, что суммирование по $q \leqslant \frac{\tau}{\ln^6 N}$, давая член порядка $\frac{N}{\ln N}$, не дает существенного вклада, и главную роль должны играть большие q, суммирование по которым должно дать величину порядка N.

Поступило
26. V. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Линник Ю. В., Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарных задач с простыми числами, Доклады Ак. Наук, СССР, т. LXXVII, № 2 (1951), 15—18.

[2] Линник Ю. В., Простые числа и степени двойки, Труды Мат. института Ак. Наук им. В. А. Стеклова, т. XXXVIII (1951), 152—169.

[3] Чудаков Н. Г., О разности двух соседних простых чисел, Мат. сборник, т. I (43), № 6 (1936), 799—814.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

16 (1952), 521—524

М. А. ЕВГРАФОВ

ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ ДЛЯ РЯДОВ, ИМЕЮЩИХ ПРОПУСКИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе выясняются условия, при выполнении которых для функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, аналитической при $|z|<1$, имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{n_k} a_n = f(1).$$

Здесь $\{n_k\}$ — бесконечная последовательность целых чисел и $a_n=0$ при $n_k<n\leqslant n_k(1+\lambda)$.

Мы будем пользоваться обозначениями:

$$\sigma_n=\sigma_n(u_n)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k, \qquad S_n=S_n(u_n)=\sum_{k=0}^{n} u_k,$$

причем, если это не сможет вызвать недоразумения, будем пользоваться первым обозначением.

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты:

1°. Если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ аналитична при $|z-z_0|<r$ и непрерывна при $|z-z_0|\leqslant r$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(a_n r^n e^{in\theta}) = f(z_0+re^{i\theta}). \; *$$

2°. Если $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s$ и $|S_n-S_{n_k}|<e^{-\delta n}$ при $n_k<n\leqslant n_k(1+\lambda)$, ($\{n_k\}$ — некоторая бесконечная последовательность целых чисел), то

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}=s.$$

Доказательство. Положим $m_k=n_k(1+\lambda)$. Имеем:

$$(m_k+1)\sigma_{m_k}-(n_k+1)\sigma_{n_k}=\sum_{n=n_k+1}^{m_k} S_n=(m_k-n_k)S_{n_k}+O(m_k e^{-\delta n_k})$$

или

$$S_{n_k}=\frac{(m_k+1)\sigma_{m_k}-(n_k+1)\sigma_{n_k}}{m_k-n_k}=s+\frac{m_k+1}{m_k-n_k}(\sigma_{m_k}-s)-$$
$$-\frac{n_k+1}{m_k-n_k}(\sigma_{n_k}-s)+O(e^{-\delta n_k})=s-o(1).$$

---

* См. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, М.—Л., 1939, стр. 51.

3°. Пусть $0<x<1$. Тогда имеют место оценки:

$$A_{n,k}=(1-x)^n\cdot x^k\cdot\binom{n+k}{k}<e^{-\delta(\lambda,x)\cdot(n+k)}\quad\text{при}\quad\begin{cases}k<m(1-\lambda),\\ k>m(1+\lambda),\end{cases}$$

$$m=\frac{nx}{1-x},\quad \lambda>0.$$

Доказательство. При $k<m$ $A_{n,k}$ является возрастающей функцией от k, при $k>m$ — убывающей, поэтому при $k<m(1-\lambda)$

$$A_{n,k}<A_{n,m(1-\lambda)}<x^{n+m(1-\lambda)}\left(\frac{n}{m}\right)^n\cdot\frac{[n+m(1-\lambda)]^{n+m(1-\lambda)}}{n^n\cdot[m(1-\lambda)]^{m(1-\lambda)}}=$$

$$=x^{n+m(1-\lambda)}\left[\frac{n+m(1-\lambda)}{m(1-\lambda)}\right]^{n+m(1-\lambda)}\cdot(1-\lambda)^n=\left\{(1-\lambda\left(\frac{1-\lambda x}{1-\lambda}\right)^{\frac{1-\lambda x}{1-x}}\right\}^n=e^{-\delta_1(\lambda,x)\cdot n},$$

так как функция $\psi(x)=(1-\lambda x)^{\frac{1-\lambda x}{1-x}}$ при $0<x<1$ убывающая. Точно так же, при $k>m(1+\lambda)$

$$A_{n,k}<\left\{(1+\lambda)\left(\frac{1+\lambda x}{1+\lambda}\right)^{\frac{1+\lambda}{1-x}}\right\}^n\cdot\left\{\frac{A_{n,m(1+\lambda)+1}}{A_{n,m(1+\lambda)}}\right\}^{k-m(1+\lambda)}=e^{-\delta_2(\lambda,x)\cdot(n+k)}.$$

Полагая

$$\delta(\lambda,x)=\min\left\{\frac{n\delta_1(\lambda,x)}{n+m},\ \delta_2(\lambda,x)\right\},$$

получаем требуемую оценку. Теперь легко может быть доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ — *функция, аналитическая при* $|z|<1$, $\{n_k\}$ — *бесконечная последовательность целых чисел,* $a_n=0$ *при* $n_k<n\leqslant n_k(1+\lambda)$. *Тогда, если* $f(z)$ *непрерывна в круге* $|z-x_0|<1-x_0$ *для какого-нибудь* $0<x_0<1$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{n_k}a_n=f(1)$.

Доказательство. В силу 1°, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n\left[(1-x_0)^n\cdot\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right]=f(1)$.

Но, как нетрудно убедиться,

$$S_n^*=S_n\left[(1-x_0)^n\cdot\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(1-x_0)^n\cdot x_0^k\cdot\binom{n+k}{k}S_{n+k}\qquad(S_n=S_n(a_n)).$$

Так как (вследствие аналитичности $f(z)$ при $|z|<1$)

$$|S_n|<e^{n\delta_n},\quad \lim_{n\to\infty}\delta_n=0,$$

то, в силу 3°, имеет место неравенство:

$$|S_n^*-S_{n_k}|<e^{-n\left[\delta\left(\frac{\lambda}{4},x_0\right)-\delta_n-C\frac{\ln n}{n}\right]}\quad\text{при}\quad\frac{n_k}{1-\frac{\lambda}{4}}<\frac{nx_0}{1-x_0}\leqslant\frac{n_k(1+\lambda)}{1+\frac{\lambda}{4}}.\tag{1}$$

Если мы положим

$$n_k^*=n_k\cdot\frac{1-x_0}{x_0\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)},\quad 1+\lambda_1=(1+\lambda)\cdot\frac{1-\frac{\lambda}{4}}{1+\frac{\lambda}{4}},$$

то будут выполнены условия утверждения 2°. Поэтому, в силу 1°,

$$\lim_{k\to\infty} S^{*}_{n^{*}_k} = f(1)$$

и, вследствие неравенства (1), $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = f(1)$, что и требовалось доказать.

Построим пример, показывающий, что условия теоремы не очень далеки от предельных. А именно, построим функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

регулярную при $|z| < 1$ и удовлетворяющую условиям:

1) $a_n = 0$ при $n_k < n \leqslant n_k(1+\lambda)$, $\{n_k\}$ — бесконечная последовательность целых чисел;

2) $f(z)$ непрерывна в области D, ограниченной справа сторонами угла $|1-z| \leqslant M(1-|z|)$, а слева — дугой окружности $|z| = \rho$ (ρ — любое число, меньшее единицы);

3) $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} \neq f(1)$.

Положим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z),$$

где

$$Q_k(z) = z^{qn'_k}\left[1 - z^{n'_k+1} \sum_{s=0}^{m_k} \binom{n'_k+s}{s}(1-z)^s\right],$$

$$n'_{k+1} > (q+3)\,n'_k, \quad m_k = n'^{\frac{3}{4}}_k, \quad q = M+1, \quad n_{2k} = qn'_k,$$
$$n_{2k+1} = (q+2)\,n'_k.$$

Построенная таким образом функция $f(z)$ будет аналитична при $|z| < 1$, так как несложные оценки показывают, что $a_n = e^{o(n)}$. Выполнение условия 1) очевидно $\left(\lambda = \frac{1}{q+2}\right)$. Условие 3) также выполнено, так как

$$S_{n_{2k}} = \sum_{p=0}^{k-1} Q_p(1) + 1 = 1, \quad S_{n_{2k+1}} = \sum_{p=0}^{k} Q_p(1) = 0$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$ не существует. Остается проверить выполнение условия 2). Для этой цели оценим $Q_k(z)$ в области D'_k, являющейся общей частью круга $|z| \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{n'_k}}$ и угла $|1-z| \leqslant M(1-|z|)$. Имеем:

$$|Q_k(z)| < e^{-q\sqrt{n'_k}}\left[1 + e^{-\sqrt{n'_k}} \sum_{0=s}^{m_k} \binom{n'_k+s}{s} |1-z|^s\right] < e^{-q\sqrt{n'_k}} +$$
$$+ e^{-(q+1)\sqrt{n'_k}} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n'_k+s}{s} |1-z|^s < e^{-q\sqrt{n'_k}} + \frac{e^{-(q+1)\sqrt{n'_k}}}{(1-|1-z|)^{n'_k+1}} <$$
$$< e^{-q\sqrt{n'_k}} + e^{-(q+1-M)\sqrt{n'_k}} < 2e^{-\sqrt{n'_k}}. \quad (2)$$

Затем оценим $Q_k(z)$ в области D_k'', являющейся общей частью кругов $|z| \leqslant 1$, $|1-z| \leqslant \frac{A}{\sqrt{n_k'}}$ (здесь A выбрано так, чтобы часть угла, не попавшая в D_k', вошла в D_k''). Имеем:

$$|Q_k(z)| \leqslant \left| \frac{1}{z^{n_k'+1}} - \sum_{s=0}^{m_k} \binom{n_k'+s}{s} (1-z)^s \right|.$$

Но сумма, стоящая под знаком модуля, является отрезком ряда Тейлора функции $\frac{1}{z^{n_k'+1}}$, а все выражение, стоящее под знаком модуля,— остатком ряда Тейлора этой функции. Как легко видеть, наибольшее значение этого остатка достигается (при фиксированном $|1-z|$) для действительных z. Поэтому

$$|Q_k(z)| < \frac{1}{(1-\rho)^{n_k'+1}} - \sum_{s=0}^{m_k} \binom{n_k'+s}{s} \rho^s = \binom{n_k'+m_k+1}{m_k+1} \cdot \frac{\rho^{m_k+1}}{(1-\theta\rho)^{n_k'+m_k+1}},$$

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{n_k'}}, \quad m_k = n_k'^{\frac{3}{4}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда получаем:

$$|Q_k(z)| < \frac{\rho^{m_k+1}(n_k'+m_k+1)^{n_k'+m_k+1}}{(1-\rho)^{m_k+1} \cdot (n_k')^{n_k'} \cdot (m_k+1)^{m_k+1}} \cdot \frac{1}{(1-\rho)^{n_k'}} <$$

$$< \frac{1}{(m_k+1)^{m_k+1}} \cdot \frac{\rho^{m_k+1} \cdot (n_k'+m_k+1)^{m_k+1}}{(1-\rho)^{m_k+1}} \cdot \frac{1}{(1-\rho)^{n_k'}} \left(1 + \frac{m_k+1}{n_k'}\right)^{n_k'} <$$

$$< e^{-\frac{3}{4} n_k'^{\frac{3}{4}} \ln n_k'} \cdot e^{n_k'^{\frac{3}{4}} \ln \frac{4An_k'}{\sqrt{n_k'}}} \cdot e^{A \cdot n_k'^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{n_k'^{\frac{3}{4}}} < e^{-\gamma n_k'^{\frac{3}{4}}} \quad \text{при } n_k' > N(A). \qquad (3)$$

Таким образом, соединяя оценки (2) и (3), получаем, что в сумме областей D_k' и D_k'', а тем более и в области D, имеет место оценка:

$$|Q_k(z)| < \max\left\{2e^{-\sqrt{n_k'}},\ e^{-\gamma n_k'^{\frac{3}{4}}}\right\} \text{ при } n_k' > N(A). \qquad (4)$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z)$ сходится равномерно в области D и его сумма $f(z)$ непрерывна в этой области. Тем самым доказано, что $f(z)$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

Поступило
3. III. 1952

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 525—536

А. А. ТЕМЛЯКОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В работе вводится понятие гиперконуса сходимости $|z|+|w|<R$ ряда $F(z, w)=\sum\limits_{n, m} a_{n, m} z^n w^m$ и устанавливается критерий, достаточный для того, чтобы гиперконус сходимости был областью регулярности функции $F(z, w)$.

§ 1. Интегральные представления

В работе (1) нами было установлено интегральное представление аналитической функции двух комплексных переменных в виде:

$$F(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+ye^{it}, y+xe^{-it})\, dt, \tag{1}$$

где

$$f(u, v)=\int\limits_0^1\left[\frac{d}{du} uF(uT, v(1-T))\right] dT, \quad v=ue^{-it}. \tag{2}$$

Это представление показывает, что значение функции $F(x, y)$ в точке (x, y) есть среднее арифметическое значений определяющей функции $f(u, v)$ на замкнутой линии

$$u=x+ye^{it}, \quad v=y+xe^{-it}, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Пусть функция $F(x, y)$ задана своим функциональным аналитическим элементом в точке $(0, 0)$:

$$F(x, y)=\sum_{n, m} a_{nm} x^n y^m. \tag{3}$$

В силу формулы (2), определяющая функция имеет вид:

$$f(x, y)=\sum_{n, m}\frac{n!\, m!}{(n+m)!} a_{nm} x^n y^m. \tag{4}$$

Определение 1. Область $|x-x_0|+|y-y_0|<R$ назовем гиперконусом радиуса R с центром в точке (x_0, y_0).

Определение 2. Назовем область $|x|+|y|<R$ гиперконусом сходимости ряда (3), если эта область — гиперконус наибольшего радиуса R с центром в точке $(0, 0)$, в каждой точке которого ряд (3) абсолютно сходится.

Для определения гиперконуса сходимости ряда (3) в работе ([1]), на основании представления (1), доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Если ряд (4) абсолютно сходится в бицилиндре $|x|<R$, $|y|<R$, то ряд (3) абсолютно сходится в гиперконусе $|x|+|y|<R$; обратно, если ряд (3) абсолютно сходится в гиперконусе $|x|+|y|<R$, то ряд (4) абсолютно сходится в бицилиндре $|x|<R$, $|y|<R$.*

На основании этой теоремы легко устанавливается, что радиус гиперконуса сходимости ряда (3) определяется формулой

$$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \frac{k!\,(n-k)!}{n!}\,|a_{k,\,n-k}|}. \tag{5}$$

Раскроем смысл интегрального представления (1). Пусть функция $F(x, y)$ регулярна в замкнутом гиперконусе $|x|+|y|\leqslant R'$. Тогда в каждой точке этой области она может быть представлена в следующем виде:

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \left[\frac{d}{du}\, uF\left(uT, u(1-T)\, e^{-it}\right)\right] dT,$$

где $u = x + ye^{it}$. Рассмотрим функцию $F(uT, u(1-T)\,e^{-it})$ как функцию комплексного переменного u. Так как при любых значениях параметров t и T, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $0\leqslant T\leqslant 1$,

$$|uT| + |u(1-T)\,e^{-it}| = |u|,$$

то функция $F(uT, u(1-T)\,e^{-it})$ при произвольных указанных значениях t и T является аналитической функцией комплексного переменного u в круге $|u|\leqslant R'$. Пусть C — замкнутая жорданова спрямляемая кривая $\zeta = \rho(\varphi)\, e^{i\varphi}$, принадлежащая вместе со своей внутренностью кругу $|u|\leqslant R'$ (в частности, она может быть окружностью радиуса R'). Тогда

$$F(uT, u(1-T)\,e^{-it}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta T, \zeta(1-T)\,e^{-it})}{\zeta - u}\, d\zeta,$$

где точка u принадлежит внутренности контура C. Следовательно,

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \left\{\frac{d}{du}\left[u\int_C \frac{F(\zeta T, \zeta(1-T)\,e^{-it})}{\zeta - u}\, d\varepsilon\right]\right\} dT,$$

т. е., принимая во внимание $\frac{d}{du}\frac{u}{\zeta-u} = \frac{\zeta}{(\zeta-u)^2}$, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Функция $F(x, y)$, регулярная в области $|x|+|y|\leqslant \leqslant \rho(\arg x)$, определяется внутри этой области своим поведением на*

границе $|x|+|y|=\rho(\arg x)$ *по формуле*

$$F(x, y)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt\int_0^1 dT\int_C \frac{\zeta F(\zeta T, \zeta(1-T)e^{-it})}{(\zeta-u)^2}\,d\zeta,$$

где $u=x+ye^{it}$, C — *кривая*, $\zeta=\rho(\varphi)e^{i\varphi}$.

§ 2. Аналитическое продолжение

Из определения гиперконуса сходимости следует, что на границе его, т. е. на гиперповерхности $|x|+|y|=R$, имеется по крайней мере одна особая точка функции $F(x, y)$. Наша задача — установить, когда граница гиперконуса сходимости ряда (3) не является естественной границей функции $F(x, y)$, т. е. когда функция (3) аналитически продолжима за гиперконус сходимости. Из теоремы 1 следует, что имеется какая-то зависимость между особыми точками функции $F(x, y)$ на границе гиперконуса сходимости ряда (3) и особыми точками определяющей функции $f(u, v)$ на определяющей поверхности $|u|=R$, $|v|=R$ бицилиндра $|u|<R$, $|v|<R$ наибольшего радиуса R, где ряд (4) абсолютно сходится *. Эту зависимость устанавливает следующая, доказанная в работе [1],

ТЕОРЕМА 3. *Если на гиперповерхности* $|x|+|y|=R$ *точка* (x_0, y_0) — *особая точка функции* $F(x, y)$, *то на поверхности* $|u|=R$, $|v|=R$ *точка* $u_0=x_0+y_0e^{it_0}$, $v_0=y_0+x_0e^{-it_0}$, *где* $t_0=\arg x_0-\arg y_0$, *является особой точкой определяющей функции* $f(u, v)$; *если точка* (u_0, v_0) *на поверхности* $|u|=R$, $|v|=R$ — *особая точка функции* $f(u, v)$, *то по крайней мере одна точка* (x_0, y_0), *где* $\arg x_0=\arg u_0$, $\arg y_0=\arg v_0$, *на гиперповерхности* $|x|+|y|=R$ *является особой точкой функции* $F(x, y)$.

Из этой теоремы вытекает

Следствие. *Чтобы гиперповерхность* $|x|+|y|=R$, *где* R *определяется формулой* (5), *была естественной границей функции* (3), *необходимо, чтобы поверхность* $|u|=R$, $|v|=R$ *была особой поверхностью для функции* (4).

Предмет дальнейшего исследования состоит в установлении условия, достаточного для того, чтобы граница гиперконуса сходимости ряда (3) была естественной границей суммы этого ряда.

Определение 3. Для этой цели мы будем пользоваться, наряду с определяющей функцией (4), $f(u, v)$, функцией

$$f_q(u, v)=\sum_{\frac{n}{n+m}=q}\frac{n!\,m!}{(n+m)!}a_{nm}u^n v^m,$$

где q — рациональное число из отрезка $[0, 1]$, и сумма распространяется только на те целые положительные числа n и m, для которых имеет

---

* В дальнейшем бицилиндр $|x|<R$, $|y|<R$ наибольшего радиуса R, где сходится ряд (4), будем называть элементарным бицилиндром сходимости ряда (4).

место равенство $\frac{n}{n+m}=q$. Очевидно, функция $f_q(u, v)$ — определяющая функция для функции

$$F_q(x, q)=\sum_{\frac{n}{n+m}=q} a_{nm}x^n y^m.$$

Определение 4. В дальнейшем будем пользоваться еще функциями

$$f_{[\alpha,\beta]}(u, v)=\sum_{\alpha\leqslant q\leqslant\beta} f_q(u, v),$$

$$f_{(\alpha,\beta)}(u, v)=\sum_{\alpha<q<\beta} f_q(u, v),$$

где суммы распространяются на рациональные числа q между рациональными числами α и β, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, включая и последние в первой функции.

Определение 5. Назовем поверхность $|x|=R$, $|y|=R$ особой поверхностью в сильном смысле функции $f(x, y)$, если она является особой поверхностью как для функции $f(x, y)$, так и для функций

$$f_{(q-\varepsilon,\, q+\varepsilon)}(x, y), \quad f_{[0,\,\varepsilon)}(x, y), \quad f_{(1-\varepsilon,\, 1]}(x, y),$$

где q — любое рациональное число из интервала $(0, 1)$ и ε — произвольно малое положительное рациональное число, удовлетворяющее для первой функции условию $0\leqslant q-\varepsilon<q+\varepsilon\leqslant1$, а для двух последних — условию $0<\varepsilon<1$.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы гиперконус сходимости* $|x|+|y|<R$ *ряда* (3) *был областью регулярности функции* $F(x, y)$, *необходимо и достаточно, чтобы остов* $|x|=R$, $|y|=R$ *границы элементарного бицилиндра сходимости ряда* (4) *был особой поверхностью в сильном смысле определяющей функции* $f(x, y)$.

Доказательство необходимости. Так как гиперповерхность $|x|+|y|=R$ составляется из поверхностей $|x|=TR$, $|y|=(1-T)R$ при непрерывном изменении T на отрезке $[0, 1]$, то поверхность $|u|=R$, $|v|=R$ есть особая поверхность функции $F(qu, (1-q)v)$, где q — произвольное рациональное число из отрезка $[0, 1]$. Возьмем какое-нибудь рациональное число q_0 из отрезка $[0, 1]$. По условию, поверхность

$$x=q_0Re^{it}, \quad y=(1-p_0)Re^{i\tau}, \quad 0\leqslant t\leqslant2\pi, \quad 0\leqslant\tau\leqslant2\pi, \tag{6}$$

— особая поверхность функции $F(x, y)$. Докажем, что эта поверхность — правильная поверхность функций

$$F_{[0,\, q_0-\varepsilon]}(x, y), \quad F_{[q_0+\varepsilon,\, 1]}(x, y),$$

где ε — произвольно малое положительное рациональное число. Действительно, рассмотрим, например, функцию $F_{[0,\, q_0-\varepsilon]}(x, y)$. Из равенства

$$\frac{n}{n+m}=q$$

следует, что

$$m = k(1-q), \quad n = kq,$$

где k — любое положительное целое число, кратное знаменателю рационального числа q. Очевидно, числу k соответствует конечное число $N(k)$ чисел q, именно, $N(k) \leqslant k$. Поэтому

$$F_{[0,\, q_0-\varepsilon]}(q_0 u, (1-q_0) v) =$$
$$= \sum_k \sum_{0 \leqslant q \leqslant q_0-\varepsilon} a_{kq,\, k(1-q)} q_0^{kq} (1-q_0)^{k(1-q)} u^{kq} v^{k(1-q)}.$$

Найдем радиус R_0 элементарного бицилиндра абсолютной сходимости этого ряда. Так как

$$\sum_k \sum_{0 \leqslant q \leqslant q_0-\varepsilon} |a_{kq,\, k(1-q)}| q_0^{kq} (1-q_0)^{k(1-q)} |u|^{kq} |v|^{k(1-q)} =$$
$$= \sum_k \Big(\sum_{0 \leqslant q \leqslant q_0-\varepsilon} |a_{kq,\, k(1-q)}| q_0^{kq} (1-q_0)^{k(1-q)} \Big) |u|^k,$$

то

$$R_0^{-1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sum_{0 \leqslant q \leqslant q_0-\varepsilon} |a_{kq,\, k(1-q)}| q_0^{kq} (1-q_0)^{k(1-q)}} =$$
$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sum_{0 \leqslant q \leqslant q_0-\varepsilon} |a_{kq,\, k(1-q)}| \left(\frac{q_0}{q_0-\varepsilon}\right)^{kq} \left(\frac{1-q_0}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{k(1-q)} (q_0-\varepsilon)^{kq} (1-q_0+\varepsilon)^{k(1-q)}}$$

Принимая во внимание, что функция

$$\lambda(q) = \left(\frac{q_0}{q_0-\varepsilon}\right)^q \left(\frac{1-q_0}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-q}$$

— возрастающая функция, имеем для значений q из отрезка $[0, q_0-\varepsilon]$:

$$\left(\frac{q_0}{q_0-\varepsilon}\right)^q \left(\frac{1-q_0}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-q} \leqslant \left(\frac{q_0}{q_0-\varepsilon}\right)^{q_0-\varepsilon} \left(\frac{1-q_0}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-q_0+\varepsilon},$$

откуда

$$R_0^{-1} \leqslant \left(\frac{q_0}{q_0-\varepsilon}\right)^{q_0-\varepsilon} \left(\frac{1-q_0}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-q_0+\varepsilon} \cdot$$
$$\cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sum_{0 \leqslant q \leqslant q_0-\varepsilon} |a_{kq,\, k(1-q)}| (q_0-\varepsilon)^{kq} (1-q_0+\varepsilon)^{k(1-q)}}.$$

А так как ряд

$$F_{[0,\, q_0-\varepsilon]}((q_0-\varepsilon) u, (1-q_0+\varepsilon) v) =$$
$$= \sum_k \sum_{0 \leqslant q \leqslant q_0-\varepsilon} a_{kq,\, k(1-q)} (q_0-\varepsilon)^{kq} (1-q_0+\varepsilon)^{k(1-q)} u^{kq} v^{k(1-q)},$$

как частичный ряд ряда

$$F((q_0-\varepsilon) u, (1-q_0+\varepsilon) v) =$$
$$= \sum_k \sum_{0 \leqslant q \leqslant 1} a_{kq,\, k(1-q)} (q_0-\varepsilon)^{kq} (1-q_0+\varepsilon)^{k(1-q)} u^{kq} v^{k(1-q)},$$

имеет, по условию, радиус элементарного бицилиндра абсолютной сходимости $R' \geqslant R$, то

$$R_0^{-1} \leqslant \left(\frac{q_0}{q_0 - \varepsilon}\right)^{q_0 - \varepsilon} \left(\frac{1 - q_0}{1 - q_0 + \varepsilon}\right)^{1 - q_0 + \varepsilon} R^{-1},$$

т. е.

$$R_0 \geqslant \left(\frac{q_0 - \varepsilon}{q_0}\right)^{q_0 - \varepsilon} \left(\frac{1 - q_0 + \varepsilon}{1 - q_0}\right)^{1 - q_0 + \varepsilon} R.$$

Учитывая еще, что функция

$$\omega(q) = \left(\frac{q}{q_0}\right)^{q} \left(\frac{1 - q}{1 - q_0}\right)^{1 - q}$$

принимает минимум при $q = q_0$, получаем:

$$R_0 > R.$$

Итак, функция $F_{[0, q_0 - \varepsilon]}(x, y)$ регулярна на поверхности (6). Аналогично доказывается, что и функция $F_{[q_0 + \varepsilon, 1]}(x, y)$ регулярна на этой поверхности. А так как

$$F(x, y) = F_{[0, q_0 - \varepsilon]}(x, y) + F_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(x, y) + F_{[q_0 + \varepsilon, 1]}(x, y)$$

и, по условию, для функции $F(x, y)$ поверхность $|x| = q_0 R$, $|y| = (1 - q_0) R$ — особая поверхность, то отсюда следует, что эта поверхность, т. е. поверхность (6), является особой поверхностью функции $F_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(x, y)$. На основании этого я утверждаю, что поверхность $|u| = R$, $|v| = R$ — особая поверхность функции $f_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(x, y)$. Действительно, функция $f_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(u, v)$ — определяющая функция для функции $F_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(x, y)$. А так как точки (x, y), где

$$x = q_0 R e^{it}, \quad y = (1 - q_0) R e^{i\tau}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi,$$

— особые точки функции $F_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(x, y)$, то, на основании теоремы 3, точки (u, v), где

$$u = q_0 R e^{it} + (1 - q_0) R e^{i\tau} e^{i(t - \tau)} = R e^{it},$$
$$v = (1 - q_0) R e^{i\tau} + q_0 R e^{it} e^{-i(t - \tau)} = R e^{i\tau},$$

— особые точки функции $f_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(u, v)$. Итак, поверхность $|u| = R$, $|v| = R$ — особая поверхность функции $f_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(u, v)$. Но так как q_0 — произвольное рациональное число из отрезка [0, 1], то отсюда и следует справедливость нашего утверждения.

Доказательство достаточности. Поверхность $|u| = R$, $|v| = R$ — особая поверхность в сильном смысле функции $f(x, y)$. Пусть q_0 — любое рациональное число из отрезка [0, 1]. Поверхность $|u| = R$, $|v| = R$ является особой поверхностью функции $f_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(u, v)$, где ε — произвольно малое положительное число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant q_0 - \varepsilon < q_0 + \varepsilon \leqslant 1$. Рассмотрим три функции:

$$F_{[0, q_0 - \varepsilon]}(x, y), \quad F_{(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon)}(x, y), \quad F_{[q_0 + \varepsilon, 1]}(x, y).$$

Я утверждаю, что эти три функции регулярны на частях гиперповерхности $|x|+|y|=R$, лежащих, соответственно, вне замкнутых гиперповерхностей:

$$x=qRe^{it},\ y=(1-q)Re^{i\tau},\quad 0\leqslant q\leqslant q_0-\varepsilon,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi, \tag{7}$$

$$x=qRe^{it},\ y=(1-q)Re^{i\tau},\ q_0-\varepsilon\leqslant q\leqslant q_0+\varepsilon,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi, \tag{8}$$

$$x=qRe^{it},\ y=(1-q)Re^{i\tau},\ q_0+\varepsilon\leqslant q\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi. \tag{9}$$

Рассмотрим, например, функцию $F_{[0,\,q_0-\varepsilon]}(x, y)$. Имеем:

$$F_{[0,\,q_0-\varepsilon]}(qRe^{it}, (1-q)Re^{i\tau})\equiv F_{[0,\,q_0-\varepsilon]}(qu, (1-q)v)=$$
$$=\sum_k\sum_{0\leqslant r\leqslant q_0-\varepsilon} a_{kr,\,k(1-r)}\,q^{kr}(1-q)^{k(1-r)}\,u^{kr}v^{k(1-r)}.$$

Найдем радиус R_0 элементарного бицилиндра абсолютной сходимости этого ряда. Так как

$$\sum_k\sum_{0\leqslant r\leqslant q_0-\varepsilon}|a_{kr,\,k(1-r)}|\,q^{kr}(1-q)^{k(1-r)}\,|u|^{kr}\,|v|^{k(1-r)}=$$
$$=\sum_k\sum_{0\leqslant r\leqslant q_0-\varepsilon}|a_{kr,\,k(1-r)}|\,q^{kr}(1-q)^{k(1-r)}\,|u|^{k},$$

то

$$R_0^{-1}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\sum_{0\leqslant r\leqslant q_0-\varepsilon}|a_{kr,\,k(1-r)}|\,q^{kr}(1-q)^{k(1-r)}}=$$
$$=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\sum_{0\leqslant r\leqslant q_0-\varepsilon}|a_{kr,\,k(1-r)}|\left(\frac{q}{q_0-\varepsilon}\right)^{kr}\left(\frac{1-q}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{k(1-r)}(q_0-\varepsilon)^{kr}(1-q_0+\varepsilon)^{k(1-r)}}.$$

Принимая во внимание, что функция

$$\lambda(r)=\left(\frac{q}{q_0-\varepsilon}\right)^{r}\left(\frac{1-q}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-r}$$

— возрастающая функция, так как $q>q_0-\varepsilon$ и

$$(\ln\lambda(r))'=\ln\frac{q(1-q_0+\varepsilon)}{(q_0-\varepsilon)(1-q)}>0,$$

получаем:

$$\left(\frac{q}{q_0-\varepsilon}\right)^{r}\left(\frac{1-q}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-r}\leqslant\left(\frac{q}{q_0-\varepsilon}\right)^{q_0-\varepsilon}\left(\frac{1-q}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-q_0+\varepsilon},$$

а поэтому

$$R_0^{-1}\leqslant\left(\frac{q}{q_0-\varepsilon}\right)^{q_0-\varepsilon}\left(\frac{1-q}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-q_0+\varepsilon}\cdot$$
$$\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\sum_{0\leqslant r\leqslant q_0-\varepsilon}|a_{kr,\,k(1-r)}|\,(q_0-\varepsilon)^{kr}(1-q_0+\varepsilon)^{k(1-r)}}.$$

Так как ряд

$$F[(q_0-\varepsilon)u,\ (1-q_0+\varepsilon)v]=$$
$$=\sum_k\sum_{0\leqslant q\leqslant 1}a_{kq,\,k(1-q)}(q_0-\varepsilon)^{kq}(1-q_0+\varepsilon)^{k(1-q)}\,u^{kq}v^{k(1-q)},$$

на основании теоремы 1, имеет радиус элементарного бицилиндра абсолютной сходимости R, а ряд

$$F_{[0,\, q_0-\varepsilon]}\,[(q_0-\varepsilon)\,u,\ (1-q_0+\varepsilon)\,v] =$$
$$=\sum_k \sum_{0\leqslant q\leqslant q_0-\varepsilon} a_{kq,\,k(1-q)}\,(q_0-\varepsilon)^{kq}\,(1-q_0+\varepsilon)^{k(1-q)}u^{kq}v^{k(1-q)},$$

как частичный ряд предшествующего ряда, имеет радиус элементарного бицилиндра абсолютной сходимости $R'\geqslant R$, то

$$R_0^{-1}\leqslant\left(\frac{q}{q_0-\varepsilon}\right)^{q_0-\varepsilon}\left(\frac{1-q}{1-q_0+\varepsilon}\right)^{1-q_0+\varepsilon}R^{-1},$$

т. е.

$$R_0\geqslant\left(\frac{q_0-\varepsilon}{q}\right)^{q_0-\varepsilon}\left(\frac{1-q_0+\varepsilon}{1-q}\right)^{1-q_0+\varepsilon}R.$$

Учитывая, что $q_0-\varepsilon<q$ и что функция

$$\omega(\alpha)=\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{1-q}\right)^{1-\alpha}$$

принимает минимум при $\alpha=q$, получаем:

$$R_0>R,$$

т. е. функция $F_{[0,\,q_0-\varepsilon]}(x,\ y)$ регулярна на гиперповерхности

$$x=qRe^{it},\quad y=(1-q)\,Re^{i\tau},\quad q_0-\varepsilon<q\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi.$$

Аналогично доказывается справедливость утверждения по отношению к остальным двум функциям:

$$F_{[q_0+\varepsilon,\,1]}(x,\ y),\quad F_{(q_0-\varepsilon,\,q_0+\varepsilon)}(x,\ y).$$

Так как функция $f_{(q_0-\varepsilon,\,q_0+\varepsilon)}(u,\ v)$ — определяющая функция функции $F_{(q_0-\varepsilon,\,q_0+\varepsilon)}(x,\ y)$, то на основании доказанного и теоремы 3, функция $F_{(q_0-\varepsilon,\,q_0+\varepsilon)}(x,\ y)$ имеет по крайней мере одну особую точку на каждой прямой

$$x=qRe^{it},\quad y=(1-q)\,Re^{i\tau},\quad q_0-\varepsilon\leqslant q\leqslant q_0+\varepsilon,$$

принадлежащей гиперповерхности

$$x=qRe^{it},\quad y=(1-q)\,Re^{i\tau},\quad q_0-\varepsilon\leqslant q\leqslant q_0+\varepsilon,$$
$$0\leqslant t\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi. \tag{10}$$

Из равенства

$$F(x,\ y)=F_{[0,\,q_0-\varepsilon]}(x,\ y)+F_{(q_0-\varepsilon,\,q_0+\varepsilon)}(x,\ y)+F_{[q_0+\varepsilon,\,1]}(x,\ y)$$

и регулярности функций $F_{[0,\,q_0-\varepsilon]}(x,\ y)$, $F_{[q_0+\varepsilon,\,1]}(x,\ y)$ соответственно вне гиперповерхностей (7) и (9) следует, что и функция $F(x,\ y)$ имеет на каждой из тех же прямых по крайней мере одну особую точку. Я утверждаю, что поверхность

$$|x|=q_0R,\quad |y|=(1-q_0)\,R$$

есть особая поверхность функции $F(x, y)$. Действительно, в противном случае функция $F(x, y)$, будучи регулярной в некоторой точке

$$x_0 = q_0 R e^{it_0}, \quad y_0 = (1 - q_0) R e^{i\tau_0}$$

поверхности $|x| = q_0 R$, $|y| = (1 - q_0) R$, была бы регулярна на гиперповерхности

$$x = qRe^{it}, \quad y = (1 - q) Re^{i\tau}, \quad q_0 - \varepsilon' < q < q_0 + \varepsilon',$$
$$t_0 - \delta < t < t_0 + \delta, \quad \tau_0 - \eta < \tau < \tau_0 + \eta, \tag{11}$$

где ε', δ, η — достаточно малые положительные числа. В силу произвольной малости числа ε, возьмем $\varepsilon < \varepsilon'$. Но тогда функция $F(x, y)$ не имела бы особых точек на части гиперповерхности (10), принадлежащей гиперповерхности (11), а именно, на прямых

$$x\, q = Re^{it}, \quad y = (1 - q) Re^{i\tau}, \quad q_0 - \varepsilon \leqslant q \leqslant q_0 + \varepsilon,$$

где $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$, $\tau_0 - \eta < \tau < \tau_0 + \eta$, что противоречит вышеуказанному. Итак, поверхность

$$|x| = q_0 R, \quad |y| = (1 - q_0) R$$

— особая поверхность функции $F(x, y)$, а в силу произвольности q_0, $0 \leqslant q_0 \leqslant 1$, и гиперповерхность

$$|x| + |y| = R$$

есть особая гиперповерхность, т. е. естественная граница функции $F(x, y)$.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы гиперконус сходимости* $|x| + |y| < R$ *ряда* (3) *был областью регулярности функции* $F(x, y)$, *достаточно, чтобы при любом* t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \sqrt[n_p]{\left| \sum_{q - \varepsilon < \frac{k}{n_p} < q + \varepsilon} \frac{k!\,(n_p - k)!}{n_p!} a_{k,\, n_p - k} e^{-i(n_p - k)t} \right|} = R^{-1}$$

и

$$\lim_{p \to \infty} \frac{n_p}{p} = \infty,$$

где q — *любое рациональное число на отрезке* [0, 1] *и* ε — *произвольно малое положительное число, удовлетворяющее условию* $0 \leqslant q - \varepsilon < q + \varepsilon \leqslant 1$.

Примечание. При $q = 0$ сумма распространяется на числа k, удовлетворяющие условию $0 \leqslant \frac{k}{n_p} < \varepsilon$; при $q = 1$ сумма распространяется на числа k, удовлетворяющие условию $1 - \varepsilon < \frac{k}{n_p} \leqslant 1$.

Доказательство. Так как

$$\lim_{p \to \infty} \frac{n_p}{p} = \infty,$$

то, на основании теоремы Фабри, при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, окружность $|u| = R$ — естественная граница для функций

$$f(u, ue^{-it}) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant n_p} \frac{k!\,(n_p - k)!}{n_p!} a_{k,\, n_p - k}\, e^{-i\,(n_p - k)\,t} \right) u^{n_p},$$

$$f_{(q-\varepsilon,\, q+\varepsilon)}(u, ue^{-it}) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q-\varepsilon < \frac{k}{n_p} < q+\varepsilon} \frac{k!\,(n_p - k)!}{n_p!} a_{k,\, n_p - k}\, e^{-i\,(n_p - k)\,t} \right) u^{n_p}.$$

Следовательно, поверхность $|u| = R$, $|v| = R$ — особая поверхность для функций $f(u, v)$, $f_{(q-\varepsilon,\, q+\varepsilon)}(u, v)$, т. е. поверхность $|u| = R$, $|v| = R$ есть особая поверхность в сильном смысле функции $f(u, v)$. На основании теоремы 4, гиперповерхность $|x| + |y| = R$ есть естественная граница функции $F(x, y)$ со стороны $|x| + |y| < R$.

Пример.

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{(2^n - 1)!}{(k-1)!\,(2^n - k)!} x^k y^{2^n - k}.$$

Определяющая функция имеет вид:

$$f(u, v) = f(u, ue^{-it}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k}{2^n} e^{-i\,(2^n - k)\,t} u^{2^n}$$

или

$$f(u, ue^{-it}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i2^n t} \left(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{k}{2^n} e^{ikt} \right) u^{2^n}.$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n} = \infty,$$

то второе условие теоремы 5 выполнено. Рассмотрим

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[2^n]{\left| \sum_{k=p}^{p+m} \frac{k}{2^n} e^{ikt} \right|},$$

где целые числа p и m — функции от n, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant p \leqslant 2^n$, $1 \leqslant p + m \leqslant 2^n$. Для $t \neq 0$, $t \neq 2\pi$ имеем, на основании преобразования Абеля,

$$\sum_{k=p}^{p+m} \frac{k}{2^n} e^{ikt} = \frac{p+m}{2^n} e^{ipt} \frac{1 - e^{i\,(m+1)\,t}}{1 - e^{it}} - \sum_{k=p}^{p+m-1} \frac{1}{2^n} \frac{e^{ipt} - e^{i\,(k+1)\,t}}{1 - e^{it}} =$$

$$= \frac{e^{ipt}}{2^n\,(1 - e^{it})} \left[(p+m)\,(1 - e^{i\,(m+1)\,t}) - \sum_{k=p}^{p+m-1} (1 - e^{i\,(k-p+1)\,t}) \right] =$$

$$= \frac{e^{ipt}}{2^n\,(1 - e^{it})} \left[p + m - m + \sum_{k=p}^{p+m-1} e^{i\,(k-p+1)\,t} - (p+m)\, e^{i\,(m+1)\,t} \right] =$$

$$= \frac{e^{ipt}}{2^n(1-e^{it})}\left[p-(p+m)\,e^{i(m+1)t}+\frac{e^{it}-e^{i(m+1)t}}{1-e^{it}}\right]=$$

$$= \frac{e^{ipt}}{2^n(1-e^{it})}\left[\frac{1-e^{i(m+1)t}}{1-e^{it}}-(p+m)\,e^{i(m+1)t}+p-1\right].$$

Поэтому в интервале $0<t<2\pi$

$$\left|\sum_{k=p}^{p+m}\frac{k}{2^n}e^{ikt}\right|=\frac{1}{2^n\,|1-e^{it}|}\left|\left(p+m+\frac{1}{1-e^{it}}\right)e^{i(m+1)t}-(p-1)-\frac{1}{1-e^{it}}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2^n\,|1-e^{it}|}\left[\left|p+m+\frac{1}{1-e^{it}}\right|-\left|p-1+\frac{1}{1-e^{it}}\right|\right]=$$

$$=\frac{1}{2^n\cdot 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\left[\left|p+m+\frac{1}{2}+i\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\frac{1}{2}\right|-\left|p-1+\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|\right]=$$

$$=\frac{1}{2^n\cdot 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\left[\sqrt{\left(p+m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}-\sqrt{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^n\cdot 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\left[\sqrt{(m+1)^2+2(m+1)\left(p-\frac{1}{2}\right)+\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}\right]=$$

$$=\frac{(m+1)^2+2(m+1)\left(p-\frac{1}{2}\right)}{2^n\cdot 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\left[\sqrt{\left(p+m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}+\sqrt{\left(-p\,\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}\right]}>$$

$$>\frac{(m+1)^2}{2^n\cdot 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\cdot 2\sqrt{\left(p+m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}}=$$

$$=\frac{(m+1)^2}{2^n\cdot 2\sqrt{4\left(p+m+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}}>$$

$$>\frac{(m+1)^2}{2^{n+1}\sqrt{4\left(p+m+\frac{1}{2}\right)^2+1}}>\frac{(m+1)^2}{2^{n+1}\sqrt{4(p+m+1)^2}}=$$

$$=\frac{(m+1)^2}{2^{n+1}(p+m+1)}>\frac{1}{2^{n+2}(2^n+1)}>\frac{1}{2^{2n}+3}.$$

С другой стороны, в сегменте $0\leqslant t\leqslant 2\pi$

$$\left|\sum_{k=p}^{p+m}\frac{k}{2^n}e^{ikt}\right|\leqslant\sum_{k=p}^{p+m}\frac{k}{2^n}=\frac{(m+2p)(m+1)}{2^{n+1}}<\frac{(2^n+1)\,2^n}{2^{n+1}}<2^n.$$

Итак, в сегменте $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ имеем:

$$\frac{1}{2^{2n+3}}<\left|\sum_{k=p}^{p+m}\frac{k}{2^n}e^{ikt}\right|<2^n,$$

а поэтому при любых допустимых значениях p и m и при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\left|\sum_{k=p}^{p+m} \frac{k}{2^n} e^{ikt}\right|} = 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 5, гиперконус сходимости $|x| + |y| < 1$ рассматриваемого ряда есть область регулярности функции $F(x, y)$, так как множество $\left\{\frac{k}{2^n}\right\}$ плотно на сегменте $[0,1]$.

Поступило
14.XII.1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Темляков А. А., Аналитическое продолжение функций двух переменных, Матем. сб., т. 19 (61) (1946), 73—84.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

16 (1952), 537—562

Н. С. КОШЛЯКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЯКО-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе рассматривается обобщенное уравнение Ламе коэффициенты которого выражаются через эллиптические функции Якоби. Путем применения одного интегрального уравнения типа Фредгольма удается проинтегрировать целый ряд подобных уравнений, а также применить получаемые результаты к определению периода колебаний тяжелой сферической нити.

Введение

1°. Теория линейных дифференциальных уравнений с двояко-периодическими коэффициентами издавна привлекала внимание многих выдающихся исследователей. Достаточно назвать классические работы Ламе, Эрмита, Пикара и др.

Пикаром было показано, что обобщенное уравнение Ламе

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\operatorname{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)k^2\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right)u = 0 \tag{1.1}$$

в том случае, когда λ, μ, ν, n являются целыми числами, может быть проинтегрировано для любых значений h при помощи якобиевых функций $\Theta(x)$, $H(x)$. Но существуют такие исключительные значения параметра h, при которых уравнение (1.1) допускает решения в форме некоторой определенной алгебраической зависимости от $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, причем нет необходимости считать параметры λ, μ, ν, n целыми числами. Так, например, уравнение

$$u'' + \left(h - \frac{5}{16}k^2\operatorname{sn}^2 x + \frac{3}{16}\frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}\right)u = 0 \tag{2.1}$$

при

$$h = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}k^2$$

имеет решение

$$u = \sqrt[4]{\operatorname{cn} x},$$

представляющее собой алгебраическую функцию от $\operatorname{cn} x$.

В настоящей работе мы будем рассматривать такие решения уравнения (1.1), которые при надлежащем выборе постоянной h имеют вид

$$\operatorname{sn}^p x \cdot \operatorname{cn}^q x \operatorname{dn}^r x\, P(\operatorname{sn}^2 x), \tag{3.1}$$

где через p, q, r обозначены рациональные числа, а $P(\operatorname{sn}^2 x)$ есть некоторый полином от $\operatorname{sn}^2 x$.

Мы покажем, что решения такого типа одновременно являются решениями некоторого линейного однородного интегрального уравнения Фредгольма. Если остановиться на частном случае обычного уравнения Ламе

$$u'' + (h - k^2 n(n+1)\operatorname{sn}^2 x)\, u = 0, \tag{4.1}$$

где через n обозначено целое положительное число, то на одно из таких интегральных уравнений указал Уиттекер ([1]). В этом случае получаются, в зависимости от выбора чисел p, q, r, функции Ламе $E_n^m(x)$ первого, второго, третьего и четвертого рода, и Уиттекером были приведены два из могущих здесь представиться интегральных уравнений [см. ([2])]. Между тем, для полной картины, охватывающей все возможные случаи решений уравнения Ламе, необходимо иметь четыре интегральных уравнения. Недостающие два уравнения мы приводим во втором параграфе настоящей статьи.

В третьем параграфе мы показываем на ряде примеров, каким образом может быть использовано выведенное нами интегральное уравнение для построения тех решений обобщенного уравнения Ламе, которые имеют форму (3.1).

Наконец, в последнем параграфе мы применяем полученные результаты к нахождению периода колебаний тяжелой сферической нити, закрепленной верхним концом в северном полюсе сферы.

§ 1. Вывод основного интегрального уравнения

2°. Допустим, что линейное уравнение

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\operatorname{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2 x} - \mu(\mu-1)\frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \right.$$
$$\left. - \frac{\nu(\nu-1)\, k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0 \tag{1.2}$$

при надлежащем выборе постоянной h имеет частное решение вида

$$u = \operatorname{sn}^p x \operatorname{cn}^p x \operatorname{dn}^r x\, P(\operatorname{sn}^2 x). \tag{2.2}$$

Обозначим через K вещественный период эллиптических функций и составим определенный интеграл

$$I(x) = \int_{-2K}^{2K} G(x, s)\, u(s)\, ds, \tag{3.2}$$

где через $u(s)$ обозначено то решение уравнения (1.2), которое имеет форму (2.2), а $G(x, s)$ есть симметричная, периодическая с периодом $4K$ аналитическая функция аргументов x, s, удовлетворяющая дифференци-

альному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}=\Big\{k^2 n(n+1)(\mathrm{sn}^2 x-\mathrm{sn}^2 s)+\lambda(\lambda-1)\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2 x}-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 s}\right)+$$
$$+\mu(\mu-1)\left(\frac{\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x}-\frac{\mathrm{dn}^2 s}{\mathrm{cn}^2 s}\right)+\nu(\nu-1)k^2\left(\frac{\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}-\frac{\mathrm{cn}^2 s}{\mathrm{dn}^2 s}\right)\Big\}G. \qquad (4.2)$$

Докажем, что если только $I(x)$ не равен тождественно нулю, то интеграл (3.2) есть решение уравнения (1.2). Чтобы убедиться в этом, внесем этот интеграл в левую часть уравнения (1.2) и исключим затем производную $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ посредством равенства (4.2). Интегрируя затем выражение

$$\int_{-2K}^{2K}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}u(s)\,ds$$

дважды по частям, найдем, что

$$I''(x)+\left(h-k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x}-\frac{\mu(\mu-1)\,dn^2 x}{\mathrm{cn}^2 x}-\frac{\nu(\nu-1)\,k^{22}\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}^2 x}\right)I(x)=$$
$$=\left[\frac{\partial G}{\partial s}u(s)-Gu'(s)\right]_{-2K}^{2K}+$$
$$+\int_{-2K}^{2K}\Big\{u''(s)+(h-k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 s-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 s}-$$
$$-\frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 s}{\mathrm{cn}^2 s}-\frac{\nu(\nu-1)\,k^2\mathrm{cn}^2 s}{\mathrm{dn}^2 s}\Big)u(s)\Big\}G(x,s)\,ds. \qquad (5.2)$$

Первое слагаемое правой части исчезает, в силу предположенной периодичности; второе также равно нулю, так как $u(s)$ есть решение уравнения (1.2), поэтому левая часть равенства (5.2) равна нулю; если теперь допустить, что случай $I(x)\equiv 0$ исключен, то интеграл (3.2) есть решение уравнения (1.2), что и требовалось доказать.

Допустим, что мы нашли такой частный интеграл уравнения (4.2), который имеет форму

$$G(x,s)=\varphi(x)\varphi(s)P(\mathrm{sn}^2 x,\mathrm{sn}^2 s), \qquad (6.2)$$

где

$$\varphi(\tau)=\mathrm{sn}^p\tau\cdot\mathrm{cn}^q\tau\cdot\mathrm{dn}^r\tau, \qquad (7.2)$$

а $P(x, s)$ есть полином, симметричный относительно своих аргументов. Тогда можно показать, что то решение дифференциального уравнения (1.2), которое имеет форму (2.2), будет представлять собою решение линейного однородного уравнения Фредгольма

$$u(x)=\lambda_0\int_{-2K}^{2K}G(x,s)\,u(s)\,ds. \qquad (8.2)$$

Действительно, по доказанному выше, интеграл

$$I(x)=\int_{-2K}^{2K}G(x,s)\,u(s)\,ds \qquad (9.2)$$

в том случае, когда он не равен тождественно нулю, является решением дифференциального уравнения (1.1). С другой стороны, из формул (6.2), (7.2) следует, что правая часть равенства (9.2) представляет собой полином относительно $\mathrm{sn}^2 x$, умноженный на

$$\mathrm{sn}^p x\,\mathrm{cn}^q x\,\mathrm{dn}^r x.$$

Следовательно, $I(x)$ должно быть кратным решению

$$u(x)=\mathrm{sn}^p x\,\mathrm{cn}^q x\,\mathrm{dn}^r x\,P(\mathrm{sn}^2 x),$$

так как второе линейно независимое решение $u_1(x)$ уравнения (1.2) имеет совершенно другую структуру, как это усматривается из формулы:

$$u_1(x)=\mathrm{sn}^p x\,\mathrm{cn}^q x\,\mathrm{dn}^r x\,P(\mathrm{sn}^2 x)\int^x\frac{dx}{\mathrm{sn}^{2p}x\,\mathrm{cn}^{2q}x\,\mathrm{dn}^{2r}x P^2(\mathrm{sn}^2 x)}.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$I(x)=\frac{u(x)}{\lambda_0}, \tag{10.2}$$

где через λ_0 обозначена постоянная величина.

Из равенств (9.2) и (10.2) вытекает справедливость вышеуказанного утверждения.

3°. Покажем, как может быть разыскано то решение уравнения (4.2), которое имело бы форму (6.2).

Пусть k и k' обозначают модули эллиптических функций, так что

$$k^2+k'^2=1.$$

Введем для краткости обозначения:

$$t=\alpha k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s+\beta i\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}x\,\mathrm{sn}s+\gamma\frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}x\,\mathrm{dn}s, \tag{1.3}$$

$$G(x,s)=\varphi(x)\,\varphi(s)\,F(t), \tag{2.3}$$

$$\varphi(\tau)=\mathrm{sn}^{\lambda'}\tau\cdot\mathrm{cn}^{\mu'}\tau\cdot\mathrm{dn}^{\nu'}\tau, \tag{3.3}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\lambda',\mu',\nu'$ — постоянные числа, а $F(t)$ — пока произвольная функция.

Внося выражение (2.3) в уравнение (4.2), мы убедимся, что член, содержащий $F''(t)$, будет иметь вид:

$$\varphi(x)\,\varphi(s)\,k^2(\mathrm{sn}^2 x-\mathrm{sn}^2 s)(t^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)F''(t).$$

Собирая далее члены, содержащие $F'(t)$, получим выражение:

$$2\varphi(x)\,\varphi(s)\,k^2(\mathrm{sn}^2 x-\mathrm{sn}^2 s)\Big\{(\lambda'+\mu'+\nu'+1)\,t-\\-\frac{\lambda'\alpha}{k\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s}+\frac{\mu' i\beta k'}{k\mathrm{cn}x\,\mathrm{cn}s}-\frac{\nu'\gamma k'}{\mathrm{dn}x\,\mathrm{dn}s}\Big\}F'(t).$$

Наконец, член, содержащий $F(t)$, после всех упрощений примет вид:

$$\varphi(x)\,\varphi(s)\,k^2(\mathrm{sn}^2 x-\mathrm{sn}^2 s)\Bigg\{(\lambda'+\mu'+\nu')(\lambda'+\mu'+\nu'+1)-n(n+1)-\\-\frac{\lambda'(\lambda'-1)-\lambda(\lambda-1)}{k^2\mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{sn}^2 s}-\frac{\mu'(\mu'-1)-\mu(\mu-1)}{\left(\frac{ki}{k'}\right)^2\mathrm{cn}^2 x\,\mathrm{cn}^2 s}-\frac{\nu'(\nu'-1)-\nu(\nu-1)}{\frac{1}{k'^2}\,\mathrm{dn}^2 x\,\mathrm{dn}^2 s}\Bigg\}F(t).$$

Выберем постоянные числа $\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \gamma'$ так, чтобы выполнялся один из трех следующих случаев:

$$\left.\begin{array}{llllll} 1) & \alpha=1, & \beta=0, & \gamma=0, & \mu'=\mu, & \nu'=\nu, \\ 2) & \alpha=0, & \beta=1, & \gamma=0, & \lambda'=\lambda, & \nu'=\nu, \\ 3) & \alpha=0, & \beta=0, & \gamma=1, & \lambda'=\lambda, & \mu'=\mu. \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид;

$$\begin{gathered} (t^2-1)F''(t)+2\left\{(m+1)t-\frac{a}{t}\right\}F'(t)+ \\ +\left\{m(m+1)-n(n+1)-\frac{b}{t^2}\right\}F(t)=0, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где ради краткости положено:

$$m=\lambda'+\mu'+\nu',$$

а постоянные a, b и переменная t имеют следующие значения:

$$\left.\begin{array}{lll} 1)\ a=\lambda', & b=\lambda'(\lambda'-1)-\lambda(\lambda-1). & t=k\operatorname{sn}x\operatorname{sn}s, \\ 2)\ a=\mu', & b=\mu'(\mu'-1)-\mu(\mu-1), & t=\dfrac{ik}{k'}\operatorname{cn}x\operatorname{cn}s, \\ 3)\ a=\nu', & b=\nu'(\nu'-1)-\nu(\nu-1), & t=\dfrac{1}{k'}\operatorname{dn}x\operatorname{dn}s. \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

Чтобы не рассматривать все эти три случая в отдельности, положим:

$$a=\omega', \quad b=\omega'(\omega'-1)-\omega(\omega-1), \tag{7.3}$$

где через ω и ω' обозначены соответственно какие-нибудь из букв λ, μ, ν и λ', μ', ν', и введем новую функцию $\Phi(\xi)$, положив

$$F(t)=t^{\omega-\omega'}\Phi(\xi), \quad \xi=t^2. \tag{8.3}$$

Тогда уравнение (5.3) приведется к уравнению Гаусса:

$$\xi(\xi-1)\Phi''(\xi)+\{(\alpha_1+\beta_1+1)\xi-\gamma_1\}\Phi'(\xi)+\alpha_1\beta_1\Phi(\xi)=0, \tag{9.3}$$

где

$$\alpha_1=\frac{\omega-\omega'+m-n}{2}, \quad \beta_1=\frac{\omega-\omega'+m+n+1}{2}, \quad \gamma_1=\omega+\frac{1}{2}. \tag{10.3}$$

При $\omega+\frac{1}{2}$, не равном целому отрицательному числу или нулю, уравнение (9.3) допускает частное решение в форме гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \xi)=1+\frac{\alpha_1\beta_1}{1\cdot\gamma_1}\xi+\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\beta_1(\beta_1+1)}{1\cdot2\cdot\gamma_1(\gamma_1+1)}\xi^2+\cdots, \quad |\xi|<1. \tag{11.3}$$

Если параметры этого ряда выбраны так, что он обращается в полином, то во всех трех вышеуказанных случаях $\Phi(\xi)$ будет полиномом от $\operatorname{sn}^2 x$, $\operatorname{sn}^2 s$, и из формул (2.3) и (8.3) становится ясным, что функция $G(x, s)$ примет именно тот вид, который требуется формулой (6.2).

Таким образом мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА. *Если в дифференциальном уравнении*

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1)\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)\,k^2\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right)u = 0 \quad (12.3)$$

параметры n, λ, μ, ν *выбраны так, что гипергеометрическая функция*

$$F\left(\frac{\lambda+\mu+\nu-n}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu+n+1}{2}, \alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu+\frac{1}{2}, t^2\right) \quad (13.3)$$

при

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \alpha=1, \quad \beta=0, \quad \gamma=0,\\ &2)\ \alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma=0,\\ &3)\ \alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=1, \end{aligned}\right\} \quad (14.3)$$

оказывается полиномом, то те решения уравнения (12.3), *которые имеют форму*

$$\mathrm{sn}^p x\,\mathrm{cn}^q x\,\mathrm{dn}^r x\,P(\mathrm{sn}^2 x), \quad (15.3)$$

оказываются решениями однородного интегрального уравнения Фредгольма

$$u(x) = \lambda_0 \cdot$$

$$\cdot \int_{-2K}^{2K} \varphi(x)\,\varphi(s)\,F\left(\frac{\lambda+\mu+\nu-n}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu+n+1}{2}, \alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu+\frac{1}{2}, t^2\right)u(s)\,ds \quad (16.3)$$

где ради краткости положено

$$\varphi(\tau) = \mathrm{sn}^\lambda \tau\,\mathrm{cn}^\mu \tau\,\mathrm{dn}\,\tau, \quad (17.3)$$

$$t = \alpha k\,\mathrm{sn} x\,\mathrm{sn} s + \beta\frac{ik}{k'}\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}\,s + \gamma\cdot\frac{1}{k'}\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}\,s. \quad (18.3)$$

4°. Отложив более детальное рассмотрение этой теоремы до следующего параграфа, приведем здесь один ее частный случай, имеющий, однако, достаточно общий характер. Именно, предположим, что в уравнении (12.3) по крайней мере один из параметров λ, μ, ν равен нулю; тогда, обращаясь к рассуждениям предыдущего пункта, выберем параметры λ', μ', ν' так:

$$\lambda = \lambda', \quad \mu = \mu', \quad \nu = \nu'.$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом частном случае оба коэффициента a и b оказываются равными нулю, после чего уравнение (5.3) приводится к уравнению

$$(t^2-1)F''(t) + 2(m+1)tF'(t) + \{m(m+1) - n(n+1)\}F(t) = 0, \quad (1.4)$$

где

$$m = \lambda + \mu + \nu. \quad (2.4)$$

Преобразуем уравнение (1.4) к новой переменной x, положив

$$x = \frac{1-t}{2}, \quad F(t) = y(x);$$

тогда получим уравнение:

$$x(1-x)y''(x)+\{(m+1)-2(m+1)x\}y'(x)+ \\ +\{n(n+1)-m(m+1)\}y(x)=0. \tag{3.4}$$

Но известно, что при целом и положительном n_1 уравнение

$$x(1-x)y''(x)+\{q-(p+1)x\}y'(x)+(p+n_1)n_1y(x)=0 \tag{4.4}$$

допускает частное решение в форме полинома Якоби:

$$G_{n_1}(p,q,x)=\frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\dots(q+n_1-1)}\frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}}\{x^{q+n_1-1}(1-x)^{p+n_1-q}\}. \tag{5.4}$$

Таким образом, если параметры n, λ, μ, ν таковы, что разность $n-m$ равна целому положительному числу или нулю, то мы можем положить

$$F(t)=G_{n-m}\left(2m+1,\ m+1,\ \frac{1-t}{2}\right), \tag{6.4}$$

в результате чего получим следующую теорему:

ТЕОРЕМА. *Если в дифференциальном уравнении*

$$u''+\left(h-k^2n(n+1)\operatorname{sn}^2x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2x}-\frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}-\frac{\nu(\nu-1)k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\right)u=0 \tag{7.4}$$

по крайней мере одно из чисел λ, μ, ν равно нулю, а разность $n-\lambda-\mu-\nu$ есть целое положительное число или нуль, то решение уравнения (7.4), которое имеет вид

$$\operatorname{sn}^px\operatorname{cn}^qx\operatorname{dn}^rx\,P(\operatorname{sn}^2x),$$

будет решением однородного интегрального уравнения Фредгольма:

$$u(x)=\lambda_0\int_{-2K}^{2K}\varphi(x)\varphi(s)G_{n-m}\left(2m+1,\ m+1,\ \frac{1-t}{2}\right)u(s)\,ds, \tag{8.4}$$

где $G_{n-m}\left(2m+1, m+1, \frac{1-t}{2}\right)$ есть полином Якоби, а

$$m=\lambda+\mu+\nu,$$
$$\varphi(\tau)=\operatorname{sn}^\lambda\tau\operatorname{cn}^\mu\tau\operatorname{dn}^\nu\tau,$$
$$t=\alpha k\operatorname{sn}x\operatorname{sn}s+\beta i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}x\operatorname{cn}s+\gamma\frac{1}{k'}\operatorname{dn}x\operatorname{dn}s,$$

причем числа α, β, γ определяются по схеме (14.3).

В заключение настоящего параграфа заметим, что при доказательствах основных положений существенную роль имело предположение, что интеграл

$$\int_{-2K}^{2K}G(x,s)u(s)\,ds \tag{9.4}$$

не равен тождественно нулю. Но может случиться, что при равенстве нулю интеграла (9.4) оказывается не равным нулю, например, интеграл

$$\int_{-K}^{K}G(x,s)u(s)\,ds; \tag{10.4}$$

тогда вся изложенная теория, с соответствующими изменениями пределов интегрирования, останется в силе, если только будет выполняться равенство:

$$\left[\frac{\partial G}{\partial s} u(s) - Gu'(s)\right]_{-K}^{K} = 0. \qquad (11.4)$$

§ 2. Разбор специальных форм ядра уравнения Фредгольма

5°. Подвергнем более подробному исследованию те интегральные уравнения, которые мы получили в предыдущем параграфе.

Рассмотрим сначала случай, когда в уравнении (7.4) по крайней мере один из параметров λ, μ, ν равен нулю и разность

$$m = n - \lambda - \mu - \nu \qquad (1.5)$$

есть целое положительное число или нуль.

Если оба числа m и n оказываются целыми и положительными и при этом $n \geqslant m$, то полином Якоби

$$G_{n-m}\left(2m+1,\ m+1,\ \frac{1-t}{2}\right)$$

выражается через производную m-го порядка от полинома Лежандра $P_n(t)$ согласно формуле

$$G_{n-m}\left(2m+1,\ m+1,\ \frac{1-t}{2}\right) = \text{const}\, P_n^{(m)}(t), \qquad (2.5)$$

после чего интегральное уравнение (8.4) упрощается и принимает форму

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \varphi(x)\,\varphi(s)\,P_n^{(m)}(t)\,u(s)\,ds. \qquad (3.5)$$

В частности, при $\lambda = 0$ мы убеждаемся, что дифференциальному уравнению

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)\,k^2\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0 \quad (4.5)$$

соответствует интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{cn}^{\mu} x\, \mathrm{dn}^{\nu} x\, \mathrm{cn}^{\mu} s\, \mathrm{dn}^{\nu} s\, P_n^{(\mu+\nu)}(k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s)\,u(s)\,ds, \qquad (5.5)$$

где

$$n \geqslant \mu + \nu.$$

Положив здесь $\nu = -\mu$, будем иметь дифференциальное уравнение:

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x} - \frac{\mu(\mu+1)\,k^2\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0 \quad (6.5)$$

и соответствующее ему интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{\mathrm{cn}^{\mu} x\, \mathrm{cn}^{\mu} s}{\mathrm{dn}^{\mu} x\, \mathrm{dn}^{\mu} s} P_n(k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s)\,u(s)\,ds. \qquad (7.5)$$

Наконец, при $\mu = 0$ последние две формулы дают обычное уравнение Ламе:

$$u'' + (h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x)\,u = 0 \tag{8.5}$$

и интегральное уравнение Уиттекера:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} P_n(k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s)\,u(s)\,ds. \tag{9.5}$$

Как показал Уиттекер, этому интегральному уравнению удовлетворяет при четном n функция Ламе $E_n^m(x)$ первого рода, а при нечетном n — функция Ламе второго рода с множителем $\mathrm{sn}\,x$.

Если в равенствах (4.5) и (5.5) положить

$$\mu = \nu = 1,$$

то мы получим снова обычное уравнение Ламе (8.5) и второе интегральное уравнение Уиттекера:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x\,\mathrm{cn}s\,\mathrm{dn}s\,P_n''(k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s)\,u(s)\,ds, \tag{10.5}$$

которому при четном n удовлетворяет функция Ламе третьего рода с множителем $\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x$, а при нечетном n — функция Ламе четвертого рода с множителем $\mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x$.

Но возможны еще случаи функций Ламе с другими множителями, как это следует из общей схемы:

$$\left\{\begin{matrix} & \mathrm{sn}x, & \mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x, & \\ 1, & \mathrm{cn}x, & \mathrm{dn}x\,\mathrm{sn}x, & \mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x \\ & \mathrm{dn}x, & \mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x, & \end{matrix}\right\} \prod_p (\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 x_p), \tag{11.5}$$

приводимой в теории этих функций [см. ([2]), стр. 427], поэтому надо указать еще два интегральных уравнения, аналогичных уравнениям Уиттекера. Они получатся, если в равенствах (4.5) и (5.5) мы положим последовательно

$$\mu = 1, \quad \nu = 0, \tag{12.5}$$

и

$$\mu = 0, \quad \nu = 1. \tag{13.5}$$

Действительно, при таких значениях μ и ν мы снова получим обычное уравнение Ламе (8.5) и два интегральных уравнения:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{cn}x\,\mathrm{cn}s\,P_n'(k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s)\,u(s)\,ds \tag{14.5}$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{dn}x\,\mathrm{dn}s\,P_n'(k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s)\,u(s)\,ds. \tag{15.5}$$

Первому из этих уравнений при нечетном n удовлетворяет функция Ламе второго рода с множителем $\mathrm{cn}x$, а при четном n — функция Ламе третьего рода с множителем $\mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}\,x$.

Что касается интегрального уравнения (15.5), то при нечетном n ему удовлетворяет функция Ламе второго рода с множителем $\mathrm{dn}\,x$, а при четном n — функция Ламе третьего рода с множителем $\mathrm{sn}x\,\mathrm{dn}x$.

Возвращаясь к равенству (3.5), положим в нем $\mu = 0$; тогда мы будем иметь дифференциальное уравнение:

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\operatorname{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0 \quad (16.5)$$

и соответствующее ему интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{sn}^\lambda x \operatorname{dn}^\nu x \operatorname{sn}^\lambda s \operatorname{dn}^\nu s P_n^{(\lambda+\nu)}\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s\right) u(s)\, ds, \quad (17.5)$$

где

$$n \geqslant \lambda + \nu.$$

Полагая здесь последовательно

$$\lambda = 0, \quad \nu = 0; \quad \lambda = 1, \quad \nu = 0; \quad \lambda = 0, \quad \nu = 1; \quad \lambda = 1, \quad \nu = 1,$$

получаем, с одной стороны, обычное уравнение Ламе, а с другой стороны, четыре однородных интегральных уравнения:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s\right) u(s)\, ds, \quad (18.5)$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{sn} x \operatorname{sn} s\, P_n'\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s\right) u(s)\, ds, \quad (19.5)$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s\, P_n'\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s\right) u(s)\, ds, \quad (20.5)$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn} s \operatorname{dn} s\, P_n''\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s\right) u(s)\, ds, \quad (21.5)$$

из которых уравнения (18.5) и (21.5) были указаны Уиттекером.

Наконец, при $\nu = 0$ мы будем иметь уравнения:

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\operatorname{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}\right) u = 0 \quad (22.5)$$

и

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{sn}^\lambda x \operatorname{cn}^\mu x \operatorname{sn}^\lambda s \operatorname{cn}^\mu s P_n^{(\lambda+\mu)}\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s\right) u(s)\, ds, \quad (23.5)$$

где

$$n \geqslant \lambda + \mu.$$

При соответствующем выборе параметров λ и μ эти два равенства переходят в обычное уравнение Ламе и интегральные уравнения:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s\right) u(s)\, ds, \quad (24.5)$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s\, P_n'\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s\right) u(s)\, ds, \quad (25.5)$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{sn} x \operatorname{sn} s\, P_n'\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s\right) u(s)\, ds, \quad (26.5)$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{sn} s \operatorname{cn} s P_n''\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s\right) u(s)\, ds, \tag{27.5}$$

из которых результаты (24.5) и (27.5) принадлежат Уиттекеру.

6°. В предыдущем пункте мы рассмотрели случай, когда оба числа m и n целые, причем $n \geqslant m$. Предположим теперь, что n и m являются половинами целых нечетных чисел, т. е.

$$n = r - \frac{1}{2}, \quad m = p - \frac{1}{2}, \tag{1.6}$$

где через r и p обозначены целые положительные числа такие, что $r \geqslant p$. В этом случае полином Якоби переходит в производную p-го порядка от полинома Чебышева $T_r(t)$, согласно формуле:

$$G_{r-s}\left(2p, p + \frac{1}{2}, \frac{1-t}{2}\right) = \text{const}\, T_r^{(p)}(t), \tag{2.6}$$

и интегральное уравнение (8.4) принимает вид:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \varphi(x)\varphi(s) T_r^{(p)}(t)\, u(s)\, ds, \tag{3.6}$$

где

$$\begin{gathered} p = \lambda + \mu + \nu + \frac{1}{2}, \quad r = n + \frac{1}{2}, \quad r \geqslant p, \\ \varphi(\tau) = \operatorname{sn}^\lambda \tau \operatorname{cn}^\mu \tau \operatorname{dn}^\nu \tau, \\ t = \alpha k \operatorname{sn} x \operatorname{sn} s + \beta i \frac{k}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s + \gamma \frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s, \end{gathered} \tag{4.6}$$

а числа α, β, γ определяются согласно схеме (14.3).

В частности, при $\lambda = 0$ дифференциальному уравнению

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\operatorname{sn}^2 x - \frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1) k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0 \tag{5.6}$$

соответствует интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{cn}^\mu x \operatorname{dn}^\nu x \operatorname{cn}^\mu s \operatorname{dn}^\nu s\, T_{n+\frac{1}{2}}^{\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}(k \operatorname{sn} x \operatorname{sn} s)\, u(s)\, ds, \tag{6.6}$$

где n и $\mu + \nu$ равны половине нечетных чисел, причем

$$n \geqslant \mu + \nu.$$

Если положить здесь $\nu = -\mu - \frac{1}{2}$, то получится дифференциальное уравнение:

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\operatorname{sn}^2 x - \frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right) k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0$$

и соответствующее ему интегральное уравнение: (7.6)

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{\operatorname{cn}^\mu x \operatorname{cn}^\mu s}{\operatorname{dn}^{\mu+\frac{1}{2}} x \operatorname{dn}^{\mu+\frac{1}{2}} s} T_{n+\frac{1}{2}}(k \operatorname{sn} x \operatorname{sn} s)\, u(s)\, ds, \tag{8.6}$$

где n есть половина нечетного числа.

В частности, при $\mu = 0$ мы получаем уравнения:

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{3}{4}\frac{k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0 \tag{9.6}$$

и

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{T_{n+\frac{1}{2}}(k\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}\,s)}{\sqrt{\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}\,s}}\, u(s)\, ds\,, \tag{10.6}$$

т. е. формулы, аналогичные основному результату Уиттекера.

Аналогичным образом мы убедимся, что при $\mu = 0$ будут иметь место уравнения:

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)\,k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0 \tag{11.6}$$

и

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{sn}^\lambda x\,\mathrm{dn}^\nu x\,\mathrm{sn}^\lambda s\,\mathrm{dn}^\nu s\, T_{n+\frac{1}{2}}^{\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(i\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}\,s\right) u(s)\, ds\,, \tag{12.6}$$

где n и $\lambda + \nu$ равны половине нечетных чисел, причем

$$n \geqslant \lambda + \nu\,.$$

Полагая здесь $\lambda = 0$, $\nu = -\frac{1}{2}$, будем иметь дифференциальное уравнение (9.6) и соответствующее ему интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{T_{n+\frac{1}{2}}\left(i\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}\,s\right)}{\sqrt{\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}\,s}}\, u(s)\, ds\;. \tag{13.6}$$

Наконец, при $\nu = 0$ мы будем иметь дифференциальное уравнение:

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,sn^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x}\right) u = 0 \tag{14.6}$$

и соответствующее ему интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{sn}^\lambda x\,\mathrm{cn}^\mu x\,\mathrm{sn}^\lambda s\,\mathrm{cn}^\mu s\, T_{n+\frac{1}{2}}^{\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{dn}\,s\right) u(s)\, ds\,, \tag{15.6}$$

где n и $\lambda + \mu$ равны половине нечетных чисел, причем

$$n \geqslant \lambda + \mu\,.$$

7°. Перейдем теперь к рассмотрению интегрального уравнения (16.3), установленного нами в конце п. 3°.

Условимся, что во всех последующих формулах p будет обозначать целое положительное число или нуль.

А. Допустим, что параметры n, λ, μ, ν уравнения

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)\,k^2\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0 \tag{1.7}$$

связаны между собою зависимостью:

$$n = \lambda + \mu + \nu + 2p\,. \tag{2.7}$$

В этом случае гипергеометрическая функция

$$F\left(\frac{\lambda+\mu+\nu-n}{2},\ \frac{\lambda+\mu+\nu+n+1}{2},\ \alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu+\frac{1}{2},\ t^2\right)$$

обращается в полином, согласно формуле

$$F(-p,\beta_1,\gamma_1,x)=1+\sum_{r=1}^{p}\frac{\binom{-p+r-1}{r}\binom{\beta_1+r-1}{r}}{\binom{\gamma_1+r-1}{r}}x^r, \tag{3.7}$$

и мы имеем дифференциальное уравнение:

$$u''+\left(n-k^2(m+2p)(m+2p+1)\operatorname{sn}^2x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2x}-\right.$$
$$\left.-\frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}-\frac{\nu(\nu-1)k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\right)u=0 \tag{4.7}$$

и соответствующее ему интегральное уравнение:

$$u(x)=\lambda_0\int_{-2K}^{2K}\varphi(x)\varphi(s)\left\{1+\sum_{r=1}^{p}\frac{\binom{r-p-1}{r}\binom{m+p+r-\frac{1}{2}}{r}}{\binom{\delta+r-\frac{1}{2}}{r}}t^{2r}\right\}u(s)\,ds, \tag{5.7}$$

где ради краткости положено:

$$\varphi(\tau)=\operatorname{sn}^\lambda\tau\operatorname{cn}^\mu\tau\operatorname{dn}^\nu\tau,\quad t=\alpha k\operatorname{sn}x\operatorname{sn}s+\beta i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}x\operatorname{cn}s+\gamma\frac{1}{k'}\operatorname{dn}x\operatorname{dn}s,$$
$$m=\lambda+\mu+\nu,\quad \delta=\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu,$$

а числа α, β, γ определяются схемой (14.3).

В. Предположим, что между параметрами n, λ, μ, ν имеют место соотношения:

$$n=(2\alpha-1)\lambda+(2\beta-1)\mu+(2\gamma-1)\nu, \tag{6.7}$$

$$(\alpha-1)\lambda+(\beta-1)\mu+(\gamma-1)\nu=p. \tag{7.7}$$

Так как в этом случае

$$\frac{\lambda+\mu+\nu-n}{2}=-p,\quad \frac{\lambda+\mu+\nu+n+1}{2}=\delta+\frac{1}{2},$$

где

$$\delta=\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu, \tag{8.7}$$

то, принимая во внимание соотношение

$$F\left(-p,\delta+\frac{1}{2},\delta+\frac{1}{2},t^2\right)=(1-t^2)^p, \tag{9.7}$$

мы найдем, что

$$F\left(\frac{\lambda+\mu+\nu-n}{2},\ \frac{\lambda+\mu+\nu+n+1}{2},\ \delta+\frac{1}{2},\ t^2\right)=(1-t^2)^p, \tag{10.7}$$

и таким образом получим три группы уравнений:

$$u''+(h-k^2(\lambda-\mu-\nu)(\lambda-\mu-\nu+1)\operatorname{sn}^2x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2x}-$$
$$\left.-\frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}-\frac{\nu(\nu-1)k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\right)u=0, \tag{11.7}$$

$$u(x)=\lambda_0\int\limits_{-2K}^{2K}\operatorname{sn}^\lambda x\operatorname{cn}^\mu x\operatorname{dn}^\nu x\operatorname{sn}^\lambda s\operatorname{cn}^\mu s\operatorname{dn}^\nu s\,(1-k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2s)^p\,u(s)\,ds,$$

$$\mu+\nu=-p; \tag{12.7}$$

$$u''+\Big(h-k^2(-\lambda+\mu-\nu)(-\lambda+\mu-\nu+1)\operatorname{sn}^2x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2x}-$$
$$-\frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}-\frac{\nu(\nu-1)k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\Big)u=0, \tag{13.7}$$

$$u(x)=\lambda_0\int\limits_{-2K}^{2K}\operatorname{sn}^\lambda x\operatorname{cn}^\mu x\operatorname{dn}^\nu x\operatorname{sn}^\lambda s\operatorname{cn}^\mu s\operatorname{dn}^\nu s\,\Big(1+\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2x\,\operatorname{cn}^2s\Big)^p u(s)\,ds,$$

$$\lambda+\nu=-p; \tag{14.7}$$

$$u''+\Big(h-k^2(-\lambda-\mu+\nu)(-\lambda-\mu+\nu+1)\operatorname{sn}^2x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2x}-$$
$$-\frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}-\frac{\nu(\nu-1)k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\Big)u=0, \tag{15.7}$$

$$u(x)=\lambda_0\int\limits_{-2K}^{2K}\operatorname{sn}^\lambda x\operatorname{cn}^\mu x\operatorname{dn}^\nu x\operatorname{sn}^\lambda s\operatorname{cn}^\mu s\operatorname{dn}^\nu s\,\Big(1-\frac{1}{k'^2}\operatorname{dn}^2x\,\operatorname{dn}^2s\Big)^p u(s)\,ds,$$

$$\lambda+\mu=-p. \tag{16.7}$$

В частности, полагая в отдельности параметры λ, μ, ν равными нулю, получим группы более простых уравнений, например:

$$u''+\Big(h-k^2(\lambda+p)(\lambda+p+1)\operatorname{sn}^2x-\frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2x}-\frac{p(p+1)k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\Big)u=0, \tag{17.7}$$

$$u(x)=\lambda_0\int\limits_{-2K}^{2K}\operatorname{sn}^\lambda x\operatorname{sn}^\lambda s\left\{\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2s}{\operatorname{dn}x\operatorname{dn}s}\right\}^p u(s)\,ds; \tag{18.7}$$

$$u''+\Big(h-k^2(\mu+p)(\mu+p+1)\operatorname{sn}^2x-\frac{\mu(\mu-1)\operatorname{dn}^2x}{\operatorname{cn}^2x}-\frac{p(p+1)k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\Big)u=0, \tag{19.7}$$

$$u(x)=\lambda_0\int\limits_{-2K}^{2K}\operatorname{cn}^\mu x\operatorname{cn}^\mu s\left\{\frac{k'^2+k^2\operatorname{cn}^2x\operatorname{cn}^2s}{\operatorname{dn}x\operatorname{dn}s}\right\}^p u(s)\,ds \tag{20.7}$$

и т. д.

С. Пусть параметры n, λ, μ, ν уравнения (11.7) связаны между собою зависимостями:

$$n=0,\quad \lambda+\mu+\nu=-p, \tag{21.7}$$

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0; \tag{22.7}$$

тогда, принимая во внимание, что

$$2F\Big(-\frac{p}{2},-\frac{p-1}{2},\frac{1}{2},t^2\Big)=(1+t)^p+(1-t)^p, \tag{23.7}$$

мы убедимся в том, что

$$2F\Big(\frac{\lambda+\mu+\nu-n}{2},\frac{\lambda+\mu+\nu+n+1}{2},\delta+\frac{1}{2},t^2\Big)=(1+t)^p+(1-t)^p, \tag{24.7}$$

в результате чего получатся следующие группы уравнений:

$$u'' + \left(h - \frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)\,k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0, \tag{25.7}$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{cn}^\mu x\,\mathrm{dn}^\nu x\,\mathrm{cn}^\mu s\,\mathrm{dn}^\nu s\,\{(1 + k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}\,s)^p + (1 - k\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{sn}s)^p\}\,u(s)\,ds,$$

$$\mu + \nu = -p; \tag{26.7}$$

$$u'' + \left(h - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)\,k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0, \tag{27.7}$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{sn}^\lambda x\,\mathrm{dn}^\nu x\,\mathrm{sn}^\lambda s\,\mathrm{dn}^\nu s \left\{\left(1 + \frac{ik}{k'}\mathrm{cn}x\,\mathrm{cn}s\right)^p + \left(1 - \frac{ik}{k'}\mathrm{cn}x\,\mathrm{cn}s\right)^p\right\} u(s)\,ds,$$

$$\lambda + \nu = -p; \tag{28.7}$$

$$u'' + \left(h - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x}\right) u = 0, \tag{29.7}$$

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \mathrm{sn}^\lambda x\,\mathrm{sn}^\lambda s^\mu\,\mathrm{cn}x\,\mathrm{cn}^\mu s \left\{\left(1 + \frac{1}{k'}\,dnx\,dns\right)^p + \left(1 - \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}x\,\mathrm{dn}s\right)^p\right\} u(s)\,ds,$$

$$\lambda + \mu = -p. \tag{30.7}$$

§ 3. Примеры на построение алгебраических решений обобщенного уравнения Ламе

8°. Покажем на различных частных примерах, каким образом могут быть использованы найденные выше интегральные уравнения при нахождении алгебраических решений обобщенного уравнения Ламе

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1)\,\mathrm{dn}^2 x}{\mathrm{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1)\,k^2\,\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0. \tag{1.8}$$

Наиболее простой случай представляют собою решения вида

$$u(x) = \mathrm{sn}^p x\,\mathrm{cn}^q x\,\mathrm{dn}^r x, \tag{2.8}$$

так как из установленных интегральных уравнений тотчас получаются значения показателей степеней p, q, r.

Так, например, уравнение

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1)\,\mathrm{sn}^2 x - \frac{n(n-1)}{\mathrm{sn}^2 x}\right) u = 0 \tag{3.8}$$

соответствует случаю A (формула (1.7)), так как здесь

$$\lambda = n, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad p = 0$$

и, следовательно, соотношение

$$n = \lambda + \mu + \nu + 2p$$

удовлетворяется. В данном случае

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, t^2) = 1, \quad \varphi(\tau) = \mathrm{sn}^n \tau$$

и мы имеем интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \operatorname{sn}^n x \operatorname{sn}^n s\, u(s)\, ds. \tag{4.8}$$

При характеристическом числе

$$\lambda_0 = \frac{1}{\int\limits_{-2K}^{2K} \operatorname{sn}^{2n} x\, dx} \tag{5.8}$$

это интегральное уравнение имеет характеристическую функцию

$$u(x) = \operatorname{sn}^n x, \tag{6.8}$$

удовлетворяющую уравнению (3.8) при характеристическом значении

$$h = n^2(1 + k^2). \tag{7.8}$$

Дифференциальное уравнение

$$u'' + \left(h + \frac{1}{4}\frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{15}{4}\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0 \tag{8.8}$$

соответствует случаю C (формула (25.7)), так как здесь

$$n = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \nu = -\frac{3}{2}, \quad p = 1$$

и, следовательно, условия (21.7), (22.7) выполняются.

Интегральное уравнение (26.7) в данном случае принимает вид

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \sqrt{\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} s}{\operatorname{dn}^3 x \operatorname{dn}^3 s}}\, u(s)\, ds \tag{9.8}$$

и при характеристическом числе

$$\lambda_0 = \frac{1}{\int\limits_{-2K}^{2K} \frac{\operatorname{cn} s}{\operatorname{dn}^3 s}\, ds} \tag{10.8}$$

имеет решение

$$u(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn}^3 x}}. \tag{11.8}$$

Это решение удовлетворяет дифференциальному уравнению (8.8) при характеристическом значении

$$h = \frac{1}{4} + \frac{9}{4}k^2. \tag{12.8}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' + \left(h - \frac{3}{4}k^2 \operatorname{sn}^2 x - \frac{3}{4}\frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0. \tag{13.8}$$

Оно имеет вид уравнения (9.6) при $n = \frac{1}{2}$, и так как первый полином Чебышева определяется равенством

$$T_1(x) = x,$$

то вместо уравнения (10.6) мы имеем интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{sn} s}{\sqrt{\operatorname{dn} x \operatorname{dn} s}} u(s)\, ds. \tag{14.8}$$

Это уравнение при характеристическом числе

$$\lambda_0 = \frac{1}{\int\limits_{-2K}^{2K} \frac{\operatorname{sn}^2 s}{\operatorname{dn} s} ds} \tag{15.8}$$

имеет решение

$$u = \frac{\operatorname{sn} x}{\sqrt{\operatorname{dn} x}}, \tag{16.8}$$

которое удовлетворяет уравнению (13.8) при

$$h = 1 + \frac{1}{4} k^2. \tag{17.8}$$

Рассмотрим еще дифференциальное уравнение

$$u'' + \left(h + \frac{1}{4} k^2 \operatorname{sn}^2 x - \frac{5}{16} \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{5}{16} \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0, \tag{18.8}$$

имеющее вид уравнения (5.6) при

$$n = -\frac{1}{2}, \quad \mu = -\frac{1}{4}, \quad \nu = -\frac{1}{4}.$$

Алгебраическое решение этого дифференциального уравнения является решением интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-K}^{K} \frac{u(s)\, ds}{\sqrt[4]{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{cn} s \operatorname{dn} s}}. \tag{19.8}$$

Последнее уравнение при конечном характеристическом числе

$$\lambda_0 = \frac{1}{\int\limits_{-K}^{K} \frac{ds}{\sqrt{\operatorname{cn} s \operatorname{dn} s}}} \tag{20.8}$$

имеет решение

$$u = \frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}}, \tag{21.8}$$

являющееся решением уравнения (18.8) при

$$h = \frac{5}{16} + \frac{1}{16} k^2. \tag{22.8}$$

9°. Несколько более сложных выкладок требует случай, когда искомые решения уравнения

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1) \operatorname{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1) \operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1) k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right) u = 0 \tag{1.9}$$

имеют двучленный характер.

Для примера рассмотрим уравнение

$$u'' + \left(h - \frac{15}{4}k^2\mathrm{sn}^2x - \frac{3}{4}k^2\frac{\mathrm{cn}^2x}{\mathrm{dn}^2x}\right)u = 0. \tag{2.9}$$

Оно имеет вид уравнения (5.6) при

$$n = \frac{3}{2}, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = -\frac{1}{2},$$

и так как второй полином Чебышева равен

$$T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2},$$

то мы имеем интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{1 - 2k^2\mathrm{sn}^2x\,\mathrm{sn}^2s}{\sqrt{\mathrm{dn}x\,\mathrm{dn}s}}\,u(s)\,ds. \tag{3.9}$$

При некотором значении λ_0 это интегральное уравнение имеет решение вида

$$u(x) = \frac{1 + a\,\mathrm{sn}^2x}{\sqrt{\mathrm{dn}x}}, \quad a = \mathrm{const}. \tag{4.9}$$

Для нахождения чисел λ_0 и a внесем выражение (4.9) в уравнение (3.9) и сравним затем коэффициенты при свободных членах и sn^2x; тогда мы получим два уравнения относительно λ_0 и a, которые на основании легко доказуемых равенств

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-2K}^{2K}\frac{ds}{\mathrm{dn}s} = \frac{2\pi}{k'}, \\ &\int_{-2K}^{2K}\frac{\mathrm{sn}^2s\,ds}{\mathrm{dn}s} = \frac{2\pi}{k^2}\left(\frac{1}{k'} - 1\right), \\ &\int_{-2K}^{2K}\frac{\mathrm{sn}^4s\,ds}{\mathrm{dn}s} = \frac{2\pi}{k^4}\left(\frac{1}{k'} - 1 - \frac{k^2}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

приведутся к виду

$$1 = 2\pi\lambda_0\left\{\frac{1}{k'} + \frac{a}{k^2}\left(\frac{1}{k'} - 1\right)\right\}, \tag{6.9}$$

$$a = -4\pi\lambda_0\left\{\frac{1}{k'} - 1 + \frac{a}{k^2}\left(\frac{1}{k'} - 1 - \frac{k^2}{2}\right)\right\}. \tag{7.9}$$

Решая эти уравнения относительно λ_0 и a, получим два характеристических числа:

$$\lambda_0' = -\frac{k^2k'}{2\pi(1-k')^2}, \quad \lambda_0'' = -\frac{k^2k'}{2\pi(1+k')^2} \tag{8.9}$$

и два значения a:

$$a_1 = -2, \quad a_2 = -k^2. \tag{9.9}$$

Таким образом, мы находим при помощи формулы (4.9) две характеристические функции:

$$u_1 = \frac{1 - 2\,\mathrm{sn}^2x}{\sqrt{\mathrm{dn}x}}, \quad u_2 = \mathrm{dn}^{\frac{3}{2}}x, \tag{10.9}$$

из которых первая является решением дифференциального уравнения (2.9) при

$$h_1 = 4 + \frac{1}{4}k^2, \tag{11.9}$$

а вторая — решением того же уравнения при

$$h_2 = \frac{9}{4} k^2. \tag{12.9}$$

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$u'' + \left(h - \frac{15}{4} k^2 \mathrm{sn}^2 x - \frac{15}{4} k^2 \frac{\mathrm{cn}^2 x}{\mathrm{dn}^2 x}\right) u = 0. \tag{13.9}$$

Так как здесь

$$n = \frac{3}{2}, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad \nu = -\frac{3}{2},$$

то условие

$$n = \lambda + \mu + \nu + 2p$$

выполняется при $p = 1$, следовательно, мы имеем случай A (уравнение (4.7)), и интегральное уравнение (5.7) принимает форму:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{\mathrm{sn}x\, \mathrm{sn}s}{\mathrm{dn}^{\frac{3}{2}} x\, \mathrm{dn}^{\frac{3}{2}} s} \left\{1 - \frac{2}{3} \mathrm{sn}^2 x\, \mathrm{sn}^2 s\right\} u(s)\, ds. \tag{14.9}$$

Это уравнение имеет решение вида

$$u(x) = \frac{\mathrm{sn}x}{\mathrm{dn}^{\frac{3}{2}} x} (1 + a\,\mathrm{sn}^2 x). \tag{15.9}$$

Для определения чисел λ_0 и a внесем выражение (15.9) в уравнение (14.9); тогда, принимая во внимание равенства

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-2K}^{2K} \frac{\mathrm{sn}^2 s\, ds}{\mathrm{dn}^3 s} = \frac{\pi}{k^2} \cdot \frac{1}{k'^2} \left(\frac{1}{k'} - 1\right)(1 + k'),\\
&\int_{-2K}^{2K} \frac{\mathrm{sn}^4 s\, ds}{\mathrm{dn}^3 s} = \frac{\pi}{k^4} \frac{1}{k'} \left(\frac{1}{k'} - 1\right)^2 (1 + 2k'),\\
&\int_{-2K}^{2K} \frac{\mathrm{sn}^6 s\, ds}{\mathrm{dn}^3 s} = \frac{\pi}{k^6} \left(\frac{1}{k'} - 1\right)^3 (1 + 3k' + k'^2),
\end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

мы получим систему уравнений относительно λ_0 и a:

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \frac{\pi}{k^2 k'} \left(\frac{1}{k'} - 1\right) \lambda_0 \left\{\frac{1}{k'}(1 + k') + \frac{a}{k^2}\left(\frac{1}{k'} - 1\right)(1 + 2k')\right\},\\
a &= -\frac{2}{3} \frac{\pi}{k^2} \left(\frac{1}{k'} - 1\right)^2 \lambda_0 \left\{\frac{1}{k'}(1 + 2k') + \frac{a}{k^2}\left(\frac{1}{k'} - 1\right)(1 + 3k' + k'^2)\right\},
\end{aligned}\right. \tag{17.9}$$

Исключение из этой системы буквы λ_0 дает квадратное уравнение относительно a:

$$3a^2 + (k^2 + 4)\, a + 2k^2 = 0. \tag{18.9}$$

По двум корням этого уравнения и соотношению (15.9) строим две характеристические функции интегрального уравнения (14.9):

$$u_1 = \frac{\mathrm{sn}x}{\mathrm{dn}^{\frac{3}{2}} x} \left\{1 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6} k^2 + \frac{2}{3} \sqrt{1 - k^2 + \left(\frac{1}{2} k\right)^4}\right) \mathrm{sn}^2 x\right\}, \tag{19.9}$$

$$u_2 = \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn}^{\frac{3}{2}} x}\left\{1 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6}k^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1 - k^2 + \left(\frac{1}{2}k\right)^4}\right)\operatorname{sn}^2 x\right\}. \qquad (20.9)$$

Первая из них является решением дифференциального уравнения (13.9) при

$$h_1 = 5 + \frac{5}{4}k^2 - 4\sqrt{1 - k^2 + \left(\frac{1}{2}k\right)^4}, \qquad (21.9)$$

а вторая — при

$$h_2 = 5 + \frac{5}{4}k^2 + 4\sqrt{1 - k^2 + \left(\frac{1}{2}k\right)^4}. \qquad (22.9)$$

Рассмотрим еще дифференциальное уравнение

$$u'' + \left(h - \frac{35}{4}k^2\operatorname{sn}^2 x + \frac{1}{4}k^2\frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right)u = 0. \qquad (23.9)$$

Так как здесь

$$n = -\frac{7}{2}, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = \frac{1}{2},$$

то мы имеем несколько видоизмененный случай А. Нетрудно доказать, руководствуясь равенством

$$F(2, -1, 1, t^2) = 1 - \frac{2}{k'^2}\operatorname{dn}^2 x \operatorname{dn}^2 s,$$

что, взяв в основном интегральном уравнении (16.3)

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1,$$

мы получим интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \sqrt{\operatorname{dn} x \operatorname{dn} s}\left\{1 - \frac{2}{k'^2}\operatorname{dn}^2 x \operatorname{dn}^2 s\right\}u(s)\,ds. \qquad (24.9)$$

Это уравнение имеет решение вида

$$u(x) = \sqrt{\operatorname{dn} x}\,(1 + a\operatorname{dn}^2 x), \qquad (25.9)$$

и мы найдем значения параметров λ_0 и a, если внесем выражение (25.9) в уравнение (24.9). Сделав это и приняв во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_{-2K}^{2K} \operatorname{dn} s\,ds &= 2\pi, \\ \int_{-2K}^{2K} \operatorname{dn}^3 s\,ds &= \pi(1 + k'^2), \\ \int_{-2K}^{2K} \operatorname{dn}^5 s\,ds &= \frac{3}{4}\pi(1 + k'^2)^2 - \pi k'^2, \end{aligned} \qquad (26.9)$$

мы найдем уравнения для определения чисел λ_0 и a:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \lambda_0\pi\{2 + a(1 + k'^2)\}, \\ a &= -\frac{2\lambda_0\pi}{k'^2}\left\{1 - k'^2 + a\left[\frac{3}{4}(1 + k'^2)^2 - k'^2\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (27.9)$$

Исключая отсюда λ_0, получим квадратное уравнение для определения a:

$$2k'^2 a^2 + 3(1+k'^2)a + 4 = 0. \tag{28.9}$$

По двум корням этого уравнения строим две характеристические функции интегрального уравнения (24.9):

$$u_1 = \sqrt{\operatorname{dn} x}\left\{1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{k'^2} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{14}{9}\frac{1}{k'^2} + \frac{1}{k'^4}}\right)\operatorname{dn}^2 x\right\}, \tag{29.9}$$

$$u_2 = \sqrt{\operatorname{dn} x}\left\{1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{k'^2} + \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{14}{9}\frac{1}{k'^2} + \frac{1}{k'^4}}\right)\operatorname{dn}^2 x\right\}. \tag{30.9}$$

Первая из них является решением дифференциального уравнения (23.9) при

$$h_1 = \frac{21}{4} - \frac{13}{4}k'^2 + \sqrt{9k'^4 - 14k'^2 + 9}, \tag{31.9}$$

а вторая — при

$$h_2 = \frac{21}{4} - \frac{13}{4}k'^2 - \sqrt{9k'^4 - 14k'^2 + 9}. \tag{32.9}$$

10°. Из рассмотренных выше примеров видно, что уже при разыскании двучленных алгебраических решений выкладки оказываются довольно сложными. Они еще более усложняются, если приходится разыскивать трехчленные решения. Однако, если задаться целью найти только частное решение обобщенного уравнения Ламе, имеющее определенную алгебраическую форму, то доказанная нами основная теорема может оказаться очень полезной для достижения этой цели. В самом деле, из интегрального уравнения, которому удовлетворяет разыскиваемое алгебраическое решение, прямо усматривается форма этого решения, и, пользуясь способом неопределенных коэффициентов, мы можем в целом ряде случаев найти искомые решения, не прибегая к сложным выкладкам.

Подтвердим эти соображения следующим примером. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' + \left(h + \frac{63}{4}k^2\operatorname{sn}^2 x - \frac{3}{4}\frac{k^2\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\right)u = 0. \tag{1.10}$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (9.6) и получается из него при $n = \frac{7}{2}$.

Обращаясь к интегральному уравнению (10.9) и замечая, что четвертый полином Чебышева равен

$$T_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8},$$

мы будем иметь интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \frac{8k^4\operatorname{sn}^4 x\operatorname{sn}^4 s - 8k^2\operatorname{sn}^2 x\operatorname{sn}^2 s + 1}{\sqrt{\operatorname{dn} x\operatorname{dn} s}}\, u(s)\, ds. \tag{2.10}$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\operatorname{dn}^2 x = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 x,$$

видно, что интегральное уравнение (2.10) допускает решение, имеющее

вид

$$u(x) = \mathrm{dn}^{-\frac{1}{2}}x + a\,\mathrm{dn}^{\frac{3}{2}}x + b\,\mathrm{dn}^{\frac{7}{2}}x, \tag{3.10}$$

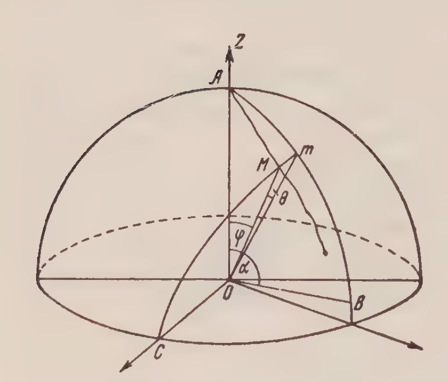
т. е. алгебраическое трехчленное решение.

Для определения постоянных a, b и характеристического значения h внесем выражение (3.10) в уравнение (1.10); тогда получим:

$$\left(12a - \frac{17}{4}b + \frac{49}{4}bk'^2 + bh\right)\mathrm{dn}^4 x + \left(16 - 12a - \frac{9}{4}ak^2 - 8bk'^2 + ah\right)\mathrm{dn}^2 x + \\ + h - 16 - \frac{1}{4}k^2 = 0.$$

Таким образом, искомые значения a, b и h определятся из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 12a + 8b - \frac{49}{4}bk^2 + bh = 0, \\ 16 - 12a - \frac{9}{4}ak^2 - 8bk'^2 + ah = 0, \\ h - 16 - \frac{1}{4}k^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$



откуда вытекает, что

$$a = \frac{8(k^2 - 2)}{k^4 - 8k^2 + 8}, \quad b = \frac{8}{k^4 - 8k^2 + 8}. \tag{5.10}$$

Из приведенного анализа следует, что дифференциальное уравнение (1.10) при

$$h = 16 + \frac{1}{4}k^2 \tag{6.10}$$

имеет частное решение

$$u = \frac{8\mathrm{dn}^4 x + 8(k^2 - 2)\,\mathrm{dn}^2 x + k^4 - 8k^2 + 8}{\sqrt{\mathrm{dn}\, x}}. \tag{7.10}$$

§ 4. Применение предыдущей теории к определению периода колебания тяжелой сферической нити

11°. Как мы сейчас покажем, обобщенное уравнение Ламе встречается в одной задаче малых колебаний.

Поставим себе целью определить период колебания тяжелой однородной нити, закрепленной в северном полюсе сферы радиуса R и под влиянием своего веса располагающейся по дуге меридиана [см. ([3])].

Пусть α означает угол, под которым видна нить в невозмущенном состоянии из центра сферы. Обозначим через θ и φ те координаты возмущенной точки M, которые указаны на чертеже.

Возьмем элемент ds нити, на конце которого действуют силы натяжения T и $T+dT$. Кроме силы натяжения, на этот элемент действует еще сила тяжести. Для вывода уравнения малых колебаний спроектируем указанные силы на направления φ и θ; тогда уравнения равновесия элемента ds будут:

$$T\cos(T,\varphi)\,|_{\varphi+d\varphi}-T\cos(T,\varphi)\,|_{\varphi}-g\rho\,ds\cos(z,\varphi)=0, \qquad (1.11)$$

$$T\cos(T,\theta)\,|_{\varphi+d\varphi}-T\cos(T,\theta)\,|_{\varphi}-g\rho\,ds\cos(z,\theta)=0, \qquad (2.11)$$

где через g обозначено ускорение силы тяжести, а через ρ — линейная плотность нити.

Принимая во внимание формулы

$$ds=\sqrt{(R\,d\theta)^2+(R\cos\theta\,d\varphi)^2},$$

$$x=R\cos\theta\sin\varphi, \quad y=R\sin\theta, \quad z=R\cos\theta\cos\varphi,$$

мы без труда убедимся, что равенство (1.11) даст величину натяжения

$$T=g\rho(\cos\varphi-\cos\alpha), \qquad (3.11)$$

а равенство (2.11) при малых θ даст уравнение равновесия нити:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{(\cos\varphi-\cos\alpha)\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right\}+(\cos\varphi-\cos\alpha)\,\theta=0. \qquad (4.11)$$

Отсюда на основании принципа Даламбера получим уравнение малых колебаний нити около своего положения равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{(\cos\varphi-\cos\alpha)\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right\}+(\cos\varphi-\cos\alpha)\,\theta=\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}, \qquad (5.11)$$

где ради краткости положено:

$$a_0=\sqrt{\frac{g}{R}}. \qquad (6.11)$$

Преобразуем уравнение (5.11) к новой переменной x, положив

$$\sin\frac{\varphi}{2}=k\,\mathrm{sn}\,x, \quad k=\sin\frac{\alpha}{2}; \qquad (7.11)$$

тогда мы получим:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}\frac{\partial\theta}{\partial x}+4k^2\,\mathrm{cn}^2\,x\,\theta=\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}, \qquad (8.11)$$

где ради краткости положено:

$$y=\frac{a_0}{\sqrt{2}}\,t. \qquad (9.11)$$

Разделяя в уравнении (8.11) переменные посредством равенства

$$\theta=XT, \qquad (10.11)$$

получим уравнения:

$$T''+\mu^2T=0, \qquad (11.11)$$

$$X''-\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{cn}\,x}X'-(4k^2\,\mathrm{sn}^2\,x-4k^2-\mu^2)\,X=0. \qquad (12.11)$$

Если последнее уравнение преобразовать к новой функции посредством

равенства

$$y = \sqrt{\operatorname{cn} x}\, X, \tag{13.11}$$

то получится обобщенное уравнение Ламе

$$y'' + \left(h - \frac{19}{4} k^2 \operatorname{sn}^2 x + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}\right) y = 0, \tag{14.11}$$

где

$$h = \frac{1}{4} + 4k^2 + \mu^2. \tag{15.11}$$

Условия закрепления нити в полюсе сферы и голоморфности решения в точке $\varphi = \alpha$ приводят к пограничным условиям для функции X:

$$X\,|_{x=0} = 0, \quad X\,|_{x=K} = \text{конечной величине}, \tag{16.11}$$

где через $4K$ обозначен период эллиптических функций, соответствующий модулю $k = \sin\frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, нам надо разыскать такое решение уравнения (14.11), которое удовлетворяло бы пограничным условиям

$$y\,|_{x=0} = 0, \quad y\,|_{x=K} = 0. \tag{17.11}$$

Уравнение (14.11) получается из обобщенного уравнения Ламе, если в последнем положить

$$n(n+1) = \frac{19}{4}, \quad \lambda(\lambda - 1) = 0, \quad \mu(\mu - 1) = -\frac{1}{4}, \quad \nu(\nu - 1) = 0. \tag{18.11}$$

Как мы убедимся ниже, первому из пограничных условий (17.11) мы удовлетворим, если возьмем $\lambda = 1$.

Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$$F\left(\frac{\lambda + \mu + \nu - n}{2}, \frac{\lambda + \mu + \nu + n + 1}{2}, \delta + \frac{1}{2}, t^2\right),$$

входящую в состав основного интегрального уравнения (16.3), причем здесь ради краткости положено:

$$\delta = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu, \tag{19.11}$$

$$t = \alpha k \operatorname{sn} x \operatorname{sn} s + \beta i \frac{k}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{cn} s + \gamma \frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s. \tag{20.11}$$

Если положить

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0,$$

$$n = -\frac{1}{2} + \sqrt{5}, \quad \lambda = 1, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \nu = 0,$$

то будем иметь:

$$\delta = \frac{1}{2}, \quad t^2 = -\frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2 x \operatorname{cn}^2 s,$$

и, следовательно,

$$F\left(\frac{\lambda + \mu + \nu + n}{2}, \frac{\lambda + \mu + \nu + 1}{2}, 1, -\frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2 x \operatorname{cn}^2 s\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2 x \operatorname{cn}^2 s - \frac{11}{64} \frac{k^4}{k'^4} \operatorname{cn}^4 x \operatorname{cn}^4 s + \cdots.$$

Входящий сюда параметр k определяется равенством

$$k = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

При сравнительно небольшой длине нити число k настолько невелико, что во всех дальнейших выкладках можно пренебречь степенями k^4 и выше. Это дает нам для рассматриваемой гипергеометрической функции полиномиальное значение

$$F\left(\frac{3}{4}-\frac{n}{2}, \frac{5}{4}+\frac{n}{2}, 1, -\frac{k^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2x\,\mathrm{cn}^2s\right)=1+\frac{1}{4}\frac{k^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2x\,\mathrm{cn}^2s, \quad (21.11)$$

благодаря чему к рассматриваемому случаю можно применить общую теорию. Отметим, что здесь следует принять во внимание замечание, сделанное нами в конце п. 4°, и взять за пределы основного интегрирования четверти периодов $-K$ и K.

Интегральное уравнение (16.3) в нашем случае будет иметь вид:

$$y(x)=\lambda_0\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{sn}\,s\,\sqrt{\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{cn}\,s}\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\mathrm{cn}^2x\,\mathrm{cn}^2s\right)u(s)\,ds. \quad (22.11)$$

Оно имеет решение в форме

$$y(x)=\mathrm{sn}\,x\sqrt{\mathrm{cn}\,x}\,(1+a\,\mathrm{cn}^2x), \quad (23.11)$$

причем это решение удовлетворяет обоим пограничным условиям (17.11).

Значения характеристического числа λ_0 и параметра a могут быть получены следующим образом. Внося выражение (23.11) в соотношение (22.11), получим два уравнения для определения искомых величин:

$$1=\lambda_0\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}^2s\,\mathrm{cn}\,s\,(1+a\,\mathrm{cn}^2s)\,ds, \quad (24.11)$$

$$a=\frac{\lambda_0}{4}\frac{k^2}{k'^2}\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}^2s\,\mathrm{cn}^3s\,(1+a\,\mathrm{sn}^2s)\,ds. \quad (25.11)$$

Отбрасывая величины порядка k^4 и выше, найдем

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}^2s\,\mathrm{cn}\,s\,ds=\frac{2}{3}\frac{1}{k'}-\frac{2}{15}\frac{k^2}{k'},\\
&\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}^2s\,\mathrm{cn}^3s\,ds=\frac{4}{15}\frac{1}{k'}-\frac{8}{105}\frac{k^2}{k'},\\
&\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}^2s\,\mathrm{cn}^5s\,ds=\frac{16}{105}\frac{1}{k'}-\frac{16}{315}\frac{k^2}{k'},
\end{aligned}\right\} \quad (26.11)$$

откуда следует, что

$$1=\lambda_0\left\{\frac{2}{3}\frac{1}{k'}-\frac{2}{15}\frac{k^2}{k'}+a\left[\frac{4}{15}\frac{1}{k'}-\frac{8}{105}\frac{k^2}{k'}\right]\right\}, \quad (27.11)$$

$$a=\frac{1}{4}\frac{k^2}{k'^2}\lambda_0\left\{\frac{4}{15}\frac{1}{k'}-\frac{8}{105}\frac{k^2}{k'}+a\left[\frac{16}{105}\frac{1}{k'}-\frac{16}{315}\frac{k^2}{k'}\right]\right\}. \quad (28.11)$$

Решая эти уравнения относительно λ_0 и a и отбрасывая величины порядка выше чем k^2, найдем следующие приближенные значения λ_0 и a:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\frac{2}{3}\frac{1}{k'} - \frac{4}{25}\frac{k^2}{k'}}, \qquad a = \frac{k^2}{10}. \tag{29.11}$$

Таким образом, мы имеем следующее приближенное решение интегрального уравнения (22.11):

$$y(x) = \operatorname{sn} x \sqrt{\operatorname{cn} x}\left(1 + \frac{1}{10}k^2 \operatorname{cn}^2 x\right). \tag{30.11}$$

Ограничиваясь попрежнему величинами порядка k^2, мы убедимся, что это выражение будет удовлетворять дифференциальному уравнению (14.11) при следующем значении постоянной h:

$$h = \frac{9}{4} + \frac{8}{5}k^2. \tag{31.11}$$

Отсюда по формуле (15.11) мы найдем значение числа μ:

$$\mu = \sqrt{2 - \frac{12}{5}k^2}. \tag{32.11}$$

Итак, частота колебания основного тона определяется равенством

$$p = \sqrt{\left(1 - \frac{6}{5}k^2\right)\frac{g}{R}}, \tag{33.11}$$

откуда и находится искомый период колебания.

При малых углах α можно считать, что

$$p = \sqrt{(1 - 0{,}3\alpha^2)\frac{g}{R}}. \tag{34.11}$$

Если применить другой метод исследования, а именно, при помощи подстановки

$$x = K - \frac{2K}{\pi}w \tag{35.11}$$

преобразовать уравнение (14.11) к виду

$$y'' = \frac{4K^2}{\pi^2}\left\{h - \frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sn}^2\frac{2Kw}{\pi}} + \frac{19}{4}k^2\frac{\operatorname{cn}^2\frac{2Kw}{\pi}}{\operatorname{dn}^2\frac{2Kw}{\pi}}\right\}y \tag{36.11}$$

и затем разложить эллиптические функции в ряды Фурье, то после соответствующих аппроксимаций получим для частоты основного тона следующее приближенное значение:

$$p = \sqrt{(1 - 0{,}36\alpha^2)\frac{g}{R}}. \tag{37.11}$$

Наконец, применение метода Релея дает для числа p приближенное значение [см. ([3])]:

$$p = \sqrt{(1 - 0{,}35\alpha^2)\frac{g}{R}}. \tag{38.11}$$

Поступило
21. III 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Whitteker E. T., On Lamé's differential equation and ellipsoidal harmonics, Proc. London Math. Soc., XIV, 2 (1915), 260—268.

[2] Уиттекер Е. и Ватсон Г., Курс современного анализа, т. II, 1934, Л.—М.

[3] Кошляков Н. С., On a problem of small oscillation of a rope, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, V (1934), 283—294.

[4] Кошляков Н. С., Об одном дифференциальном уравнении с частными производными второго порядка, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, IX (1935), 189—200.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
16 (1952), 563—572

Е. Б. ДЫНКИН

КРИТЕРИИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ОТСУТСТВИЯ РАЗРЫВОВ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Устанавливается связь между порядком убывания при $h \to 0$ вероятности сделать за время h переход, больший ε, и непрерывностью процесса с вероятностью единица, а также отсутствием с вероятностью единица разрывов, более сложных, чем скачки.

Мы рассматриваем марковский случайный процесс в полном метрическом фазовом пространстве Ω, заданный вероятностями перехода $P(s, x, t, E)$. Функция $P(s, x, t, E)$ определена для всех x из Ω, E — из некоторой фиксированной борелевской системы множеств и s, t — из некоторого фиксированного отрезка времени I, который, не ограничивая общности, можно считать равным отрезку $[0,1]$. Обозначим через $U_\varepsilon(x)$ ε-окрестность точки x, через $V_\varepsilon(x)$ — ее дополнение (т. е. множество всех точек y, для которых расстояние $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$) и положим

$$\varphi_\varepsilon(h) = \sup_{\substack{t, t+\alpha \in I \\ x \in \Omega \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant h}} P(t, x, t+\alpha, V_\varepsilon(x)).$$

Пусть x_t — траектория процесса. Задачей настоящей работы является доказательство следующих двух теорем:

ТЕОРЕМА 1. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ $\varphi_\varepsilon(h) = o(h)$, *то функция* x_t *почти наверное (т. е. с вероятностью единица) непрерывна на всем отрезке* I.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\varphi_\varepsilon(h) = o(\sqrt{h})$ *для любого* $\varepsilon > 0$, *то функция* x_t *почти наверное не имеет на отрезке* I *разрывов второго рода (т. е. с вероятностью единица для всех* $t_0 \in I$ *существуют вполне определенные пределы* x_t *при приближении* t *к* t_0 *слева и справа).*

В § 1 и 2 доказывается, что теоремы 1 и 2 выполняются для любого счетного подмножества Λ отрезка I (см. теоремы 1′ и 2′). Переход к полному отрезку I излагается в § 3. В § 4 приводятся некоторые примеры и дополнения.

§ 1. Критерий непрерывности

Пусть M — любое подмножество отрезка $I=[0, 1]$. Положим

$$\omega(M)=\sup_{t', t'' \in M} \rho(x_{t'}, x_{t''})$$

и пусть для каждого интервала Δ

$$\omega_M(\Delta)=\omega(M \cap \Delta).$$

Легко доказывается, что:

A$_1$) если $M' \subset M''$, то для любого отрезка Δ

$$\omega_{M'}(\Delta) \leqslant \omega_{M''}(\Delta);$$

A$_2$) если $\Delta' \subset \Delta''$, то для любого M

$$\omega_M(\Delta') \leqslant \omega_M(\Delta'');$$

A$_3$) если $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k \subset \cdots$ и $M=\bigcup_{k=1}^{n} M_k$, то

$$\omega_M(\Delta)=\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{M_k}(\Delta).$$

Условимся обозначать через $|\Delta|$ длину отрезка Δ. Положим

$$\omega_M^\delta=\sup_{\substack{\Delta \subset I \\ |\Delta|<\delta}} \omega_M(\Delta), \qquad \omega_M(t)=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_M[t-\varepsilon, t+\varepsilon].$$

Нетрудно доказать, что:

A$_4$) для того чтобы функция x_t, определенная на множестве M, была непрерывна в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_M(t_0)=0;$$

A$_5$) всякая функция x_t, определенная на всюду плотном подмножестве M отрезка I и удовлетворяющая условию $\omega_M(t)=0$ для всех $t \in I$, может быть доопределена на всем отрезке I так, чтобы для всех $t \in I$

$$\omega_I(t)=0.$$

ЛЕММА 1. *Для любого конечного множества* Γ

$$P(\omega_\Gamma(\Delta)>\varepsilon) \leqslant 2\varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(|\Delta|).$$

Доказательство. Занумеруем точки множества $\Gamma \cap \Delta$ в порядке возрастания: $t_0<t_1<\cdots<t_n$. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — соответствующие значения x_t. Обозначим через $f_r(E)$ вероятность того, что

$$x_1, x_2, \ldots, x_{r-1} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0), \quad x_r \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap E,$$

а через f — вероятность того, что

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0).$$

Имеем:

$$P(t_0, x_0, t_n, U_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)) \leqslant f+\sum_{r=1}^{n} \int_{V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)} f_r(dy) P(t_r, y, t_n, U_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)). \qquad (1)$$

Если $y \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$, то $U_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0) \subset V_{\frac{\varepsilon}{4}}(y)$ и

$$P(t_r, y, t_n, U_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)) \leqslant P(t_r, y, t_n, V_{\frac{\varepsilon}{4}}(y)) \leqslant \varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(\Delta). \qquad (2)$$

Далее,

$$P(t_0, x_0, t_n, U_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)) \geqslant 1 - \varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(|\Delta|). \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следует, что

$$1 - \varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(|\Delta|) \leqslant f + \varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(|\Delta|)$$

и

$$P(\omega_\Gamma(\Delta) > \varepsilon) \leqslant 1 - f \leqslant 2\varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(|\Delta|).$$

ЛЕММА 2. *Для любого конечного множества* Γ

$$P(\omega_\Gamma^\delta > \varepsilon) < \frac{2}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta).$$

Доказательство. Выберем точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ так, чтобы

$$t_1 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots = t_n - t_{n-1} = \delta; \quad 0 < 1 - t_n \leqslant \delta. \tag{4}$$

Если $\Delta \in I$ и $|\Delta| \leqslant \delta$, то Δ покрывается одним из отрезков

$$\Delta_0 = [0, t_2], \Delta_1 = [t_1, t_3], \Delta_2 = [t_2, t_4], \ldots, \Delta_{n-1} = [t_{n-1}, 1].$$

Поэтому

$$\omega_\Gamma(\Delta) \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \omega_\Gamma(\Delta_k).$$

В силу леммы 1,

$$P\left(\max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \omega_\Gamma(\Delta_k) > \varepsilon\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega_\Gamma(\Delta_k) > \varepsilon) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2\varphi_{\varepsilon/4}(|\Delta_k|) \leqslant 2n\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta).$$

Далее, из (4) видно, что $n\delta < 1$. Отсюда $n < \frac{1}{\delta}$.

ЛЕММА 3. *Для любого счетного множества* Λ

$$P(\omega_\Lambda^\delta > \varepsilon) \leqslant \frac{2}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta).$$

Доказательство. Построим последовательность конечных множеств

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots \subset \Gamma_k \subset \cdots$$

так, чтобы

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k \cup \cdots = \Lambda.$$

Обозначим через C_r событие $\{\omega_{\Gamma_r}^\delta > \varepsilon\}$ и через C — событие $\{\omega_\Lambda^\delta > \varepsilon\}$.

Тогда $C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_r \subset \cdots$ и $C = \bigcup_{r=1}^{\infty} C_r$. Стало быть,

$$P(C) = \lim_{r \to \infty} P(C_r) \leqslant \frac{2}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta).$$

ТЕОРЕМА 1'. *Если выполнено условие*

$$\varphi_\varepsilon(h) = o(h),$$

то для любого счетного множества $\Lambda \subset I$ *функция* x_t *почти наверное удовлетворяет условию:*

$$\omega_\Lambda(t) = 0 \quad \textit{для всех } t \in I.$$

Доказательство. Обозначим через $A_{\varepsilon,\delta}$ событие $\omega_\Lambda^\delta > \varepsilon$. Согласно лемме 3,

$$P(A_{\varepsilon,\delta}) \leqslant \frac{2}{\delta}\varphi_{\varepsilon/4}(2\delta). \tag{5}$$

Положим

$$B_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\varepsilon, \frac{1}{n}}.$$

При любом δ $B_\varepsilon \subset A_{\varepsilon,\delta}$. Поэтому из (5) следует, что $P(B_\varepsilon) \leqslant \frac{2}{\delta} \varphi_{\varepsilon/4}(2\delta)$,

при любом δ. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем: $P(B_\varepsilon) = 0$.

Событие B, противоположное событию:

$$„\omega_\Lambda(t) = 0 \quad \text{для всех } t \in I^*“,$$

удовлетворяет включению

$$B \subset B_1 \cup B_{\frac{1}{2}} \cup B_{\frac{1}{3}} \cup \cdots \cup B_{\frac{1}{n}} \cup \cdots.$$

Отсюда

$$P(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(B_{\frac{1}{n}}) = 0.$$

Итак, $P(B) = 0$.

§ 2. Критерий отсутствия разрывов второго рода

Пусть $\Delta = [a, b] \subset I$, $\theta \subset \Delta$, M — произвольное множество. Положим $\gamma_M(\Delta, \theta) = \omega_M[a, \theta) + \omega_M(\theta, b]$, $\gamma_M(\Delta) = \inf\limits_{\theta \in \Delta} \gamma_M(\Delta, \theta)$, $\gamma_M^\delta = \inf\limits_{\substack{\Delta \in I \\ |\Delta| < \delta}} \gamma_M(\Delta)$.

Отметим некоторые свойства введенных функций:

B$_1$) если $M' \subset M''$, то $\gamma_{M'}(\Delta, \theta) \leqslant \gamma_{M''}(\Delta, \theta)$, $\gamma_{M'}(\Delta) \leqslant \gamma_{M''}(\Delta)$;

B$_2$) если $\Delta' \subset \Delta''$, то $\gamma_M(\Delta', \theta) \leqslant \gamma_M(\Delta'', \theta)$, $\gamma_M(\Delta') \leqslant \gamma_M(\Delta'')$;

B$_3$) если $\theta_n \to \theta$, то $\underline{\lim}\, \gamma_M(\Delta, \theta_n) \geqslant \gamma_M(\Delta, \theta)$;

B$_4$) если $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$ и $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, то $\gamma_M(\Delta) = \lim\limits_{n \to \infty} \gamma_{M_n}(\Delta)$.

Положим $\gamma_M(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \gamma_M[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ (предел существует в силу B$_2$)).

Имеют место следующие утверждения:

B$_5$) для того чтобы функция x_t, заданная на M, имела в точке t разрыв второго рода, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_M(t) > 0$;

B$_6$) всякая функция x_t, определенная на всюду плотном подмножестве M отрезка I и удовлетворяющая условию $\gamma_M(t) = 0$ для всех $t \in I$, может быть доопределена на всем отрезке I так, чтобы для всех $t \in I$

$$\gamma_I(t) = 0.$$

Утверждения B$_1$), B$_2$) и B$_3$) доказываются тривиально.

Доказательство B$_4$). Положим $\gamma_n = \gamma_{M_n}(\Delta)$, $\alpha = \gamma_M(\Delta)$. Согласно B$_1$),

$$\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha.$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$ существует и не превосходит α. Предположим, что $\alpha - \gamma = \varepsilon > 0$. Выберем θ_n так, чтобы

$$\gamma_{M_n}(\Delta, \theta_n) < \gamma_n + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \gamma + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последовательности θ_n выберем сходящуюся подпоследовательность $\theta_{n_i} \to \theta$. В силу B_1), при $n_i \geqslant k$

$$\gamma_{M_k}(\Delta, \theta_{n_i}) \leqslant \gamma_{M_{n_i}}(\Delta, \theta_{n_i}) < \alpha - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно B_3), при любом k

$$\gamma_{M_k}(\Delta, \theta) \leqslant \varliminf_{n_i\to\infty} \gamma_{M_k}(\Delta, \theta_{n_i}) \leqslant \alpha - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Согласно свойству A_3) § 1,

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_{M_k}(\Delta, \theta) = \gamma_M(\Delta, \theta). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует:

$$\gamma_M(\Delta, \theta) \leqslant \alpha - \frac{\varepsilon}{2},$$

что невозможно, поскольку

$$\gamma_M(\Delta) = \inf_\theta \gamma_M(\Delta, \theta) = \alpha.$$

Доказательство B_5). Если t — точка разрыва второго рода, то существует $\alpha > 0$ такое, что либо при любом $\delta > 0$ $\omega_M(t-\delta, t) \geqslant \alpha$, либо при любом $\delta > 0$ $\omega_M(t, t+\delta) \geqslant \alpha$. Пусть для определенности имеет место первый случай. Если $\theta \geqslant t$, то при достаточно малом δ

$$[t-\varepsilon, \theta) \supset (t-\delta, t).$$

Если $\theta < t$, то при достаточно малом δ

$$(\theta, t+\varepsilon] \supset (t-\delta, t).$$

В обоих случаях, в силу B_2),

$$\gamma_M([t-\varepsilon, t+\varepsilon], \theta) \geqslant \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_M[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \geqslant \alpha \text{ и } \gamma_M(t) \geqslant \alpha.$$

Пусть в точке t не происходит разрыва второго рода. Тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_M[t-\delta, t) = \lim_{\delta\to 0} \omega_M(t, t+\delta] = 0.$$

Поскольку

$$\gamma_M[t-\delta, t+\delta] \leqslant \omega_M[t-\delta, t) + \omega_M(t, t+\delta],$$

то

$$\lim_{\delta\to 0} \gamma_M[t-\delta, t+\delta] = 0,$$

т. е. $\gamma_M(t) = 0$.

Доказательство B_6). Пусть $t \bar{\in} M$. Из условия $\gamma_M(t) = 0$ и полноты фазового пространства Ω вытекает, что когда s стремится к t, пробегая значения из M и оставаясь слева от t, то x_s сходится к некоторой точке x. Положим $x_t = x$. Покажем, что для любого открытого интервала $(a, b) \in I$ имеет место равенство $\omega_M(a, b) = \omega_I(a, b)$.

Действительно, прежде всего

$$\omega_M(a, b) \leqslant \omega_I(a, b). \tag{8}$$

С другой стороны, для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти $t', t'' \in (a, b)$ такие, что

$$\rho(x_{t'}, x_{t''}) > \omega_I(a, b) - \varepsilon. \tag{9}$$

Далее, существуют s' и s'' из $(a, b) \cap M$ такие, что

$$\rho(x_{s'}, x_{t'}) < \varepsilon \text{ и } \rho(x_{s''}, x_{t''}) < \varepsilon. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает, что $\rho(x_{s'}, x_{s''}) > \omega_I(a, b) - 3\varepsilon$ и, следовательно, $\omega_M(a, b) > \omega_I(a, b) - 3\varepsilon$. Поскольку ε произвольно, то

$$\omega_M(a, b) \geqslant \omega_I(a, b). \tag{11}$$

Сопоставляя (8) и (11), получаем: $\omega_M(a, b) = \omega_I(a, b)$. Из доказанного равенства следует: $\gamma_I(a, b) = \gamma_M(a, b)$ и

$$\gamma_I(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_I(t - \varepsilon, t + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_M(t - \varepsilon, t + \varepsilon) = \gamma_M(t) = 0.$$

Ту же роль, какую в § 1 играла лемма 1, в настоящем параграфе будет играть следующая

ЛЕММА 4. *Для любого конечного множества* Γ

$$P(\gamma_\Gamma(\Delta) > \varepsilon) < 4\varphi^2_{\frac{\varepsilon}{8}}(|\Delta|).$$

Доказательство. Занумеруем точки множества $\Gamma \cap \Delta$:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n.$$

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — соответствующие значения x_t. Обозначим через $f_r(E)$ вероятность события

$$x_1, x_2, \ldots, x_{r-1} \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0), \quad x_r \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap E$$

и положим

$$g_r(z) = P\left(\omega_\Gamma(t_{r-1}, t_n] > \frac{\varepsilon}{2} \,\middle|\, x_r = z\right).$$

Имеем:

$$P(\gamma_\Gamma(\Delta) > \varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)} f_k(dz)\, g_k(z).$$

Но, согласно лемме 1 § 1,

$$g_k(z) < 2\varphi_{\varepsilon/8}(|\Delta|).$$

Отсюда

$$P(\gamma_\Gamma(\Delta) > \varepsilon) \leqslant 2\varphi_{\varepsilon/8}(|\Delta|) \sum_{k=1}^{n} f_k(V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)). \qquad (12)$$

Последняя сумма представляет вероятность того, что хотя бы одна из точек $x_1, \ldots, x_n$ находится в $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$. Если это так, то $\omega_\Gamma(\Delta) > \frac{\varepsilon}{2}$. По лемме 1, указанная сумма меньше $2\varphi_{\frac{\varepsilon}{8}}(|\Delta|)$. Подставляя это выражение в (12), получим оценку, которую требовалось доказать.

Дословное повторение рассуждений, использованных в § 1 для вывода лемм 2 и 3 и теоремы 1′, позволяет вывести из леммы 4 нижеследующие леммы 5 и 6 и теорему 2′.

ЛЕММА 5. *Для любого конечного множества* Γ

$$P(\gamma_\Gamma^\delta > \varepsilon) < \frac{4}{\delta}\varphi_{\varepsilon/8}^2(2\delta).$$

ЛЕММА 6. *Для любого счетного множества* Λ

$$P(\gamma_\Lambda^\delta > \varepsilon) \leqslant \frac{4}{\delta}\varphi_{\varepsilon/8}^2(2\delta).$$

ТЕОРЕМА 2′. *Если выполнено условие*

$$\varphi_\varepsilon(h) = o(\sqrt{h}),$$

то для любого счетного множества $\Lambda \in I$ *функция* x_t *почти наверное удовлетворяет условию*

$$\gamma_\Lambda(t) = 0 \ \text{для всех}\ t \in I.$$

§ 3. Переход к непрерывно изменяющемуся времени

Мы воспользуемся методом, принадлежащим Дубу.

Когда исследуется временное течение случайного процесса, естественным пространством элементарных событий является пространство $\mathfrak{M}$ всех функций, определенных на отрезке I, со значениями из фазового пространства Ω.

Случайный процесс П задается тем, что для любого конечного набора моментов времени $\Gamma = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ задается совместное распределение точек $x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}$. (В случае марковского процесса все эти распределения вычисляются через вероятности перехода и начальное распределение вероятностей в фазовом пространстве.) Другими словами, задаются значения вероятности $P(A)$ для любых цилиндрических множеств A, т. е. таких множеств функций, которые определяются измеримыми условиями на значения функции x_t в конечном наборе точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (именно такими множествами являлись множества функций, рассматривавшиеся нами в леммах 1, 2, 4 и 5).

С другой стороны, распределение вероятностей W в пространстве функций $\mathfrak{M}$ задается выбором некоторой борелевской системы множеств $\mathfrak{B}$ в пространстве $\mathfrak{M}$ и определением на этой системе вполне аддитивной неотрицательной функции $P(A)$, удовлетворяющей условию $P(\mathfrak{M}) = 1$.

Условимся говорить, что *распределение вероятностей W в пространстве $\mathfrak{M}$ согласуется со случайным процессом* Π, если система $\mathfrak{B}$ содержит все цилиндрические множества и вероятность $P(A)$ принимает на цилиндрических множествах значения, согласующиеся с определением процесса Π.

По значениям $P(A)$ на цилиндрических множествах однозначно определяются значения $P(B)$ на всех множествах B из минимального борелевского тела $\mathfrak{B}_0$, содержащего все цилиндрические множества. Важно отметить, что каждое множество $B \in \mathfrak{B}_0$ может быть задано условиями на значения функции x_t на некотором счетном множестве Λ. (Все множества функций, рассматривавшиеся нами в § 1 и 2, принадлежат системе $\mathfrak{B}_0$.)

С точки зрения Дуба утверждение «траектория x_t случайного процесса Π почти наверное обладает свойством D» означает следующее: *можно построить распределение вероятностей W в пространстве $\mathfrak{M}$, согласующееся с процессом* Π *и такое, что* $P(D) = 1$ (где D обозначает множество всех функций x_t, обладающих свойством D). Принимая эту точку зрения, нетрудно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА А. *Для того чтобы функция x_t обладала почти наверное свойством D, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие:*

$$\textit{Если } B \in \mathfrak{B}_0 \textit{ и } B \supset D, \textit{ то } P(B) = 1. \qquad (*)$$

Необходимость этого условия очевидна. Достаточность доказывается тем, что строится система $\mathfrak{B}$ множеств вида

$$A = (A' \cap D) \cup (A'' \cap \bar{D})$$

$(A', A'' \in \mathfrak{B}_0, \ \bar{D} = \mathfrak{M} \setminus D)$, и вероятность $P(A)$ определяется формулой

$$P(A) = P(A').$$

Опираясь на теорему A, мы докажем следующую теорему;

ТЕОРЕМА В. *Пусть каждому счетному всюду плотному подмножеству Λ отрезка I сопоставлено некоторое множество $B_\Lambda \in \mathfrak{B}_0$. Пусть*

а) $P(B_\Lambda) = 1$ *для всех* Λ,

б) *для каждой функции $x_t \in B_\Lambda$ найдется функция y_t, совпадающая с x_t на множестве Λ и обладающая свойством D.*

Тогда свойство D выполняется почти наверное.

Доказательство. Пусть $B \supset D$, $B \in \mathfrak{B}_0$. Тогда B задается условиями на значение функции x_t на некотором счетном множестве Λ, которое, очевидно, можно без ограничения общности считать всюду плотным на отрезке I. Из б) вытекает, что $B \supset B_\Lambda$ и, в силу а), $P(B) = 1$. Следовательно, условие (*) выполняется и, по теореме А, свойство D имеет место почти наверное.

Воспользуемся теоремой В для доказательства теорем 1 и 2. Положим: B_Λ — совокупность всех функций, для которых $\omega_\Lambda(t) = 0$ при всех $t \in I$; свойство D — непрерывность на отрезке I.

Согласно теореме 1′ § 1, выполнено условие а) теоремы В; согласно предложениям A_4) и A_5) § 1, выполнено также условие б). Утверждение теоремы В доказывает теорему 1.

Положим теперь:

B_Λ — совокупность всех функций, для которых $\gamma_\Lambda(t) = 0$ при всех $t \in I$;

свойство D — отсутствие разрывов второго рода.

В силу теоремы 2′ и предложений B_5) и B_6) § 2, условия а) и б) теоремы В снова выполнены, и мы получаем теорему 2.

§ 4. Примеры и дополнения

1. Однородные процессы с независимыми приращениями. Для таких процессов приращение абсциссы частицы за промежуток времени $t, t+h$ не зависит ни от начального момента t, ни от положения частицы в момент t. Если обозначить это приращение через ξ_h, то функцию $\varphi_\varepsilon(h)$, введенную в начале статьи, можно записать в виде

$$\varphi_\varepsilon(h) = P(|\xi_h| > \varepsilon). \tag{13}$$

Предположим, что дисперсия $D\xi_h$ конечна. Тогда немедленно получается, что $D\xi_h = bh$, $M\xi_h = ah$, где a и b — некоторые постоянные. Согласно неравенству Чебышева,

$$P(|\xi_h| > \varepsilon) < \frac{M\xi_h^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi_h + (M\xi_h)^2}{\varepsilon^2} = \frac{bh + (ah)^2}{\varepsilon^2}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\varphi_\varepsilon(h) = O(h). \tag{15}$$

Та же оценка может быть выведена несколько более сложным путем и для случая, когда дисперсия $D\xi_h$ бесконечна.

В силу теоремы 2, из оценки (15) вытекает, что траектории всякого однородного процесса с независимыми приращениями почти наверное не имеют разрывов второго рода. Эта теорема была доказана впервые П. Леви (1).

В случае, когда ξ_h распределена нормально, имеем:

$$\varphi_\xi(h) = P(|\xi_h| > \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_h}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x_h} e^{-\frac{1}{2} x_h^2},$$

где $x_h = \frac{\varepsilon - ah}{\sqrt{bh}}$. Отсюда видно, что $\varphi_\varepsilon(h) = o(h)$. В силу теоремы 1, траектории этого процесса почти наверное непрерывны. Эта теорема была доказана впервые Винером в 1923 г.

2. Пусть частица может находиться в одной из точек $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ $\ldots, \frac{k-1}{k}, \ldots$ и 1. Из точки 1 невозможны никакие переходы. Из точки $\frac{k-1}{k}$ возможен непосредственный переход только в точку $\frac{k}{k+1}$. Плотность вероятности выхода из точки $\frac{k-1}{k}$ равна a_k. Предположим, что ряд $\sum_{k-1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ сходится. Тогда с положительной вероятностью произойдет бесконечное число переходов [см. (2)]. Таким образом, траектории описанного марковского процесса с положительной вероятностью имеют бесконечное число разрывов первого рода. В то же время легко проверить,

что для этого процесса $\varphi_\varepsilon(h) = O(h)$. Следовательно, условие $\varphi_\varepsilon(h) = O(h)$ совместимо с наличием счетного числа разрывов даже в однородном случае. Отсюда видно, что теорему 1 нельзя усилить. Вопрос о возможности замены в формулировке теоремы 2 условия $\varphi_\varepsilon(h) = o(\sqrt{h})$ менее ограничительным условием остается открытым.

3. Немарковские процессы. Рассмотрим произвольный (не обязательно марковский) случайный процесс и положим

$$\omega(\Delta) = \sup_{\Gamma} \omega_{\Gamma}(\Delta), \quad \gamma(\Delta) = \sup_{\Gamma} \gamma_{\Gamma}(\Delta),$$

где Γ пробегает всевозможные конечные наборы моментов времени. Положим

$$\lambda_\varepsilon(h) = \sup_{|\Delta| \leqslant h} P(\omega(\Delta) > \varepsilon), \quad \mu_\varepsilon(h) = \sup_{|\Delta| < h} P(\gamma(\Delta) > \varepsilon).$$

Содержание § 1—3 можно разбить на две части. К первой части относятся леммы 1 и 4. В этой части с существенным использованием того обстоятельства, что процесс является марковским, выводятся оценки, которые можно записать в виде $\lambda_\varepsilon(h) \leqslant 2\varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(h)$, $\mu_\varepsilon(h) \leqslant 4\varphi^2_{\frac{\varepsilon}{8}}(h)$.

В остальной части доказывается, что:

1) если $\lambda_\varepsilon(h) = o(h)$, то траектории процесса почти наверное непрерывны;

2) если $\mu_\varepsilon(h) = o(h)$, то траектории процесса почти наверное не имеют разрывов второго рода.

При выводе этих утверждений условие, что процесс является марковским, не используется, так что они сохраняют свою силу и в общем случае.

4. Рассмотрение лемм 1 и 4 также можно перенести на немарковский случай, если положить

$$\varphi_\varepsilon(h) = \sup P(x_{s_n+\alpha} \in V_\varepsilon(x^{(n)}) \mid x_{s_1} = x^{(1)},\ x_{s_2} = x^{(2)}, \ldots, x_{s_n} = x^{(n)})$$

(в правой части стоит условная вероятность при условии $x_{s_1} = x^{(1)}, \ldots$ $\ldots, x_{s_n} = x^{(n)}$; верхняя грань берется по всем α из интервала $[0, h]$ и по всем конечным наборам $0 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leqslant 1$, $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} \in \Omega$, причем n изменяется неограниченно). При таком определении $\varphi_\varepsilon(h)$ теоремы 1 и 2 остаются справедливыми и в немарковском случае.

5. Методами, аналогичными тем, при помощи которых были установлены теоремы 1 и 2, можно доказать, что в случае, когда $\varphi_\varepsilon(h) = O(\sqrt{h})$- почти наверное для всякого $\varepsilon > 0$ имеется лишь конечное число точек t, для которых $\gamma_I(t) > \varepsilon$, и, стало быть, почти наверное имеется не более чем счетное число разрывов второго рода.

Поступило
15.V.1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lévy P., Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, Annali Scuola normale, Pisa, s. 2, t. 3 (1934), 337—366.

[2] Feller W., On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes, Trans. Am. Math. Soc., 48 : 3 (1940), 488—515.